CONGRÈS NATIONAL D'ANALYSE NUMÉRIQUE
29 MAI - 2 JUIN 1995

LISSAGE D'UNE IMAGE HARMONIQUE

François DUBOIS et Olivier WILK, 14 mars 1995
Institut Aérotechnique du C.N.A.M.
15, rue Marat, 78210 S^{t}-Cyr-L'École

- Le traitement d'images issues de mesures en soufflerie ignore en général qu'on dispose d'un champ fluide dont les équations générales sont bien connues. Nous partons de cette idée pour proposer et étudier un algorithme de lissage d'images harmoniques, c'est-à-dire de champs $\mathbf{u} :]0,1[^2 \equiv \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant à l'équation de Laplace

$$-\Delta \mathbf{u} = 0 \qquad \textbf{dans } \Omega \qquad (1)$$

ce qui correspond à un modèle fluide bidimensionnel irrotationnel et potentiel.

- Partant d'une image $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ qui devrait vérifier l'équation (1), mais à cause de bruits extérieurs ne la vérifie pas exactement, l'algorithme que nous proposons consiste à projeter $\mathbf{u}$ sur l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions harmoniques, relativement à la norme $\mathbf{H}^1$. L'image traitée $\mathbf{w}$ est donc solution du problème :

$$\inf_{\mathbf{w} \in \mathcal{H}} \frac{1}{2} \left\| \mathbf{w} - \mathbf{u} \right\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} . \qquad (2)$$

- La discrétisation de (2) sur une grille (nous avons choisi une grille uniforme 20 x 20 pour les premières simulations) s'effectue en deux étapes :

  1) Détermination d'une base de l'espace $\mathcal{H}$. Il suffit d'introduire les fonctions discrètes $\mathbf{G_k}$ paramétrées par les **N** sommets (**N** = 36 dans nos tests) **k** de la frontière du maillage, satisfaisant d'une part (1) faiblement au sens des éléments finis et d'autre part une condition de Dirichlet non homogène au bord :

$$\mathbf{G_k}(\mathbf{l}) = \delta_{\mathbf{kl}} \qquad \mathbf{k}, \mathbf{l} \textbf{ sommets du bord.} \qquad (3)$$

  2) Recherche de l'image traitée sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de base précédentes et résolution discrète de (2) dans le sous-espace correspondant.

- Les premiers résultats concernent l'étude d'un champ de la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{0{,}25})\,\mathbf{b} \qquad (4)$$

où **v** est la solution discrétisée d'un problème de Dirichlet pour l'équation (1) et **b** un bruit aléatoire à valeurs dans [0,1]. Un traitement parfait consisterait à retrouver le champ non perturbé **v**. Nous obtenons les résultats présentés aux figures 1 à 3. Ces résultats encourageants nous invitent à explorer plus avant l'idée ci-dessus exposée.

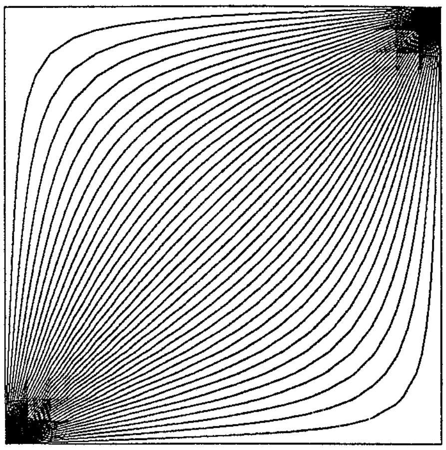

Figure 1 : Le champ initial (**v**)

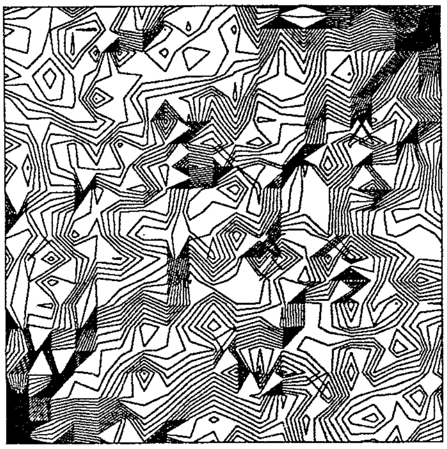

Figure 2 : Le champ initial bruité à 25 % (**u**)

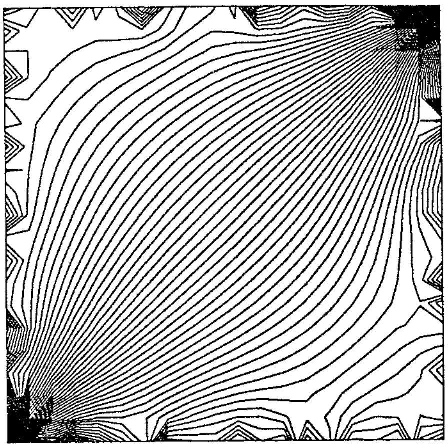

Figure 3 : La solution obtenue (**w**)