

# THESE

présentée à  
l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6**  
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

**QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL  
D'ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS  
DANS LES TUYERES.**

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

MM.	P.A. RAVIART	Président
	A.Y. LEROUX	
	O. PIRONNEAU	Rapporteurs
	B. MERCIER	
	P. MORICE	
	J.C. NEDELEC	Examineurs

## Chapitre 4

Résolution numérique de l' équation du potentiel  
transsonique à l' aide d'une méthode d' éléments finis  
mixtes et d' un algorithme de point fixe .

### III - APPLICATION A UN PROBLEME D'AERODYNAMIQUE INTERNE

#### 1 - POSITION DU PROBLEME

Nous nous proposons d'appliquer la méthode décrite dans la partie I à un problème intérieur, et plus précisément à un écoulement transsonique dans une tuyère convergente-divergente. Tous les calculs ont été effectués sur le canal du GAMM de RIZZI-VIVIAND [43] décrit au chapitre 3, et proposé initialement par LAVAL [32].

#### a) Rappels monodimensionnels (cf. chapitre 1)

Dans une approximation quasi monodimensionnelle, la conservation du débit total le long de l'abscisse  $x$  s'écrit simplement :

$$(3.1) \quad \rho(x) u(x) A(x) \equiv D$$

où  $A(x)$  désigne l'aire de la tuyère à l'abscisse  $x$ . On en déduit de façon évidente la variation du flux de masse

$$(3.2) \quad q(x) = \rho(x) u(x)$$

le long du canal. Si de plus l'évolution est d'enthalpie totale constante et d'entropie imposée, la densité et le flux de masse sont reliés par

$$(3.3) \quad q = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho^2 - \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\gamma+1}}$$

obtenue en fixant dans (1.11) le nombre de Mach de référence  $M_0$  à 1 de sorte que tous les champs sont des grandeurs adimensionnelles qui satisfont

$$(3.4) \quad \rho = u = 1 \quad \text{si } q = 1 \quad (\text{état sonique})$$

comme l'illustre la figure 3.1.

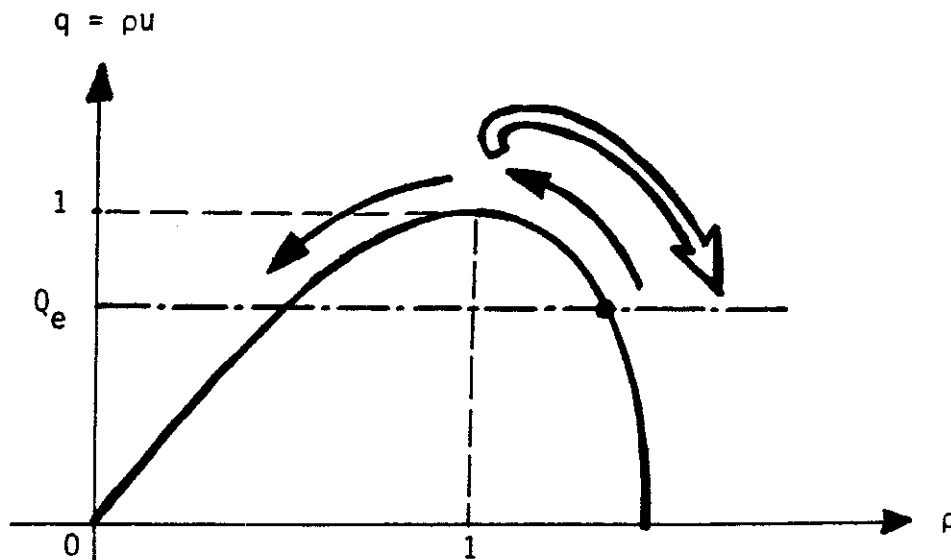


Figure 3.1 : Loi densité-flux de masse pour un écoulement isentropique isenthalpique

On a alors très simplement l'alternative suivante (cf. théorème de Hugoniot) :

- ou le flux de masse au col est strictement inférieur à 1 et l'écoulement est partout subsonique ( $\rho > 1$ ) ou partout supersonique ( $\rho < 1$ ).
- ou le flux de masse au col vaut exactement 1 et le débit est fixé (figure 3.2)

$$(3.5) \quad D = A_c$$

ainsi que le flux de masse à l'entrée de la tuyère

$$(3.6) \quad Q_e = \frac{A_c}{A_e}$$

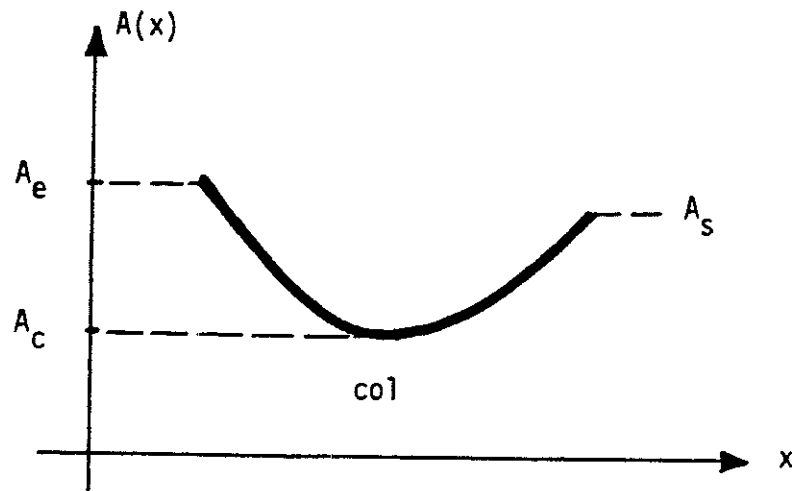


Figure 3.2 : Tuyère convergente-divergente

donc l'état physique d'entrée  $\rho_e$ , par résolution de l'équation (3.3) par rapport à  $\rho$ , avec comme donnée  $q = Q_e$ . Parmi les quatre régimes qui sont alors a priori possibles, deux sont physiquement intéressants, et sont obtenus en supposant l'écoulement subsonique à l'entrée. Le nombre de Mach est alors complètement défini, et vaut par exemple

$$(3.7) \quad M_e = 0.8499$$

pour le canal du GAMM (puisque  $A_0 = 2.073$  et  $A_c = 2.031$ ). Si l'écoulement est supersonique dans le divergent, on explore dans le plan de phase  $(\rho, q)$  la courbe de la figure 3.1 selon la flèche en trait simple, et le nombre de Mach en sortie est encore fixé par la géométrie ( $M_s = 1.1637$  pour le canal du GAMM), alors que si le fluide demeure subsonique dans le divergent (évolution représentée par la flèche en double trait sur la figure 3.1) la pression croît à nouveau après le col.

Pour le canal du GAMM, le rapport  $\Pi$  de la pression (statique) à la pression de vitesse nulle (pression génératrice) vaut dans ce dernier cas

$$(3.8) \quad \Pi = 0.623512$$

selon cette analyse.

Nous retiendrons de ces rappels élémentaires que lorsque le débit est maximal (on dit que la tuyère est bloquée, ou amorcée), l'écoulement sonique au col peut déboucher sur un écoulement subsonique ou un écoulement supersonique dans le divergent suivant la valeur de la pression en sortie.

#### b) Coefficient de débit

-----

Le problème bidimensionnel est bien entendu beaucoup plus complexe. La conservation de la masse (1.2) n'entraîne plus la simple relation algébrique (3.1), et dans la formule (3.3),  $q$  désigne seulement le module du flux de masse. Toutefois on peut majorer de façon simple le débit total.

#### PROPOSITION 3.1

*Les grandeurs physiques étant adimensionnalisées de sorte que la relation (3.4) soit satisfaite, le débit total maximal  $D_{\max}$  passant dans la tuyère est inférieur à la section du col :*

$$(3.9) \quad D_{\max} < A_c$$

### DEMONSTRATION

D'après (1.2), le débit n'est pas fonction de la surface le long de laquelle on intègre le champ  $\rho\vec{u}$  ; si on choisit la surface plane  $\Sigma$  définie par le col, on a  $D = \int_{\Sigma} \rho\vec{u} \cdot \vec{n} d\gamma$  et grâce à Cauchy-Schwarz et à (3.3), il vient :

$$|\rho\vec{u} \cdot \vec{n}| < q(\rho) < 1$$

$$\text{d'où } D < \int_{\Sigma} d\gamma \equiv A_c \quad \blacksquare$$

DEFINITION 3.1 (voir aussi CARRIERE [7])

Le coefficient de débit  $C_D$  est le rapport du débit maximal passant dans la tuyère à la section du col (avec l'adimensionnalisation choisie).

$$(3.10) \quad C_D = \frac{D_{\max}}{A_c} \quad .$$

Rappelons que ce coefficient est a priori inconnu et qu'en particulier le débit maximum est inconnu. Des méthodes de calcul approché de  $C_D$  ont été développées, pour lesquelles nous renvoyons à HALL [28], KLIEGEL-LEVINE [31], CUFFEL-BACK-MASSIER [11], DUTTON-ADDY [16].

### c) Conditions aux limites

---

Les conditions aux limites que l'on peut se donner pour l'étude d'une tuyère sont connues de façon semi-empirique. Suivant VIVIAND-VEUILLOT [48] par exemple, on peut prendre (figure 3.3) :

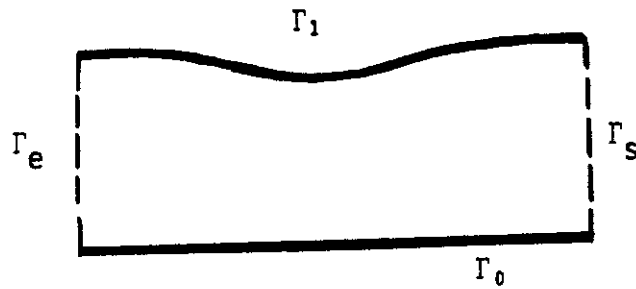


Figure 3.3 : Conditions aux limites

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sur } \Gamma_e \quad : \text{ direction de l'écoulement imposée} \\ \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_1 : \text{ condition de glissement} \\ \text{sur } \Gamma_s \quad : \text{ pression imposée (sortie subsonique), ou} \\ \quad \quad \quad \text{pas de condition (sortie supersonique).} \end{array} \right.$$

Ces conditions physiquement réalistes doivent être rapprochées des conditions (1.27) de notre algorithme de calcul :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi = \bar{\psi} \quad \text{sur } \Gamma_D \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = g \quad \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right.$$

Si l'on choisit  $\Gamma_D = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ , alors la condition (3.12) entraîne (3.11) sur cette portion de la frontière, mais la réciproque est fautive : une donnée de Dirichlet pour la fonction courant exige la connaissance du débit total  $D$  qui passe dans la tuyère :

$$(3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\psi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \bar{\psi} = D \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

Si on suppose l'écoulement normal à la face d'entrée (ce qui est raisonnable pour le canal du GAMM puisque la section est uniforme dans un voisinage de l'entrée comme de la sortie), alors les conditions (3.11) et (3.12) dégénèrent sur  $\Gamma_e \subset \Gamma_N$  :



$$(3.14) \quad g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e$$

Par contre, la condition sur la surface de sortie est de nature beaucoup plus complexe (non-linéaire) et s'avère difficile à réaliser exactement comme le signalent VIVIAND et VEUILLOT dans leur mémoire [48]. Mais elle est physiquement essentielle, et on attend que la donnée de la pression de sortie perturbe un écoulement bloqué sur toute une partie du divergent, comme le propose la théorie monodimensionnelle. Pour nos calculs, nous avons simplement choisi

$$(3.15) \quad g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s$$

ce qui est physiquement correct dans ce cas comme nous l'avons rappelé plus haut. Les conditions (3.13) à (3.15) définissent toute une famille de problèmes, paramétrée par le débit total  $D$  (alors que le paramètre naturel était le nombre de Mach  $M_\infty$  pour le problème extérieur).

#### d) Maillages

-----

Nous avons utilisé deux maillages pour nos calculs numériques, d'une part celui proposé pour le GAMM workshop ( $72 \times 21$  points) qu'on notera G41 car il comporte 41 points sur le profil (cf. figure 2 du chapitre 3), et d'autre part un maillage plus grossier (noté G21) de  $35 \times 11$  points, présenté figure 3.4.

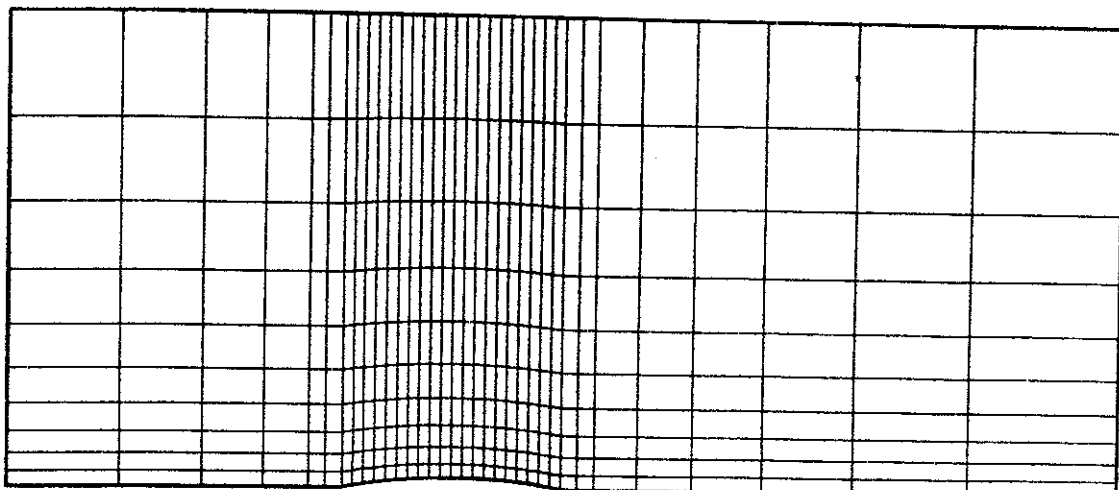
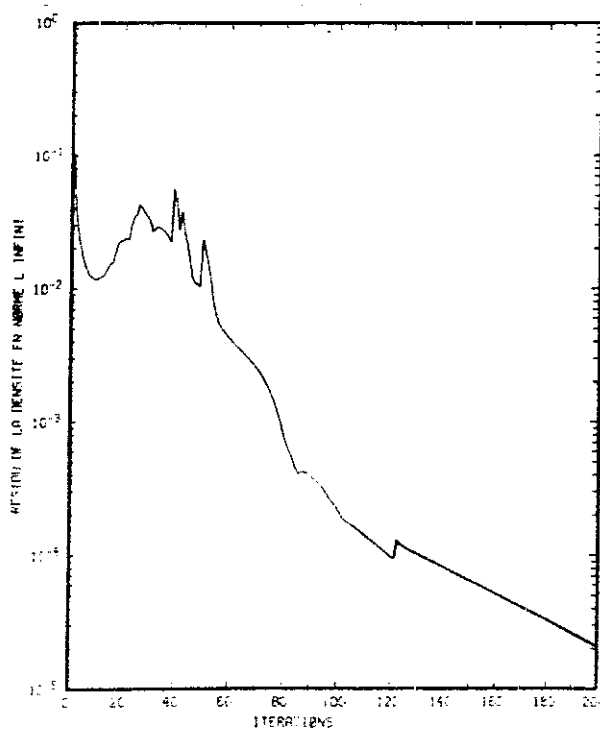
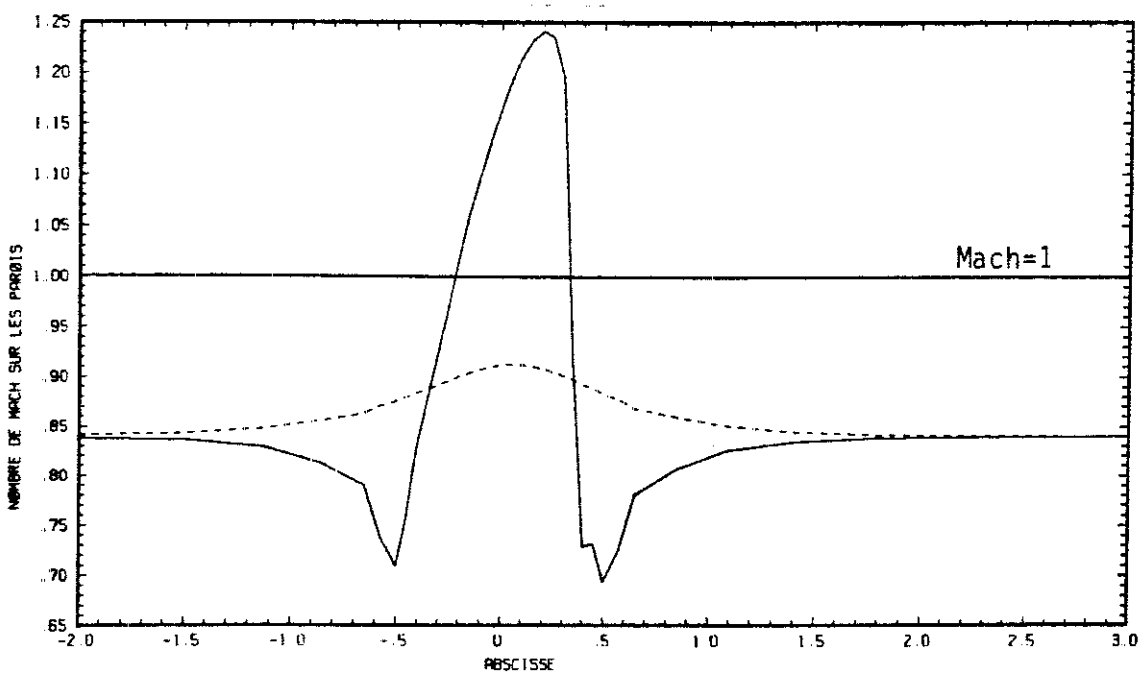
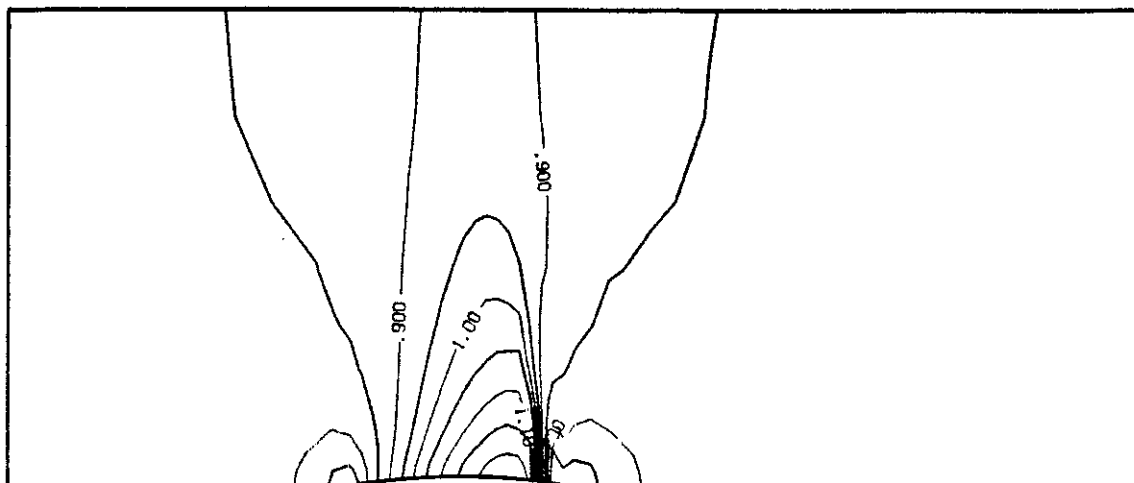


Figure 3.4 : Maillage G21 du canal du GAMM

## 2 - EXPERIENCES NUMERIQUES A L'AIDE DU MAILLAGE GROSSIER

Nous avons effectué une série d'expériences à l'aide du maillage G21, en faisant varier uniquement le débit total  $D$  (cf. équation (3.13)) entre deux tests. Tous les calculs présentés dans ce paragraphe ont convergé de façon tout à fait satisfaisante ; en effet, l'erreur relative pour les densités (relation (1.28)) a décru jusqu'à des valeurs arbitrairement petites ( $\epsilon = 10^{-4}$  ou moins, typiquement). Au fur et à mesure que le débit  $D$  augmente, la région du canal où l'écoulement est supersonique se développe ; de taille modérée au début ( $D = 2.$ ) puis de plus en plus importante ( $D = 2.01$  à  $D = 2.0293$ ). A partir d'une valeur critique (nous avons observé  $D = 2.0294$ ), le bulbe supersonique traverse tout le canal et, en particulier, le choc est présent sur toute une section de l'écoulement. Au delà ( $D$  supérieur à  $2.0295$ ), le choc disparaît de la solution convergée et laisse la place à un écoulement supersonique dans toute la section du canal qui suit le divergent.

Nous présentons sur les figures 3.5 à 3.7 les résultats détaillés (champ d'isovaleurs du nombre de Mach, courbes de Mach sur les parois inférieure et supérieure, courbes de convergence du résidu (1.28)) pour des valeurs du débit total où différents régimes caractéristiques ont été observés ( $D = 2.025$  ;  $D = 2.02945$  ;  $D = 2.0295$ ). Le tableau 3.8 regroupe l'ensemble des calculs effectués, et appelle plusieurs commentaires. Tout d'abord, aucun débit maximal  $D_{\max}$  n'est mis en évidence, puisque pour chacune des valeurs de  $D$ , le code a convergé. De plus, des valeurs de  $D$  supérieures à la valeur critique  $A_c$  (cf. Proposition 3.1) ont même été observées ! La raison est simple : le décentrage (1.25) introduit



**Figure 3.5**

Canal du GAMM (G21)

Débit = 2.025

- Isovaleurs du nombre de Mach (en haut)
- Nombre de Mach sur les parois (au milieu)
- Courbe de convergence (ci-contre)

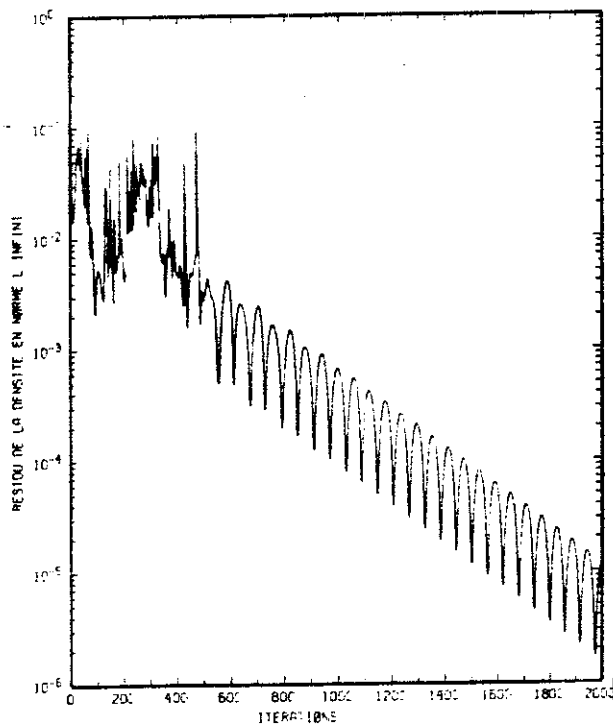
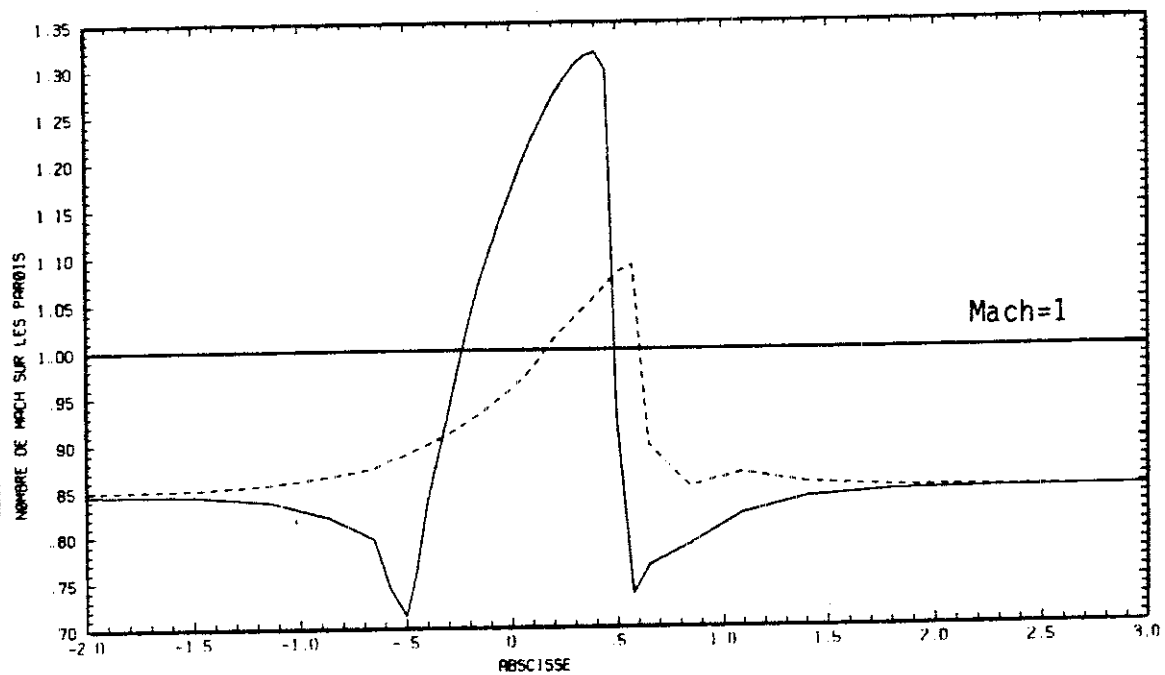
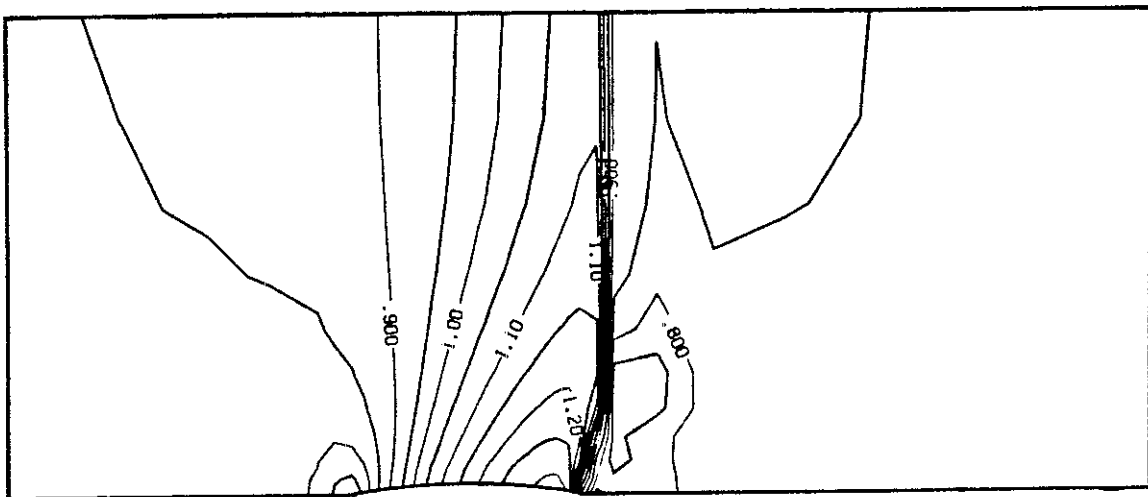
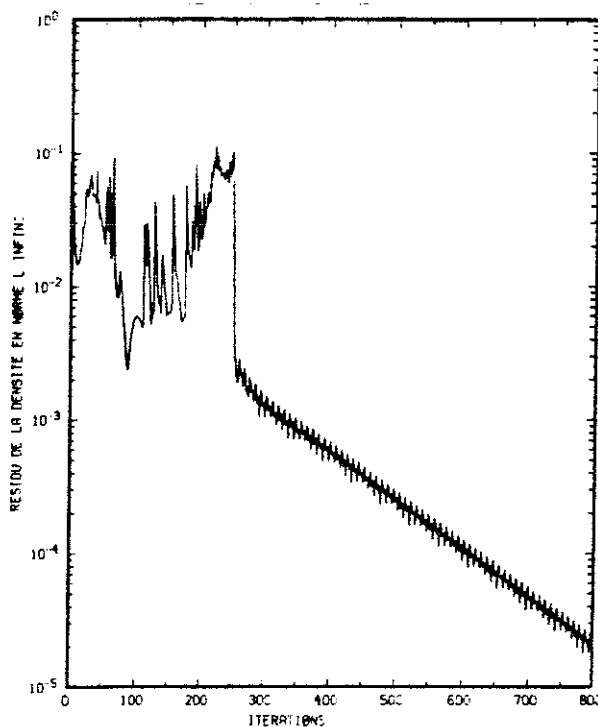
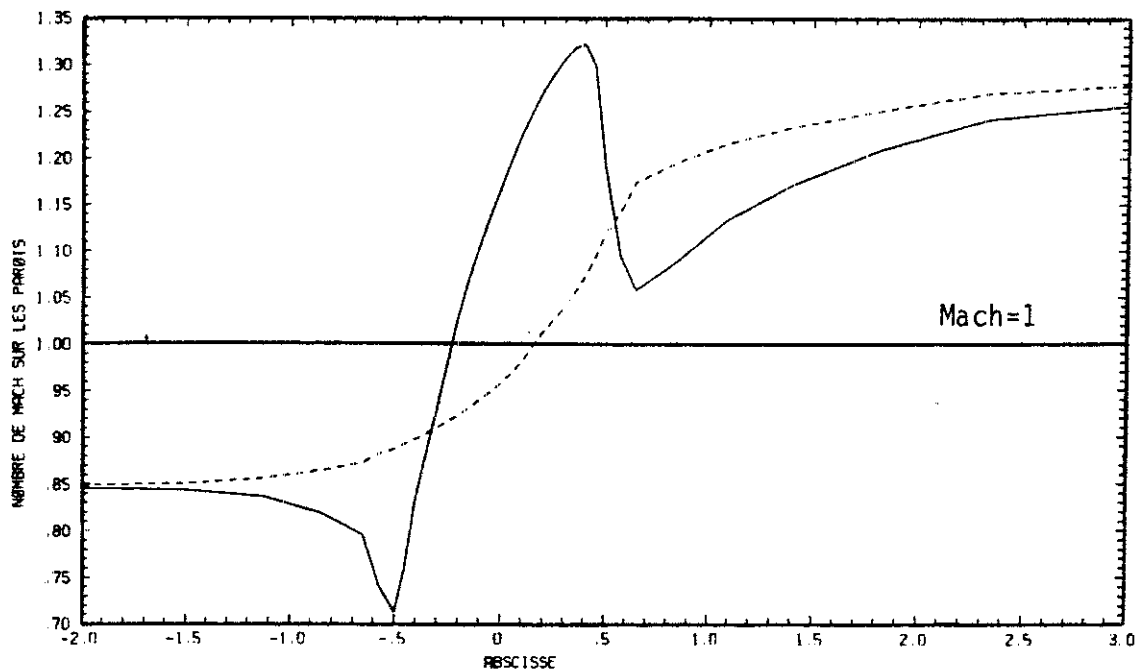
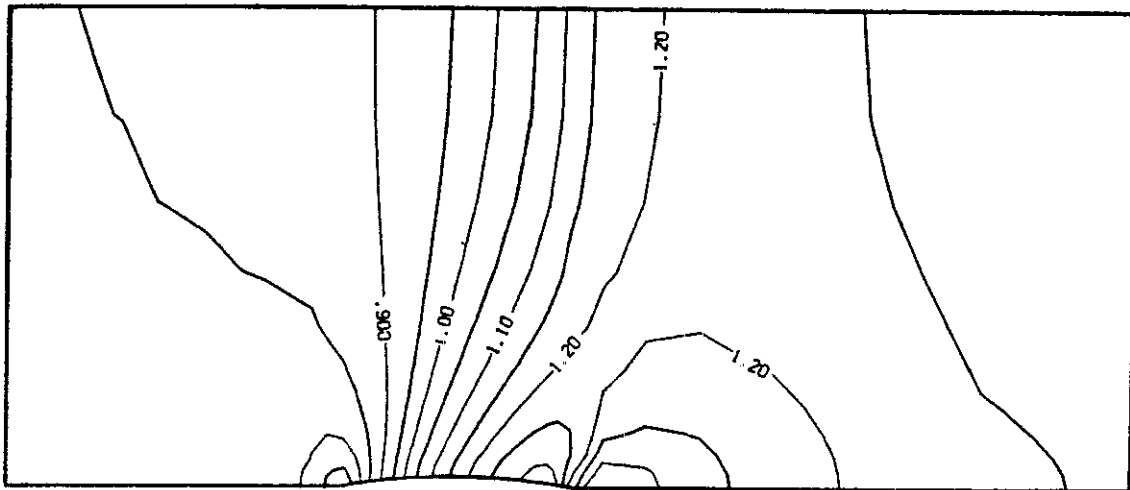


Figure 3.6

Canal du GAMM (G21)

Débit = 2.02945

- Isovaleurs du nombre de Mach (en haut)
- Nombre de Mach sur les parois (au milieu)
- Courbe de convergence (ci-contre)



**Figure 3.7**

Canal du GAMM (G21)

Débit = 2.0295

- Isovaleurs du nombre de Mach (en haut)
- Nombre de Mach sur les parois (au milieu)
- Courbe de convergence (ci-contre)

Débit	Minimum	Maximum	Remarques
	de $\Pi = \frac{\text{pression statique}}{\text{pression génératrice}}$ à la sortie du canal		
2,00000	0,6531	0,6533	choc très faible
2,01000	0,6445	0,6446	} la ligne sonique (M=1 ne traverse pas le canal
2,02000	0,6350	0,6351	
2,02500	0,6299	0,6300	
2,02700	0,6278	0,6279	
2,02900	0,6256	0,6258	
2,02930	0,6253	0,6254	
2,02940	0,6252	0,6254	} la ligne sonique et le choc traversent le canal
2,02945	0,6251	0,6252	
2,02950	0,3718	0,3829	} sortie supersonique
2,02960	0,3294	0,3469	
2,02970	0,3235	0,3421	
2,03000	0,3166	0,3347	
2,03100	0,3083	0,3255	
2,03200	0,3044	0,3255	

Figure 3.8 : Tuyère du GAMM. Maillage comportant 21 points sur le profil. Résultats numériques.

Débit	Minimum	↓	Maximum	Remarques
	de $\Pi = \frac{\text{pression statique}}{\text{pression génératrice}}$ à la sortie du canal			
2,0100	0,6444		0,6446	la ligne sonique ne traverse pas le canal
2,0200	0,6350		0,6351	
2,0250	Calcul non convergé	}	}	oscillations régulières du résidu
2,0260				
2,0270				
2,0273	}	}	}	oscillations chaotiques ou de grande amplitude du résidu
2,0274				
2,0277	0,2888		0,3253	] sortie supersonique
2,0278	0,2972		0,3252	
2,0280	Calcul non convergé. Le résidu se stabilise autour de $3 \cdot 10^{-3}$ , $6 \cdot 10^{-3}$ , $2 \cdot 10^{-2}$ respectivement	}		
2,0300				

Figure 3.9 : Tuyère du GAMM. Maillage comportant 41 points sur le profil. Résultats numériques.

une erreur dans la loi (1.11) qui traduit le théorème de Bernoulli et l'isentropie de l'écoulement, donc la relation (3.3) n'est vérifiée que de façon approchée. Ainsi, le nombre de Mach de sortie  $M_s = 1.16$  prévu par l'étude monodimensionnelle pour les écoulements à sortie supersonique est largement dépassé (pour  $D = 2.031$  par exemple, on a observé une pression  $\Pi$  de l'ordre de 0.3, qui correspond à un nombre de Mach de 1.43). Les résultats du tableau 3.8 sont donc quantitativement inexacts, puisque liés à l'utilisation du maillage grossier G21. Mais ces mêmes résultats sont qualitativement très corrects puisqu'une transition précisée apparaît entre les écoulements à sortie subsonique et ceux à sortie supersonique ; dans ce dernier cas, toute la zone supersonique est capturée par le code (malgré une initialisation toujours choisie à  $M_{init} \equiv 0.85$ ), ceci sans créer d'instabilité numérique particulière.

### 3 - EXPERIENCES NUMERIQUES A L'AIDE DU MAILLAGE FIN

#### a) Présentation des résultats

Comme au paragraphe 2, nous avons effectué plusieurs expériences en faisant seulement varier le débit total  $D$  de la condition de Dirichlet (3.13). Les résultats (tableau 3.9 pour un aperçu global) font apparaître quatre régions où le comportement du code numérique diffère notablement. Dans une première phase (jusqu'à  $D = 2.02$ ) le canal devient transsonique et le bulbe supersonique est de taille modérée ; sur la figure 3.10, nous avons comparé les écoulements calculés



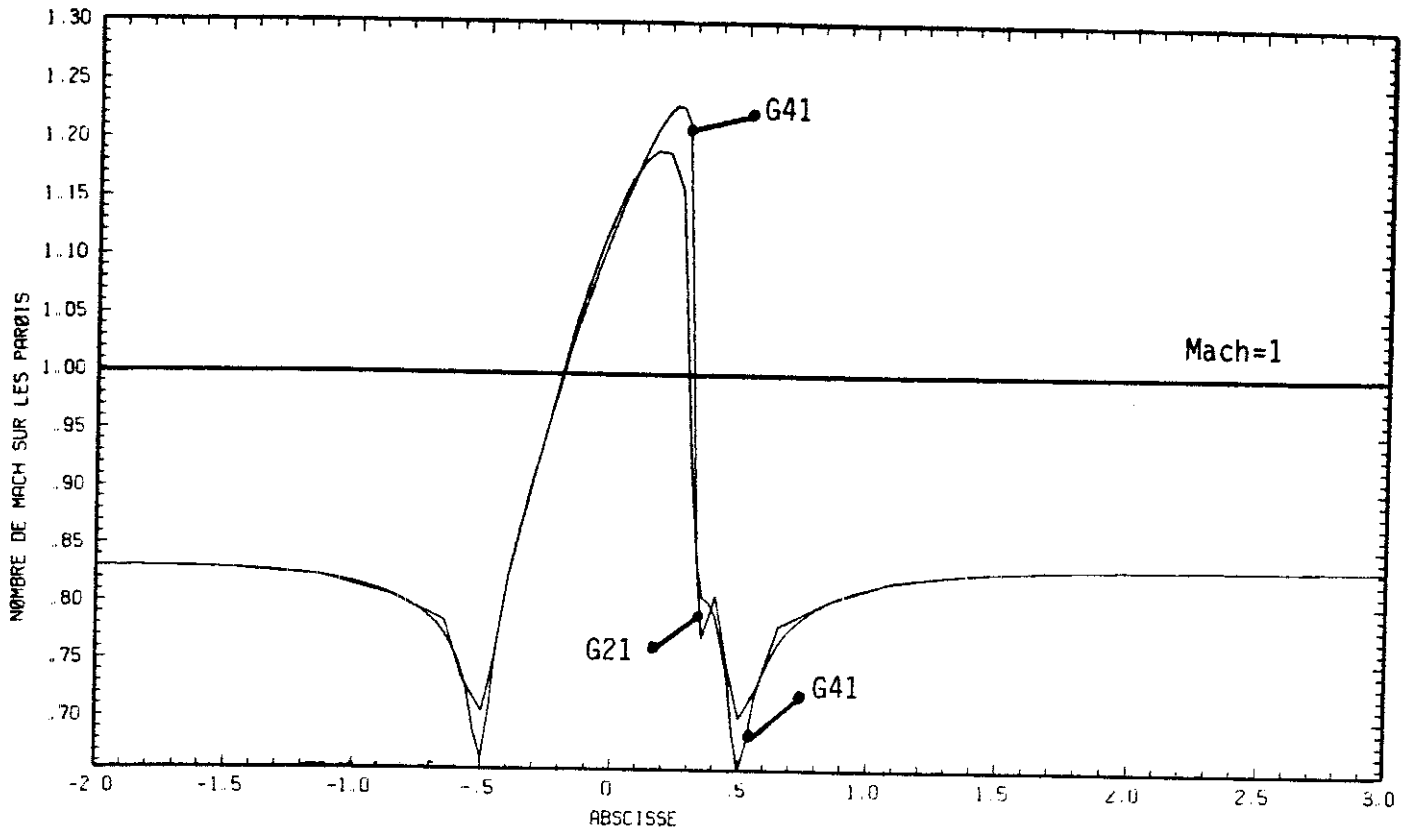


Figure 3.10 : Canal du GAMM, Débit = 2.02.

Comparaison des courbes de Mach sur la paroi inférieure de la tuyère pour les maillages G21 et G41.

grâce aux maillages G21 et G41 pour un débit  $D = 2.02$ . Dans un deuxième temps ( $D = 2.025$  à  $D = 2.073$ ), le code ne converge pas (sans toutefois diverger) : le résidu défini par (1.28) oscille, d'abord avec une période bien définie (de 40 à 50 itérations pour les débits  $D = 2.025$  et  $D = 2.026$ ), puis de façon assez chaotique ( $D = 2.027$ ) et enfin avec une période extrêmement longue ( $D = 2.0273$ ). La figure 3.11 illustre ce comportement. Rappelons que les 1000 itérations effectuées représentent un coût-calcul non négligeable puisque à chaque itération, nous avons à résoudre un système linéaire (symétri-

que, défini-positif) d'ordre 1512. Une étude plus détaillée de cet exemple montre que l'écoulement calculé par le code "oscille" entre deux régimes, l'un avec une sortie supersonique (après 200 et 700 itérations typiquement) et l'autre avec un choc fort barrant tout le canal et une sortie supersonique (après 500 et 1000 itérations) ; ces deux écoulements sont présentés figures 3.12 et 3.13. Un troisième ensemble de valeurs du débit apparaît ensuite ( $D = 2.0274$  à  $D = 2.0277$ ) avec convergence vers une solution supersonique en sortie (voir les figures 3.14 et 3.15).

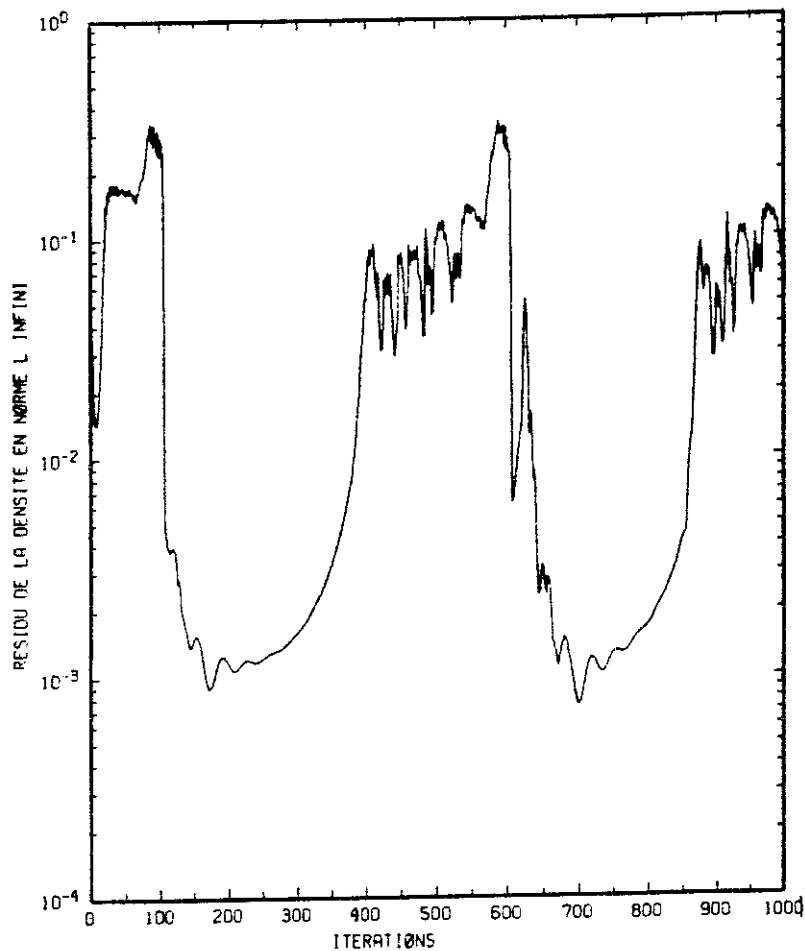


Figure 3.11 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0273.  
Variation du résidu.

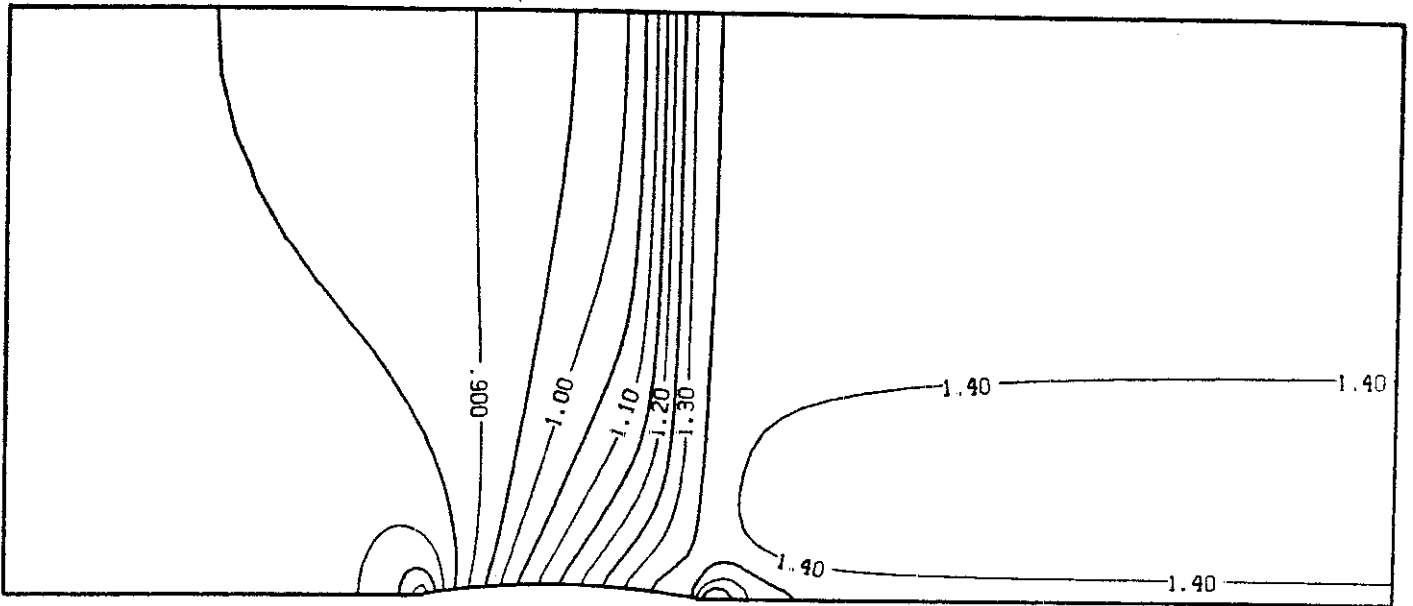


Figure 3.12 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0273.  
 Allure des isovaleurs du nombre de Mach  
 après 200 itérations non-linéaires.

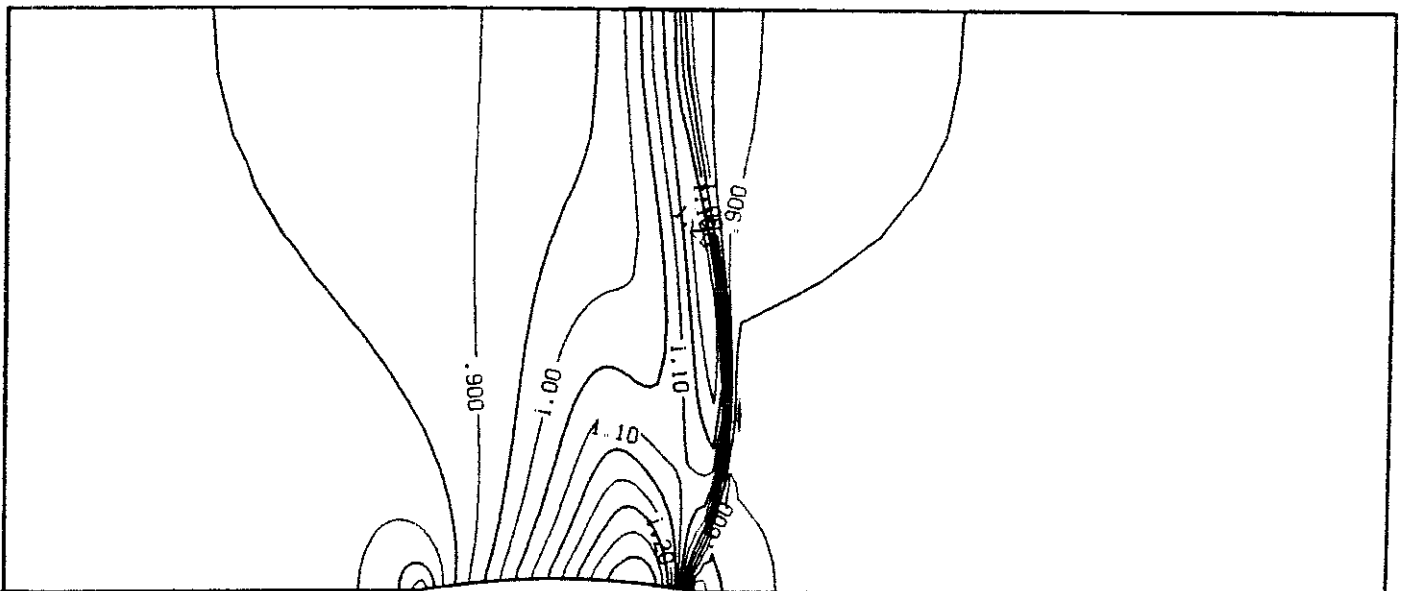


Figure 3.13 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0273.  
 Allure des isovaleurs du nombre de Mach  
 après 1000 itérations non-linéaires.

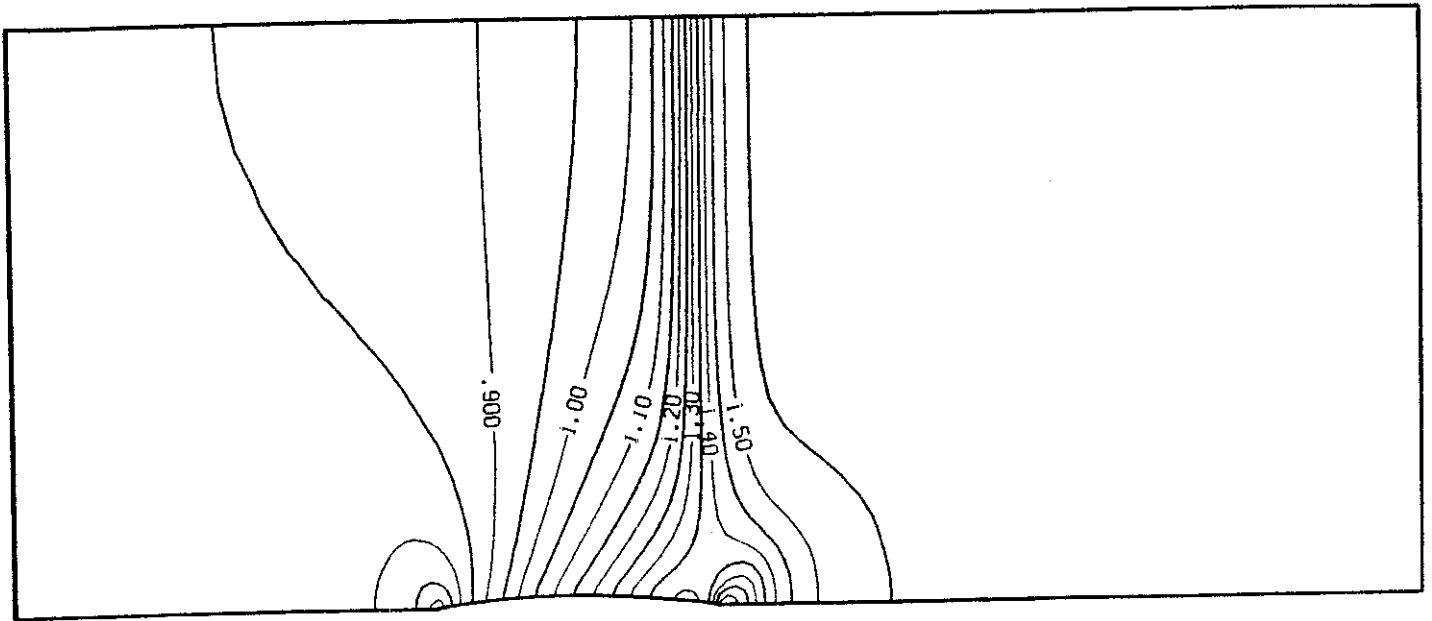


Figure 3.14 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0274.  
Isovaleurs du nombre de Mach.

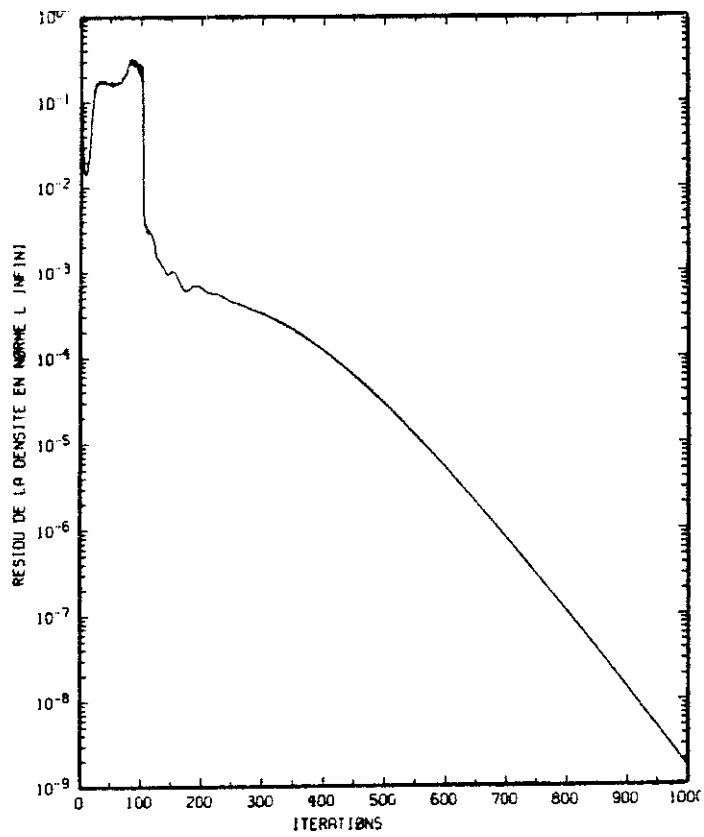


Figure 3.15 : Canal du GAMM (G41), Débit = 2.0274.  
Courbe de convergence.

Enfin, pour des débits supérieurs à 2.0278, le code ne converge plus, bien que l'écoulement observé soit comparable à celui de la figure 3.14, et le résidu oscille autour d'une valeur de plus en plus grande au fur et à mesure que  $D$  croît (figure 3.16).

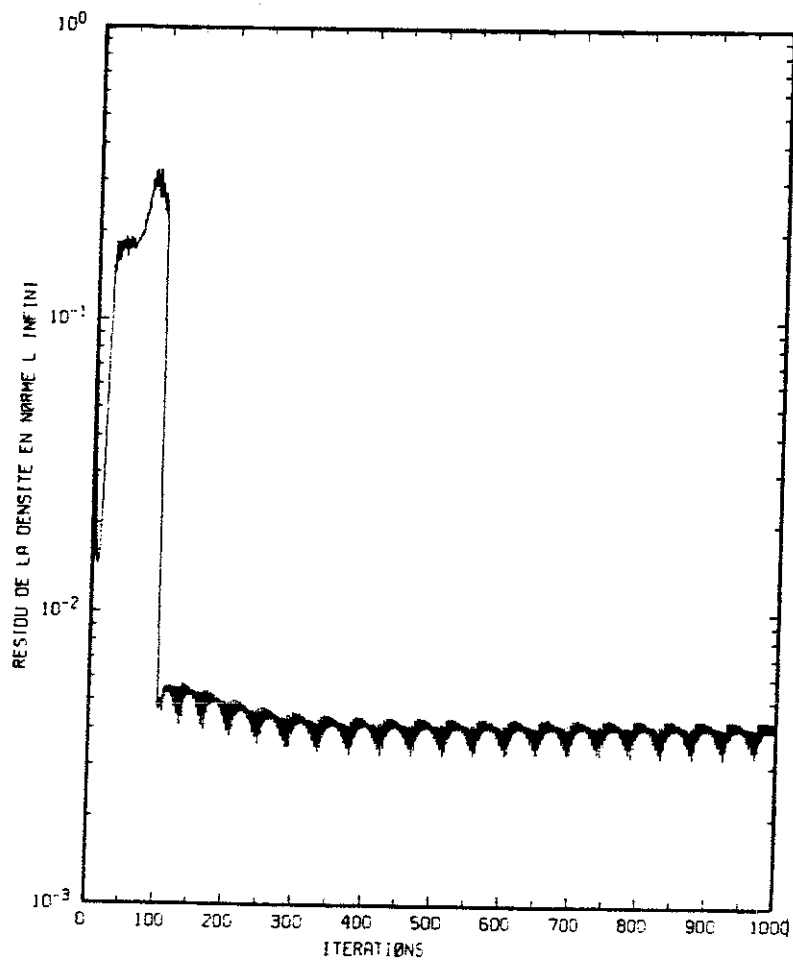


Figure 3.16 : Canal du GAMM, Débit = 2.0278.  
Variation du résidu (1.28).

b) Discussion et comparaison des calculs effectués sur les maillages  
-----  
G21 et G41  
-----

Les résultats dus au maillage le plus fin, présentés au paragraphe précédent, paraissent moins encourageants que ceux obtenus avec le maillage plus grossier. En effet, le code n'a pas convergé (après au plus 1000 itérations de l'algorithme de point fixe) dans deux plages de valeurs du débit  $D$ .

Pour  $D$  assez grand ( $D \geq 2.0278$ ), nous pensons que le blocage du canal est atteint, c'est-à-dire qu'une valeur maximale numérique du débit est atteinte (valeur au delà de laquelle le système discret d'équations à résoudre n'a plus de solution). Cette valeur (2.0278) est compatible avec la valeur maximale théorique (cf. Proposition 3.1), puisque l'inéquation (3.9) est satisfaite. Avec le maillage G21, cette valeur limite a aussi été observée, mais pour une valeur  $D = 2.07$  qui contredit le critère (3.9). Le raffinement du maillage a donc permis une approximation physiquement plus réaliste du coefficient de débit.

L'intervalle de débit  $[2.025, 2.0273]$  où le code ne converge pas pour le maillage G41 est plus délicat à interpréter. Il est clair que l'algorithme de point fixe est de moins en moins efficace au fur et à mesure que le maillage est raffiné, comme on l'a vu pour l'aile NACA 0012 aux figures 2.13 et 2.20, et lors du calcul à  $M_\infty = 0.85$  sur le maillage le plus fin (où l'algorithme du I.5 n'a pas convergé). Pour les régimes transsoniques complexes de la tuyère du GAMM comme pour les chocs forts autour d'un profil NACA, raffiner le maillage ne permet plus à l'algorithme de point fixe d'être contractant, bien qu'il ne diverge pas.

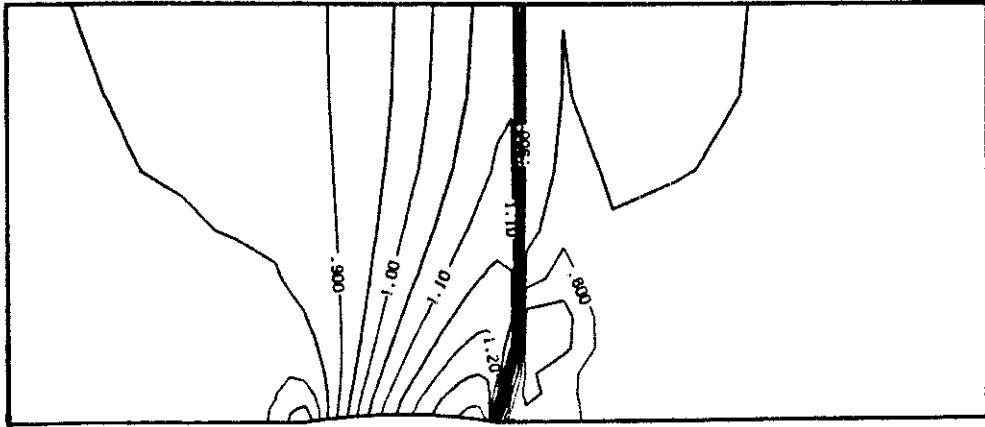


Figure 3.6 : Maillage G21, Débit = 2.02945.  
Isovaleurs du nombre de Mach.

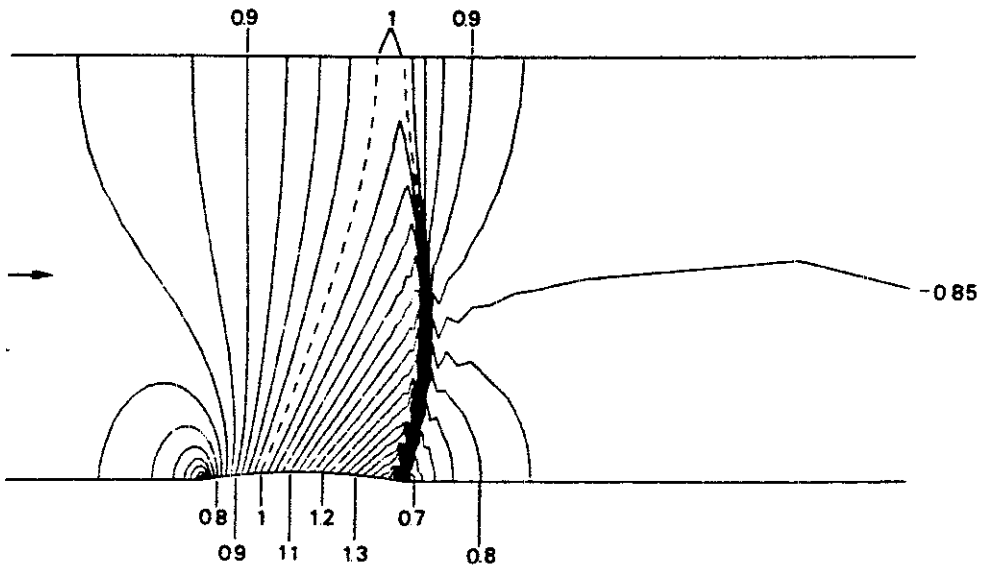


Figure 3.17 - Iso-Mach lines for channel flow. Potential solution (ref 43)

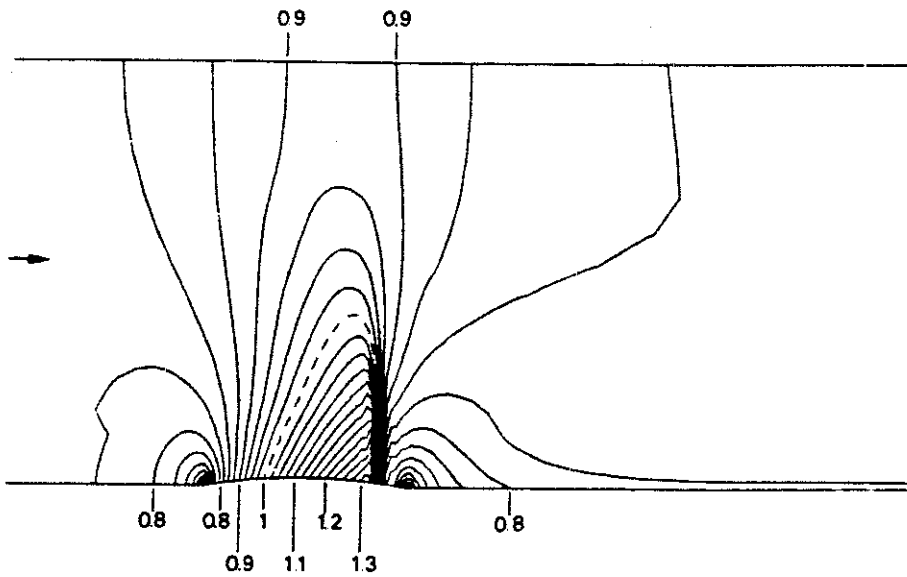


Figure 3.18 - Iso-Mach lines for channel flow. Euler solution. (ref 43)

Mais le calcul sur le maillage G41 pour un débit  $D = 2.0273$  laisse aussi supposer que le système discret d'équations a plusieurs solutions (figures 3.12 et 3.13) comme la théorie monodimensionnelle le prévoit, et que ce sont les conditions aux limites numériques qu'il conviendrait de modifier afin de mieux prendre en compte les conditions aux limites physiques (3.11).

Enfin, la comparaison des résultats des deux maillages montre que les valeurs du débit où apparaît un écoulement avec une ligne sonique qui traverse tout le canal sont différentes [2.0294 pour G21 ; entre 2.025 et 2.073 pour G41] comme l'imprécision sur le débit maximal le laissait prévoir. Mais les résultats obtenus sur le maillage G21 pour un débit  $D = 2.02945$  (figure 3.6) sont très intéressants, et peuvent être comparés à ceux de VEUILLOT-VIVIAND présentés dans [43] sur ce même cas test avec une modélisation potentielle du fluide (figure 3.17) : dans les deux cas, l'équation du potentiel transsonique fournit un écoulement avec un choc qui barre tout le canal, alors qu'un code Euler ne fait apparaître qu'une zone supersonique modérée (figure 3.18, due aux mêmes auteurs).



#### IV - CONCLUSION

La méthode de résolution du modèle transsonique potentiel présentée dans ce chapitre est fondée sur une formulation mixte vitesse-fonction courant des équations aux dérivées partielles du problème et sur un traitement de la non-linéarité à l'aide d'un décentrage de la densité associé à un algorithme de point fixe.

Les tests effectués sur le problème extérieur (partie II) nous ont permis de sélectionner avec précision un décentrage qui stabilise l'algorithme, et de valider notre code, puisque les résultats sont comparables à ceux d'AMARA [1] avec une méthode analogue.

Pour l'étude du problème intérieur, la difficulté provient du choix des conditions aux limites, pour la fonction courant en particulier. Nous avons fixé le débit dans chacune de nos expériences numériques, afin d'étudier les performances de l'algorithme lorsqu'on fixe les conditions aux limites numériques. Les résultats (sur le canal du GAMM) font apparaître une forte dépendance vis à vis du maillage. Toutefois, les deux régimes qui caractérisent une tuyère amorcée (choc fort avec sortie subsonique ou écoulement régulier avec sortie supersonique) ont été observés.

Dans le cas de l'aérodynamique externe comme celui de l'aérodynamique interne, la convergence du code a été défailante pour certains cas tests sur les maillages les plus fins. L'algorithme de point fixe semble avoir atteint ses limites et une méthode de type

multigrille devrait s'avérer plus robuste. Pour l'étude des tuyères, le décentrage de la densité induit une erreur sur la conservation de l'enthalpie totale, et fournit des solutions supersoniques dans tout le divergent où le nombre de Mach paraît trop élevé par rapport à l'approximation monodimensionnelle.

Rappelons que la méthode proposée conduit à la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif à chaque itération, pour lequel les méthodes de gradient conjugué préconditionné sont très efficaces (Chapitre 3), mais le couplage induit entre les coefficients de la matrice (équation (1.10)) et le traitement de la non-linéarité (équations (1.11) et (1.25)) est très complexe et n'est pas encore, à notre connaissance, analysé de façon satisfaisante. Aussi, nous proposons au Chapitre 7, d'utiliser un algorithme de Newton pour résoudre le problème transsonique en formulation mixte vitesse-fonction courant.

## REFERENCES DU CHAPITRE 4

- [1] AMARA M., *Analyse de Méthodes d'Eléments Finis pour des Ecoulements Transsoniques*, Thèse d'Etat, Université Paris 6, 1983.
- [2] AMARA M., JOLY P., THOMAS J.M., *A Mixed Finite Element Method for Solving Transonic Flow Equations*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 39, pp 1-18, 1983.
- [3] BAUER F., GARABEDIAN P., KORN D., JAMESON A., *Supercritical Wing Sections I, II, III*. *Lect. Notes Econ. Math. Syst.* n° 66, 108, 150, Springer Verlag, Berlin, 1972, 1975, 1977.
- [4] BRANDT A., *Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems*, *Math. of Comp.*, vol 31, n° 138, pp 333-390, 1977.
- [5] BREDIF M., *A Fast Finite Element Method for Transonic Potential Flow Calculations*, AIAA Paper 83-0507, 1983.
- [6] BRISTEAU M.O., PIRONNEAU O., GLOWINSKI R., PERIAUX J., PERRIER P., POIRIER G., *On the numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Methods (II). Application to Transonic Flow Simulations*, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, vol 51, pp 363-394, 1985.
- [7] CARRIERE P., *Aérodynamique interne des réacteurs*, Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, 1975-1980.
- [8] CIARLET P.G., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] CIAVALDINI J.F., *Analyse Numérique des Ecoulements Compressibles autour d'un Profil placé en Atmosphère Infinie*, Thèse d'Etat, Université de Rennes 1, 1980.
- [10] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [11] CUFFEL R., BACK L., MASSIER P., *Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature*, AIAA J, vol 7, pp 1364-1366, 1969.
- [12] DECONINCK H., HIRSCH C., *A Multigrid Method for the Transonic Full Potential Equation Discretized with Finite Elements on an Arbitrary Mesh*, *J of Comp. Phys.*, vol 48, pp 344-365, 1982.

- [13] DUBOIS F., *Calcul d'écoulements transsoniques dans des tuyères par une méthode d'éléments finis mixtes*, Actes du 18<sup>e</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, Puy St Vincent, 1985.
- [14] DUPUY J.M., *Écoulements Transsoniques Potentiels Tridimensionnels*, Rapport du contrat DRET 81/228, Annexe 2, 1985.
- [15] DUPUY J.M., *Résolution Numérique des Equations d'Écoulements Compressibles Transsoniques Tridimensionnels Stationnaires*, Rapport du contrat DRET 83/434, 1986.
- [16] DUTTON J., ADDY A., *Transonic Flow in the Throat Region of Axisymmetric Nozzles*, AIAA J., vol 19, pp 801-804, 1981.
- [17] EBERLE A., *Eine Method Finiter Elemente Berechnung der Transsonicken Potential-Strömung um Profile*, Messerschmitt-Bölkow-Blohm 1352(0), 1977.
- [18] EMMONS H.W., *The Numerical Solution of Compressible Flow Problems*, NACA TN 932, 1944.
- [19] EMMONS H.W., *The Theoretical Flow of a Frictionless Adiabatic Perfect Gas Inside a Two-Dimensional Hyperbolic Nozzle*, NACA TN 1003, 1946.
- [20] ENGQUIST B., OSHER S., *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations*, Math. of Comp., vol 34, n° 149, pp 45-75, 1980.
- [21] ENGQUIST B., OSHER S., *One-Sided Difference Approximations for Non-linear Conservation Laws*, Math. of Comp., vol 36, n° 154, pp 321-351, 1981.
- [22] FEISTAUER M., NEČAS J., *On the solvability of Transonic Potential Flow Calculations*, Z. für Analysis und ihre Anwendungen, vol 4, n° 4, pp 305-329, 1985.
- [23] FINN R., GILBARG D., *Asymptotic Behaviour and Uniqueness of Plane Subsonic Flows*, Comm. Pure Appl. Math. vol 10, pp 23-63, 1957.
- [24] GIRAULT V., RAVIART P.A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [25] HABASHI W.G. (editor), *Advances in Computational Transonics*, Pineridge Press, Swansea, UK, 1985.
- [26] HAFEZ M., LOVELL D., *Numerical Solution of Transonic Stream Function Equation*, AIAA J., vol 21, pp 327-335, 1983.
- [27] HAFEZ M., SOUTH J., MURMAN E., *Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equation*, AIAA J., vol 17, pp 838-844, 1979.

- [28] HALL I.M., *Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially Symmetric Nozzles*, Quart J. of Mech. and Appl. Math., vol 15, pp 487-508, 1962.
- [29] HOLST T.L., *Implicit Algorithm for the Conservative Transonic Full Potential Equation Using an Arbitrary Mesh*, AIAA J., vol 17, pp 1038-1045, 1979.
- [30] JAMESON A., *Iterative Solution of Transonic Flows over Airfoils and Wings Including Flows at Mach 1*, Comm. Pure Appl. Math., vol 27, pp 283-309, 1974.
- [31] KLIEGEL J., LEVINE J., *Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles*, AIAA J., vol 7, pp 1375-1378, 1969.
- [32] LAVAL P., *Méthodes instationnaires de calcul des effets d'interaction de paroi en écoulement bidimensionnel supercritique*, la Recherche Aérospatiale, n° 1973-5, pp 275-288, 1973.
- [33] LAX P.D., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM Regional Conference Series in Appl. Math. n° 11, Philadelphia, 1973.
- [34] LUDFORD G.S.S., *The behaviour at infinity of the potential function of two-dimensional subsonic compressible flow*, Journal of Math. and Physics, vol 30, pp 117-130, 1951.
- [35] MORAWETZ C.S., *On the Non-Existence of Continuous Transonic Flows Past Profiles I, II, III*, Comm. Pure Appl. Math., vol 9, pp 45-68, 1956 ; vol 10, pp 107-131, 1957 ; vol 11, pp 129-144, 1958.
- [36] MORAWETZ C.S., *On a Weak Solution for Transonic Flow Problem*, Comm. Pure Appl. Math., vol 38, pp 797-818, 1985.
- [37] MORICE P., *Finite Element Approximation of a Variational Principle for Perfect Fluid Flows with Free Boundaries*, Proceedings of the 3° GAMM Conf. on Num. Meth. in Fluid Mechanics, Notes on Num. Fluid Mech., vol 2, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1979.
- [38] MORICE P., CAMBIER L., VEUILLOT J.P., *Numerical Computation of Transonic Flow past an Axisymmetric Nacelle*, TP ONERA 1984-91, 1984.
- [39] MURMAN E.M., COLE J.D., *Calculation of Plane Steady Transonic Flows*, AIAA J., vol 9, pp 114-121, 1971.
- [40] MURMAN E.M., *Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods*, AIAA J., vol 12, pp 626-633, 1974.

- [41] OSHER S., HAFEZ M., WHITLOW W., *Entropy Condition Satisfying Approximations for the Full Potential Equation of Transonic Flow*, Math. of Comp., vol 44, n° 169, pp 1-29, 1985.
- [42] PERRONNET A., *Méfisto Maillage Manuel d'Utilisation*, Lab. d'Analyse Numérique, Univ. Paris 6, 1983.
- [43] RIZZI A., VIVIAND H. (eds), *Numerical Methods for the Computation of Inviscid Transonic Flows with Shock Waves*, Notes on Num. Fluid Mech, vol 3, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1981.
- [44] SELLS C.C.L., *Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil*, Proc. Roy Soc. A, vol 308, pp 377-401, 1968.
- [45] SHIFFMAN M., *On the Existence of Subsonic Flows of a Compressible Fluid*, J. Rat Mech Anal, vol 1, pp 605-652, 1952.
- [46] SMOLLER J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [47] STEINHOFF J., JAMESON A., *Multiple Solutions of the Transonic Potential Flow Equation*, AIAA J., vol 20, pp 1521-1525, 1982.
- [48] VIVIAND H., VEUILLOT J.P., *Méthodes Pseudo-instationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques*, Rapport ONERA 1978-4, 1978.
- [49] WONG Y., HAFEZ M., *Conjugate Gradient Methods Applied to Transonic Finite Difference and Finite Element Calculations*, AIAA J, vol 20, pp 1526-1533, 1982.
- [50] ZIENKIEWICZ O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw Hill, Londres, 1971.