

THESE

présentée à
l'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6
spécialité **Mathématiques Appliquées**

par **François DUBOIS**

Sujet de la Thèse :

**QUELQUES PROBLEMES LIES AU CALCUL
D'ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS
DANS LES TUYERES.**

Soutenue le 5 janvier 1988 devant le jury composé de

MM.	P.A. RAVIART	Président
	A.Y. LEROUX	
	O. PIRONNEAU	Rapporteurs
	B. MERCIER	
	P. MORICE	
	J.C. NEDELEC	Examineurs

Chapitre 4

Résolution numérique de l' équation du potentiel
transsonique à l' aide d'une méthode d' éléments finis
mixtes et d' un algorithme de point fixe .

L'étude qui suit est la continuation directe d'une partie du travail entrepris par AMARA [1] (voir aussi AMARA-JOLY-THOMAS [2]). Elle est fondée sur une formulation mixte en vitesse-fonction courant du modèle transsonique des grandes perturbations (Full Potential Equation). L'utilisation d'une fonction courant pour l'étude numérique des écoulements transsoniques est fort ancienne, puisque dès 1944, EMMONS l'utilisait ([18],[19]), associée à une méthode de relaxation (voir l'article de SOUTH dans le livre édité par HABASHI [25]). Pourtant, l'impossibilité de formuler le problème complet par rapport à la seule fonction courant, (implicite dans la méthode de l'hodographe, voir COURANT-FRIEDRICHS [10]) limitait classiquement cette méthode aux écoulements partout subsoniques (voir par exemple SELLS [44], MORICE [37], ou CIAVALDINI [9]). Les algorithmes proposés par HAFEZ-LOVELL [26] et la méthode mixte d'AMARA [1] ont permis de réviser ce point de vue (voir aussi MORICE-CAMBIER-VEUILLOT [38]).

Nous rappelons dans une première partie la discrétisation par éléments finis mixtes du problème ; nous détaillons notamment différents calculs de la densité décentrée. Dans la seconde partie, nous avons testé ces différentes propositions dans le cas d'un problème d'aérodynamique externe (aile NACA 0012 non-portante) déjà étudié par AMARA [1]. Nous sélectionnons ainsi un algorithme de calcul qui s'avère stable par raffinement du maillage. Au cours de la troisième partie, nous appliquons la méthode à un problème d'aérodynamique interne (canal du GAMM, proposé par RIZZI-VIVIAND [43]) pour lequel des résultats partiels ont été présentés ([13]). La difficulté essentielle est l'inadéquation partielle

des conditions aux limites numériques imposées par notre algorithme aux conditions aux limites physiques du problème. Toutefois, une série de tests nous a permis de calculer différents régimes caractéristiques d'une tuyère amorcée.

I - DESCRIPTION DE LA METHODE NUMERIQUE

Nous rappelons dans ce paragraphe la méthode de résolution de l'équation du potentiel transsonique (FPE) proposée initialement par AMARA [1]. A partir d'une formulation mixte par rapport à la vitesse et à la fonction courant, la non-linéarité du problème est traitée par l'introduction d'une densité décentrée. Nous détaillons quatre façons de faire ce calcul, toujours explicite, donc facile à implémenter et rapide lors de l'exécution du code numérique. Enfin, nous présentons l'algorithme global de résolution, de type point fixe, où chaque étape nécessite la résolution d'un système linéaire symétrique défini positif ayant pour inconnue la seule fonction courant.

1 - FORMULATION MIXTE

Dans toute la suite du chapitre, le domaine d'étude Ω , ouvert borné de \mathbb{R}^2 , est supposé maillé par des quadrangles, et on désigne par \mathcal{T}_h le maillage obtenu. L'adaptation au cas des triangles est facile. La densité ρ et la vitesse \vec{u} sont interpolées par des fonctions constantes dans chaque quadrangle K (élément fini Q_0), alors que la fonction courant ψ est supposée biaffine dans chaque élément et continue aux interfaces (interpolation Q_1). Les degrés de liberté des variables densité et vitesse sont donc liés aux éléments alors que ceux de la fonction courant sont attachés aux sommets du maillage \mathcal{T}_h .

Par ailleurs, la frontière Γ du domaine Ω est décomposée sous la forme :

$$(1.1) \quad \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad .$$

La portion Γ_D correspond à une donnée à la limite de type Dirichlet pour la fonction courant, alors que Γ_N suppose la vitesse tangentielle donnée sur le bord, comme on le verra plus loin. On remarque que dans l'étude faite au chapitre 3, on avait choisi $\Gamma_D \equiv \Gamma$.

L'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$, nulles sur Γ_D , biaffines dans chaque élément K , est noté Q_1^h , et celui des fonctions (discontinues) constantes par élément est noté Q_0^h . L'espace des conditions aux limites de Dirichlet associées à Γ_D est appelé \bar{Q}_1^D ; un élément de \bar{Q}_1^D est une fonction continue biaffine dans chaque élément, nulle sur les sommets de \mathcal{T}_h qui n'appartiennent pas à Γ_D , et est donc défini par ses valeurs aux sommets de Γ_D . L'espace analogue pour Γ_N est appelé \bar{Q}_0^N ; ses éléments sont définis par des scalaires le long des différentes arêtes de Γ_N . On renvoie à ZIENKIEWICZ [50] et CIARLET [8] pour les détails concernant la méthode des éléments finis.

Les équations aux dérivées partielles concernent la conservation de la masse et l'irrotationnalité de l'écoulement. La loi de conservation de la masse

$$(1.2) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0$$

peut se réécrire grâce à une fonction courant ψ (cf. GIRAULT-RAVIART [24] par exemple) :

$$(1.3) \quad \rho \vec{u} - \text{rot} \psi = 0$$

avec $\text{rot} \psi$ égal à la projection sur \mathbb{R}^2 du vecteur $\text{rot}_{\mathbb{R}^3}(\psi \vec{k})$, c'est-à-dire $\text{rot} \psi \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix}$. L'équation (1.3) est intégrée sur Ω , après multiplication par un vecteur arbitraire \vec{v} de $Q_0^h \times Q_0^h$:

$$(1.4) \quad \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{rot} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \quad , \quad \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h .$$

Par ailleurs, la nullité du tourbillon :

$$(1.5) \quad \text{rot} \vec{u} = 0$$

(où $\text{rot} \vec{u}$ est ici la composante sur \vec{k} du rotationnel du champ \vec{u} dans \mathbb{R}^3 , i.e. $\text{rot} \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$) est multipliée par $\varphi \in Q_1^h$ et intégrée sur Ω . Après intégration par parties, on obtient :

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot} \varphi \, dx + \int_{\partial \Omega} \varphi \vec{u} \cdot \vec{\tau} \, d\gamma = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in Q_1^h .$$

Dans cette dernière relation, $\vec{\tau}$ est un vecteur unitaire tangent à Γ , issu de la normale extérieure \vec{n} par un angle de $+\frac{\pi}{2}$ (cf. figure 1.1). On remarque que si φ est une fonction de base de Q_1^h correspondant à un sommet intérieur, l'équation (1.6) revient à annuler la circulation de \vec{u} le long du chemin γ dessiné sur la figure 1.2.

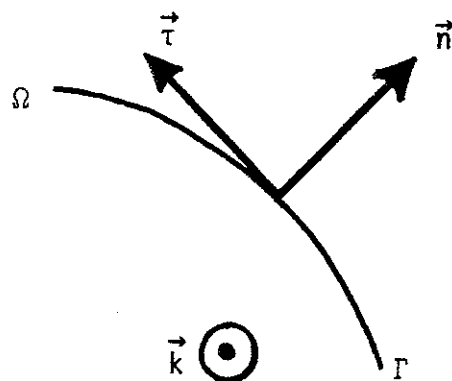


Figure 1.1 : Vecteurs unitaires

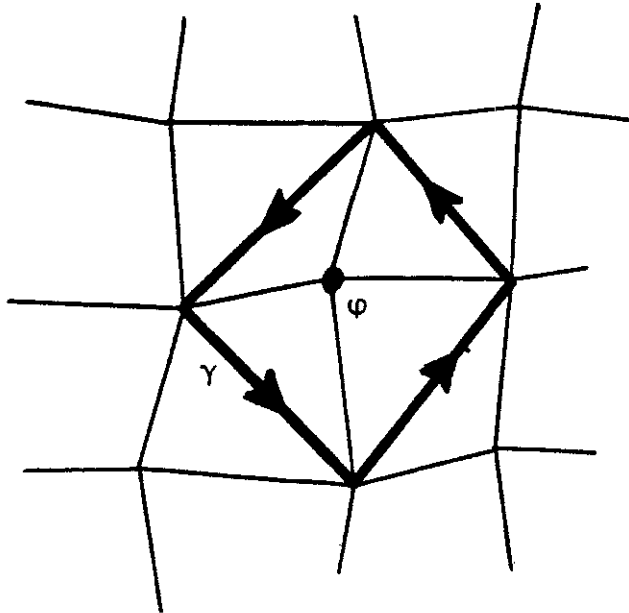


Figure 1.2 : Chemin d'intégration pour le calcul du tourbillon.

PROPOSITION 1.1

Pour $\bar{\psi}$ donné dans \bar{Q}_1^D , g donné dans \bar{Q}_0^N , et ρ dans $L^\infty(\bar{\Omega})$ telle que

$$(1.7) \quad \exists \rho^* > 0 \quad , \quad \rho \geq \rho^* \quad \text{p.p. (x)}$$

le problème

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h \quad , \quad \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} \text{rot} \psi \cdot \vec{v} \, dx = 0 \\ \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \text{rot} \varphi \, dx = - \int_{\Gamma} \varphi \, g \, d\gamma \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \vec{v} \in Q_0^h \times Q_0^h \\ \forall \varphi \in Q_1^h \end{array}$$

a une solution unique.

La preuve, détaillée au chapitre 3 de la Thèse d'Amara [1], consiste à vérifier la condition inf-sup. Le système linéaire défini par (1.8) est en fait beaucoup plus simple à résoudre que ceux issus des formulations mixtes les plus générales, puisque la matrice $A(\rho)$ définie par $(Q_0^h \times Q_0^h)^2 \ni (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto (A(\rho)\vec{u}, \vec{v}) \equiv \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx$ est diagonale. Si nous notons par B la matrice de l'opposé du rotationnel entre les espaces Q_1^h et $Q_0^h \times Q_0^h$:

$$Q_1^h \ni \varphi, Q_0^h \times Q_0^h \ni \vec{v} \mapsto (B\varphi, \vec{v}) \equiv - \int_{\Omega} r \operatorname{rot} \varphi \cdot \vec{v} \, dx$$

et par G la matrice de la forme linéaire définie sur Q_1^h par g :

$$Q_1^h \ni \varphi \mapsto G\varphi = \int_{\Gamma} g\varphi \, d\gamma$$

nous pouvons alors réécrire (1.8) sous la forme :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \vec{u} \in Q_0^h \times Q_0^h, & \psi - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ A(\rho) \vec{u} + B\psi = 0 \\ - {}^t B \vec{u} = -G \end{cases}$$

Le système (1.9) se résout alors très simplement : on pose $\tilde{\psi} = \psi - \bar{\psi}$ et on exprime \vec{u} grâce à la première équation :

$$\vec{u} = -A(\rho)^{-1} (B\bar{\psi} + B\tilde{\psi}) .$$

On reporte cette expression dans la seconde équation afin d'obtenir une équation qui ne porte que sur l'inconnue $\tilde{\psi}$:

$$(1.10) \quad {}^t B A(\rho)^{-1} B \tilde{\psi} = - {}^t B A(\rho)^{-1} B \bar{\psi} - G$$

La matrice du système linéaire (1.10) est symétrique définie positive comme la matrice $A(\rho)$ (propriété toujours physiquement vérifiée s'il n'y a pas cavitation, comme l'exprime l'hypothèse (1.7)).

Les données de ce système linéaire sont un champ de densité ρ , une condition de Dirichlet $\bar{\psi}$ sur Γ_D pour la fonction courant, et une vitesse tangentielle $\vec{u} \cdot \vec{\tau} \equiv g$ sur Γ_N , partie de la frontière complémentaire de Γ_D .

2 - DENSITE DECENTREE

Aux équations aux dérivées partielles (1.2) et (1.5) il convient d'ajouter, pour fermer le modèle transsonique utilisé, les hypothèses d'isentropie de l'écoulement et de conservation de l'enthalpie totale. Pour un gaz parfait de chaleurs spécifiques constantes de rapport γ et de vitesse et densité adimensionnalisées de façon à valoir 1 pour un nombre de Mach de référence M_0 , on en déduit :

$$(1.11) \quad \rho^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}|^2)$$

En reportant cette expression de la densité en fonction de la vitesse dans (1.2), on vérifie facilement que le type du problème change avec la nature de l'écoulement : elliptique en région subsonique ($M < 1$), hyperbolique en région supersonique ($M > 1$), où le nombre de Mach local M est calculé grâce à la relation

$$(1.12) \quad M^2 = M_0^2 \frac{|\vec{u}|^2}{\rho^{\gamma-1}} .$$

Les difficultés liées à ce changement de type, sur une interface a priori inconnue le long de laquelle se développe une ligne sonique et une onde de choc, sont classiques et ont fait l'objet de

nombreuses recherches tant théoriques (MORAWETZ [35],[36], FEISTAUER-NEČAS [22] par exemple) qu'appliquées (voir entre autres BAUER-GARABEDIAN-KORN [3]). Les méthodes numériques dont la mise en oeuvre informatique est la plus simple reposent sur la notion de capture de choc (MURMAN-COLE [39]), où la solution discrète fournie par le schéma numérique simule le mieux possible la discontinuité due à l'onde de choc, en l'étalant sur quelques mailles. Nous citons aussi MURMAN [40], JAMESON [30], ENGQUIST-OSHER [20],[21] qui ont proposé des schémas aux différences finies permettant de traiter la difficulté due au changement de type et à la condition d'entropie. Avec une approximation par éléments finis, l'adaptation du "rotated scheme" de JAMESON [30] la plus féconde est le concept de "densité décentrée", proposée indépendamment par EBERLE [17] et HAFEZ-SOUTH-MURMAN [27], et utilisée ensuite par HOLST [29], DECONINCK-HIRSCH [12], AMARA-JOLY-THOMAS [2], BREDIF [5], DUPUY [14] : à partir d'un champ de vitesse \vec{u} , on calcule d'abord une densité ρ grâce à (1.11) et on la décentre grâce à l'adjonction d'une viscosité artificielle :

$$(1.13) \quad \bar{\rho} = \rho - \alpha \Delta s \frac{\partial \rho}{\partial s}$$

où Δs est un élément de longueur lié au maillage, α un coefficient toujours compris entre 0 et 1 et nul en zone subsonique, et $\frac{\partial \rho}{\partial s}$ une évaluation du gradient le long de la ligne de courant.

Nous décrivons maintenant une première discrétisation de la relation (1.13) qui définit la densité décentrée retenue pour nos calculs numériques, et qui est due pour l'essentiel à AMARA [1].

On suppose donc connu un champ de vitesses $\vec{u}_K \in Q_0^h \times Q_0^h$ et une fonction courant $\psi \in Q_1^h \oplus \bar{Q}_1^D$. Pour chaque élément fini K , nous déterminons un élément amont KA parmi les quatre voisins de K (i.e. les quatre quadrangles ayant une arête commune avec K) : c'est celui pour lequel le flux de masse entrant dans K est le plus important ; nous notons que le calcul de ce flux de masse est simple si on utilise la fonction courant (il se réduit alors à la différence entre les valeurs aux deux sommets de l'arête commune). Une fois ce choix effectué, le terme ajouté à ρ dans (1.13) est calculé grâce à un schéma décentré, et nous avons :

Décentrage n° 1

$$(1.14) \quad \bar{\rho}_K = \rho_K - \alpha_{KA,K}(\rho_K - \rho_{KA})$$

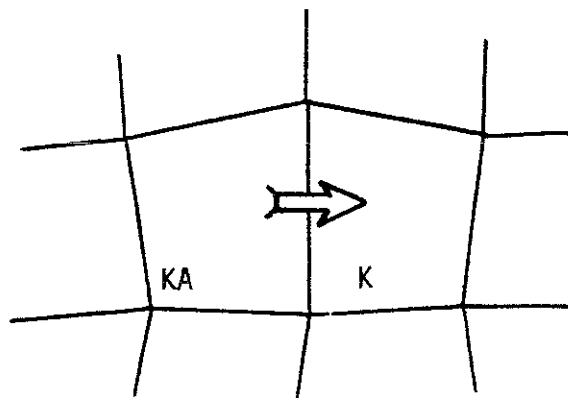


Figure 1.3 : Élément amont

Dans la formule (1.14), ρ_K est la densité calculée dans l'élément K grâce au champ \vec{u}_K et à la relation (1.11). Le coefficient de décentrage $\alpha_{KA,K}$ est fonction des nombres de Mach M_{KA} et M_K calculés

dans les éléments KA et K (relation (1.12)) grâce au procédé suivant : on calcule d'abord une moyenne $m_{KA,K}$ entre ces deux nombres de Mach

$$(1.15) \quad m_{KA,K}^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } M_{KA} < 1 \text{ et } M_K < 1 \text{ (zone subsonique)} \\ \frac{1}{2} (M_K^2 + 1) & \text{si } M_{KA} < 1 \text{ et } M_K > 1 \text{ (ligne sonique)} \\ \frac{1}{2} (M_{KA}^2 + M_K^2) & \text{si } M_{KA} > 1 \text{ (zone supersonique ou choc)} \end{cases}$$

qui permet de définir facilement $\alpha_{KA,K}$ par

$$(1.16) \quad \alpha_{KA,K} = \begin{cases} \frac{1 - 1/m_{KA,K}^2}{1 - 1/\omega} & \text{si } m_{KA,K}^2 \leq \omega \\ 1 & \text{si } m_{KA,K}^2 > \omega \end{cases}$$

Pour cette dernière relation, on a choisi $\omega = 2.5$ (on décentre donc complètement le schéma (1.14) pour des nombres de Mach supérieurs à 1.58).

Dans les paragraphes qui suivent, nous proposons d'autres façons de calculer une densité décentrée, qui ont toutes été mises en oeuvre, et testées dans la partie II.

3 - DECENTRAGE DE LA DENSITE A L'AIDE DU FLUX DE MASSE

L'analyse qui suit est l'adaptation à notre contexte éléments finis de l'article d'OSHER-HAFEZ-WHITLOW [41] proposé pour une méthode aux différences finies. Fixons un élément fini K et son élément amont KA comme précédemment, et supposons le champ de vitesses normal à l'interface a entre KA et K (figure 1.4).

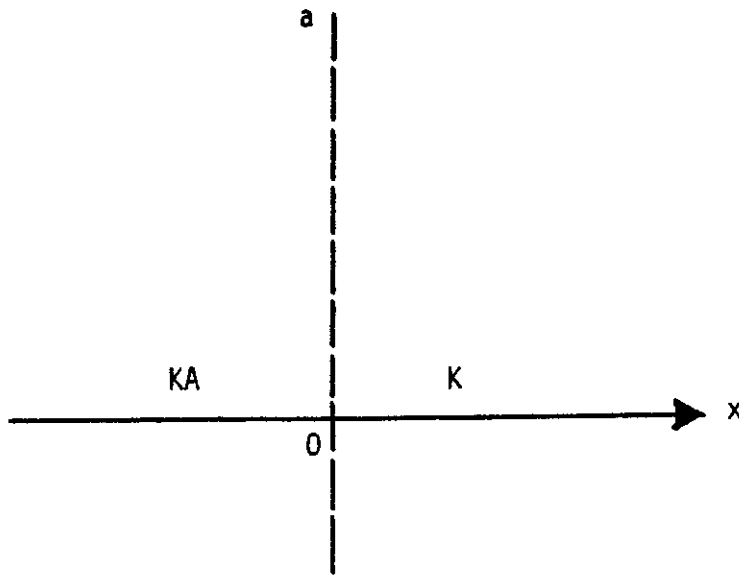


Figure 1.4

Essayons alors de calculer approximativement quel écoulement traverse cette interface : on peut se restreindre à une étude selon la normale Ox à l'interface, et la conservation de la masse s'écrit alors :

$$(1.17) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} q(\rho) = 0$$

avec une non-linéarité concave $q(\rho)$ donnée par

$$(1.18) \quad q(\rho) = \rho |\vec{u}|$$

et $|\vec{u}|$ défini comme fonction de ρ grâce à la relation (1.11). Dans cette approximation, la densité au voisinage de l'interface a est solution au cours du temps d'un problème de Riemann pour une équation hyperbolique non-linéaire, puisque les "conditions initiales" sont

$$(1.19) \quad \rho(x) = \begin{cases} \rho_{KA} & \text{si } x < 0 \\ \rho_K & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Un tel problème est classique (voir LAX [33] ou SMOLLER [46] par exemple) : la solution est constante au cours du temps le long de l'interface a , et il en est de même pour le flux numérique calculé par les schémas numériques conservatifs. En particulier, le schéma d'ENGQUIST-OSHER ([20,21]) donne une valeur approchée du flux q , solution du problème (1.17)(1.18) le long de a .

$$(1.20) \quad q(a) = \phi(\rho_{KA}, \rho_K)$$

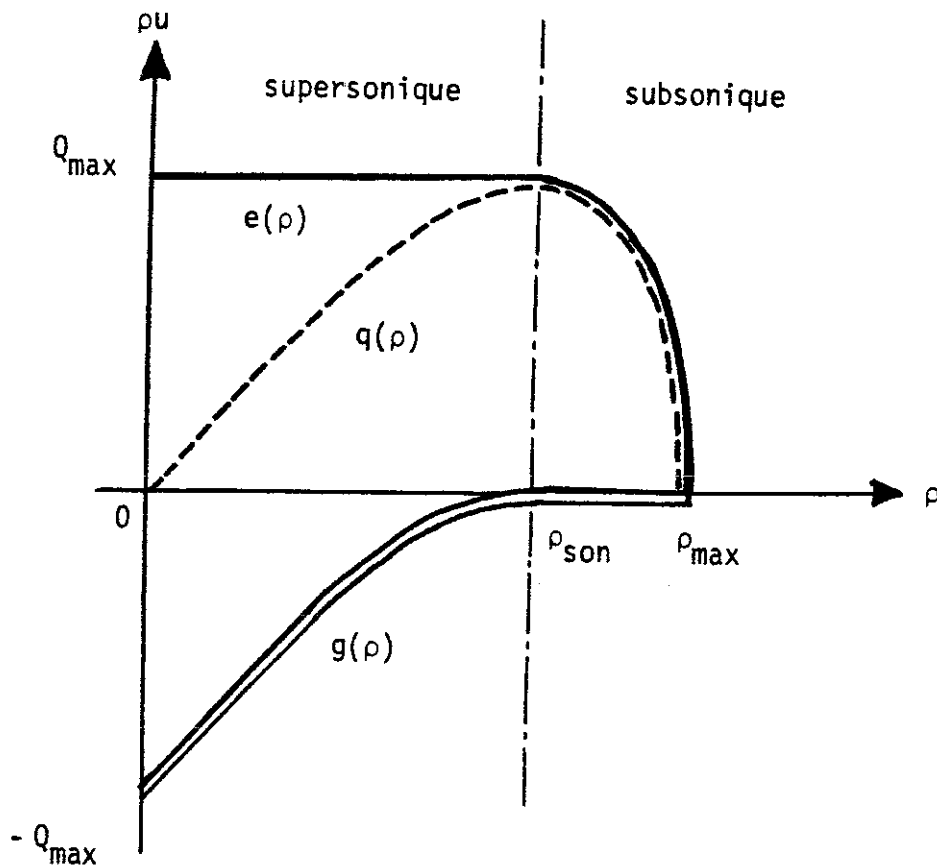


Figure 1.5 : Décomposition d'Engquist-Osher de la non-linéarité $q(\rho)$ [pointillés] en composantes subsonique $e(\rho)$ [trait simple] et supersonique $g(\rho)$ [double trait].

De plus la fonction ϕ est dérivable par rapport au couple (ρ_{KA}, ρ_K) .
 On la construit en isolant la partie subsonique $e(\rho)$ de la partie
 supersonique $g(\rho)$ de la fonction (1.18) : soient ρ_{son} la densité
 du point sonique $\left(\frac{dq}{d\rho}(\rho_{son}) = 0\right)$ et $Q_{max} = q(\rho_{son})$. On pose :

$$(1.21) \quad e(\rho) = \begin{cases} q(\rho) & \rho > \rho_{son} \\ Q_{max} & \rho \leq \rho_{son} \end{cases}$$

$$(1.22) \quad g(\rho) = q(\rho) - e(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho > \rho_{son} \\ q(\rho) - Q_{max} & \rho \leq \rho_{son} \end{cases}$$

$$(1.23) \quad \phi(\rho_{KA}, \rho_K) = g(\rho_{KA}) + e(\rho_K)$$

Le schéma (1.20)-(1.23) permet donc un calcul approché du flux de masse
 qui passe de KA à K et on peut en déduire une densité décentrée en
 divisant le flux de masse ainsi calculé par le module de la vitesse :

Décentrage n° 2

$$(1.24) \quad \bar{\rho}_K = \frac{\phi(\rho_{KA}, \rho_K)}{|\vec{u}_K|}$$

Notons pour terminer que ce décentrage a été obtenu en supposant l'écou-
 lement normal entre les éléments KA et K, ce qui n'est numériquement
 vrai que de façon approximative, ou bien exige un maillage qui "suive"
 a priori l'écoulement.

4 - DECENTRAGES PAR FRONTS

Nous revenons dans ce paragraphe à la relation empirique (1.14) qui relie la densité à la densité décentrée :

$$\bar{\rho}_K = \rho_K - \alpha_{KA,K}(\rho_K - \rho_{KA})$$

Amara a proposé [1] d'utiliser aussi la relation

Décentrage n° 3

$$(1.25) \quad \bar{\rho}_K = \rho_K - \alpha_{KA,K}(\rho_K - \bar{\rho}_{KA})$$

qui mélange, dans le calcul de la viscosité artificielle $\Delta s \frac{\partial \rho}{\partial s}$ de la relation (1.13), les densités exactes et décentrées ! La relation (1.25) définit $\bar{\rho}$ de façon totalement implicite a priori à partir du champ ρ (le calcul des coefficients α reste inchangé par rapport au décentrage n° 1), mais si on suit une ligne de courant (ne se refermant pas !), le calcul de la densité décentrée $\bar{\rho}$ s'effectue facilement de proche en proche, et (1.25) définit un schéma bidiagonal.

Nous avons adapté cette idée au calcul de la densité décentrée qui utilise le schéma d'Engquist-Osher (décentrage n° 2) : le flux de masse est évalué en utilisant la densité exacte de l'élément courant et la densité décentrée de l'élément amont. Nous obtenons ainsi le

Décentrage n° 4

$$(1.26) \quad \bar{\rho}_K = \frac{\phi(\bar{\rho}_{KA}, \rho_K)}{|\vec{u}_K|}$$

5 - ALGORITHME DE POINT FIXE

Nous présentons enfin l'algorithme global de résolution de l'équation du potentiel transsonique que nous avons utilisé.

ALGORITHME

- Conditions aux limites

$$(1.27) \quad \begin{cases} \psi = \bar{\psi} & \text{sur } \Gamma_D \\ \vec{u} \cdot \vec{\tau} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

- Initialisation $\bar{\rho}^0$ donné.
- Itération ; $\bar{\rho}^n$ est supposé connu.

★ Résolution d'un problème linéaire de type (1.9)

$$\begin{cases} \vec{u}^{n+1} \in Q_0^h \times Q_0^h, & \psi^{n+1} - \bar{\psi} \in Q_1^h \\ A(\bar{\rho}^n) \vec{u}^{n+1} + B\psi^{n+1} = 0 \\ t_B \vec{u}^{n+1} = G \end{cases}$$

★ Calcul de la densité grâce à la relation (1.11) :

$$\rho_K^{n+1} = \left\{ 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 (1 - |\vec{u}_K^{n+1}|^2) \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

★ Décentrage de la densité au moyen de l'une des quatre méthodes proposées (relations (1.14), (1.24), (1.25) et (1.26) respectivement).

★ Calcul du résidu, i.e. de l'erreur relative

$$(1.28) \quad \epsilon_{n+1} = \left\| \frac{\bar{\rho}^{n+1} - \bar{\rho}^n}{\bar{\rho}^n} \right\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et test de fin par comparaison de ϵ_{n+1} à $\epsilon > 0$ donné.

REMARQUE 1.1

L'algorithme qui précède est fondé sur une formulation mixte (\vec{u}, ψ) du problème linéaire (1.9), et ceci est essentiel. En effet, on ne peut formuler un problème linéaire par rapport à la seule fonction courant ψ , car alors le calcul de la densité est ambigu, puisque l'équation d'inconnue ρ

$$q(\rho) = |\vec{r} \text{rot } \psi|$$

a toujours deux solutions (ou pas du tout !), l'une subsonique et l'autre supersonique (cf. figure 1.6).

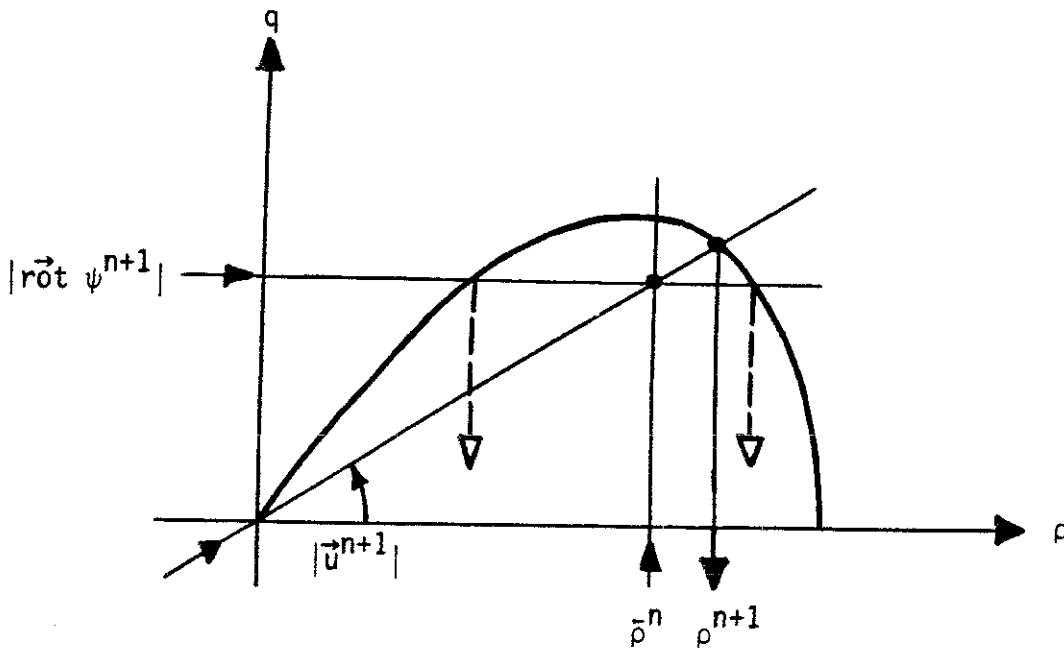


Figure 1.6 : Calcul de la nouvelle densité ρ^{n+1} grâce à la densité $\bar{\rho}^n$ de l'itération précédente et à la fonction courant ψ^{n+1} .

A l'aide de la formulation mixte (1.9) au contraire, le calcul de la vitesse \vec{u}^{n+1} précède celui de la densité comme on l'a illustré figure 1.6.

II - TESTS NUMERIQUES SUR UN PROFIL NACA 0012

1 - GENERALITES

Nous avons testé et validé notre code de calcul sur une aile d'avion initialement dessinée par les ingénieurs du National Advisory Committee for Aeronautics (aile NACA 0012) sur laquelle de nombreuses expériences de toutes natures ont été effectuées. Nous nous sommes restreints au cas simple d'une incidence nulle, pour lequel des écoulements non portants sont possibles puisque le profil est symétrique (mais ce ne sont pas les seuls, des ruptures de symétrie peuvent se produire, comme le montrent STEINHOFF-JAMESON [47] et BRISTEAU et al [6]). On se contente donc d'étudier l'écoulement autour du demi-profil (figure 2.1).

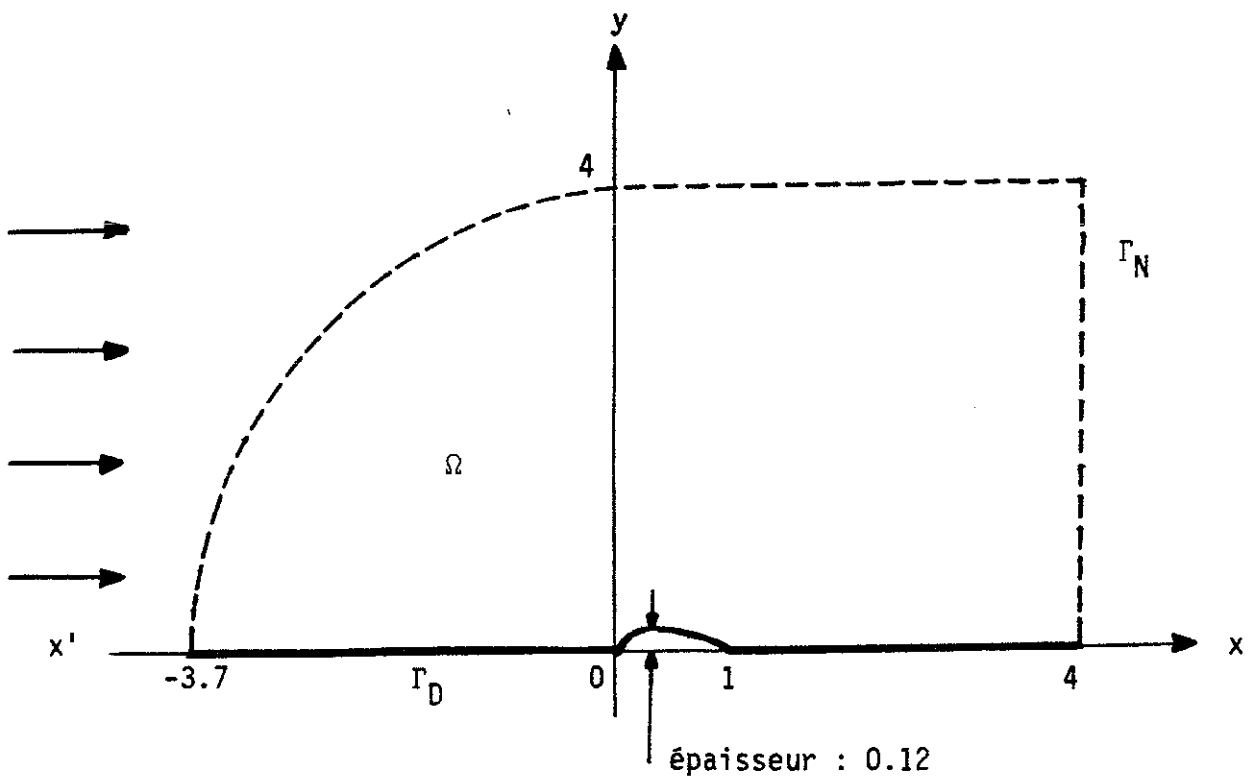


Figure 2.1 : Demi-profil NACA 0012

Par symétrie du problème, la droite $x'Ox$ passant par le bord d'attaque et le bord de fuite contient deux demi-droites qui sont des lignes de courant sur lesquelles on impose à la fonction courant d'être nulle (ce qui fixe la jauge). Cette ligne (incluant le demi-profil) constitue la position Γ_D de la frontière.

$$(2.1) \quad \bar{\psi} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D .$$

La portion Γ_N qui ferme le domaine de calcul Ω est une frontière artificielle, sur laquelle on se donne la composante tangentielle de la vitesse :

$$(2.2) \quad g = \vec{u}_\infty \cdot \vec{\tau} \quad \text{sur } \Gamma_N$$

avec \vec{u}_∞ parallèle à Ox par hypothèse, et de module déterminé par le nombre de Mach à l'infini M_∞ . ($|\vec{u}_\infty| = 1$ si on choisit $M_0 = M_\infty$). Cette condition à la limite (2.2) est très simple et doit être affinée dans le cas d'une aile portante, en tenant compte du comportement asymptotique de l'écoulement aux grandes distances, comme l'ont montré théoriquement LUDFORD [34], SHIFFMAN [45], FINN-GILBARG [23] et CIAVALDINI [9].

2 - MAILLAGES

Concevoir un maillage régulier autour d'un profil peut faire appel à des techniques analytiques et géométriques fort élaborées (transformation conforme, polygones de Delaunay-Voronoi, etc...) afin que la variation des mailles soit la plus régulière possible.

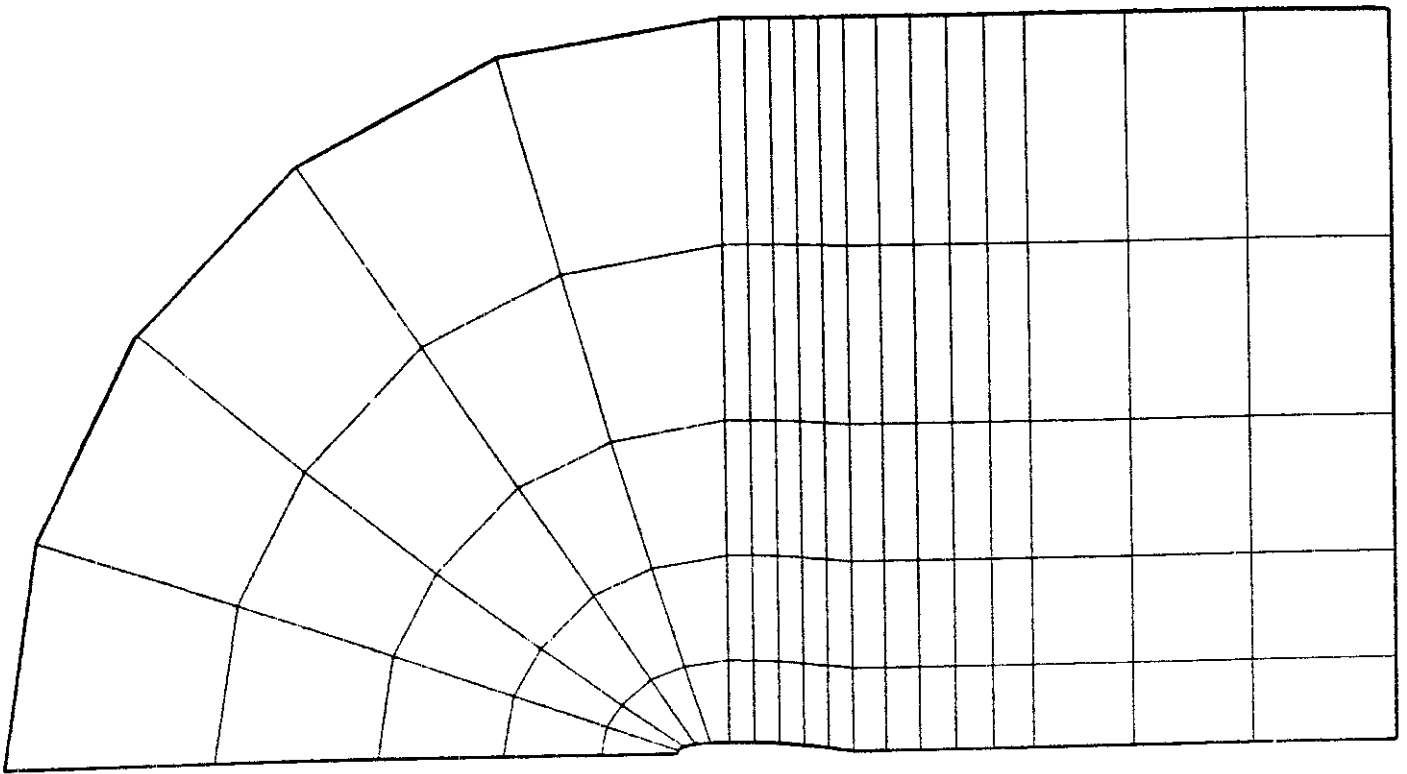


Figure 2.2 : Maillage grossier N11 autour du profil NACA 0012 (11 points sur le profil)

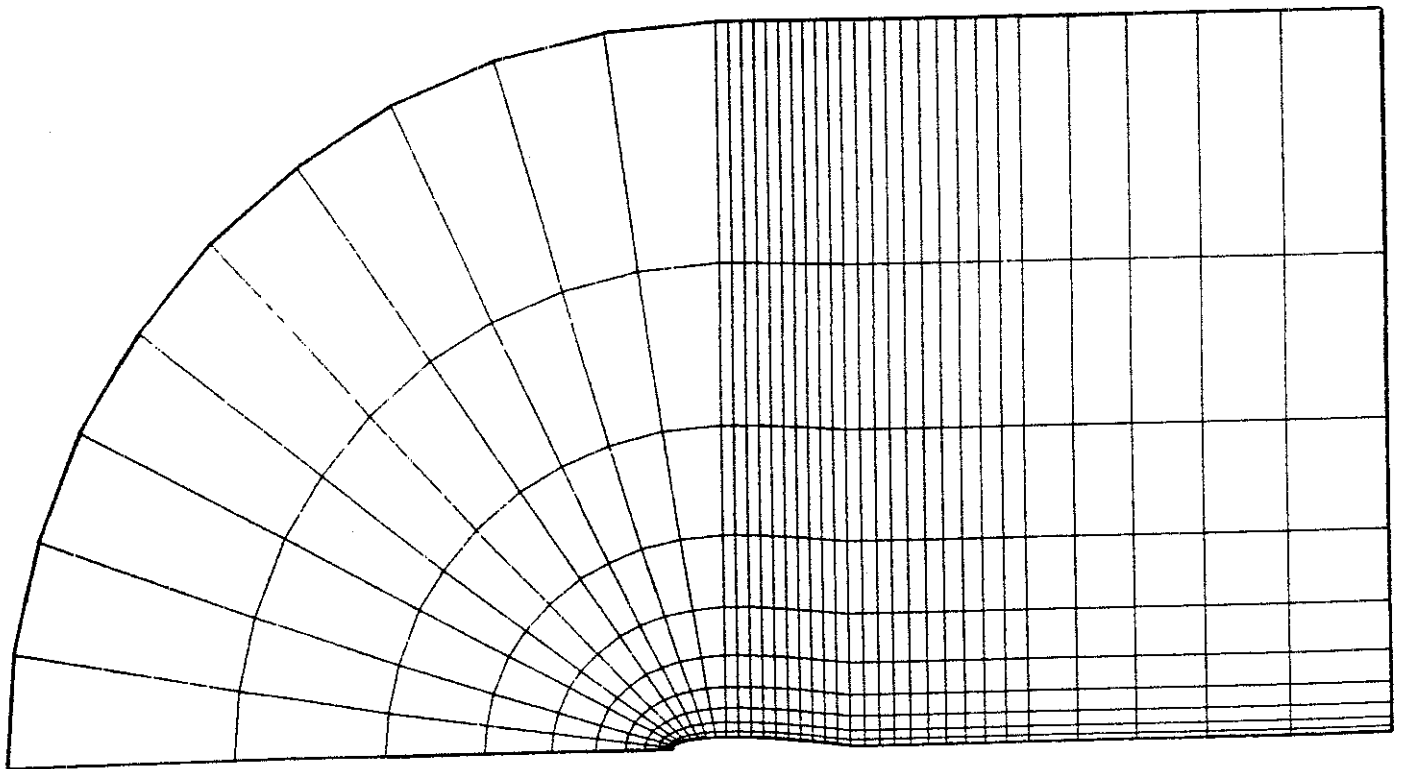


Figure 2.3 : Maillage N21 autour du profil NACA 0012

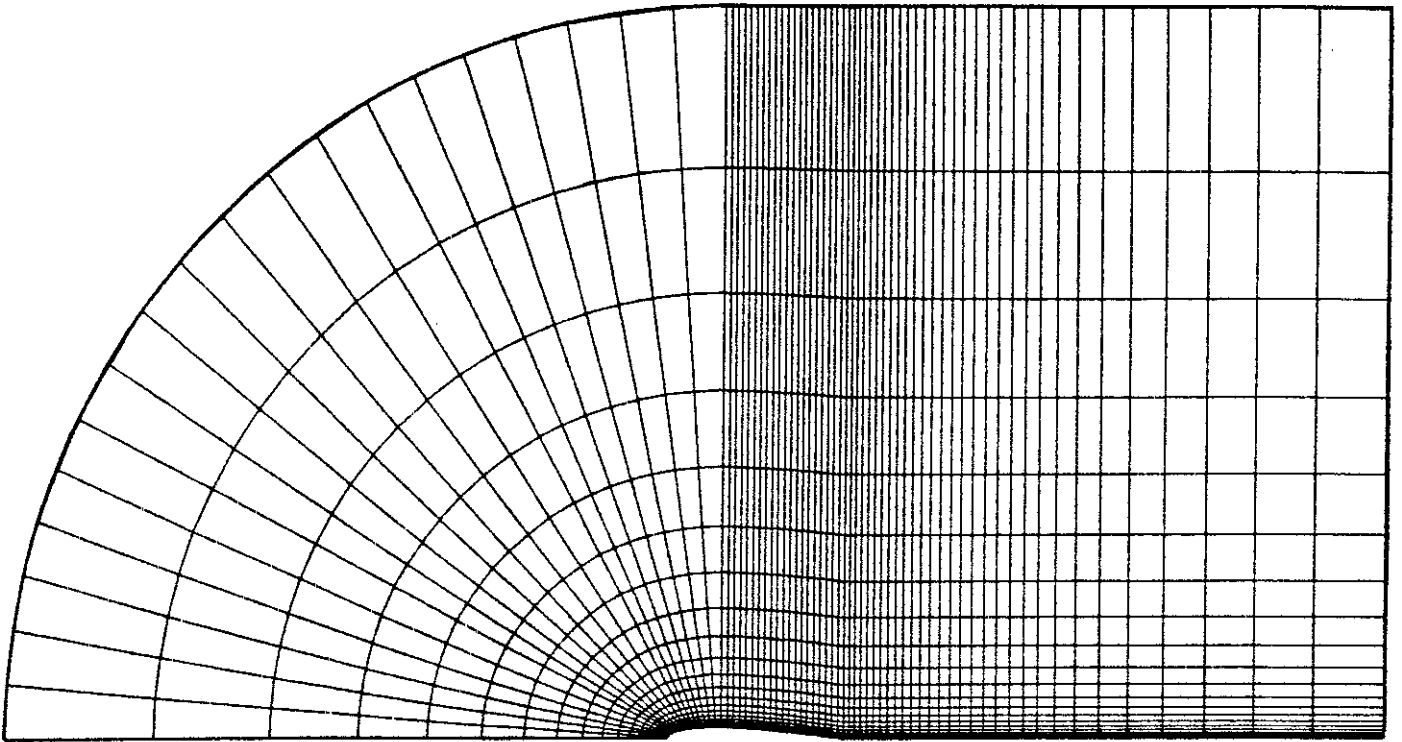


Figure 2.4 : Maillage N41 autour du profil NACA 0012

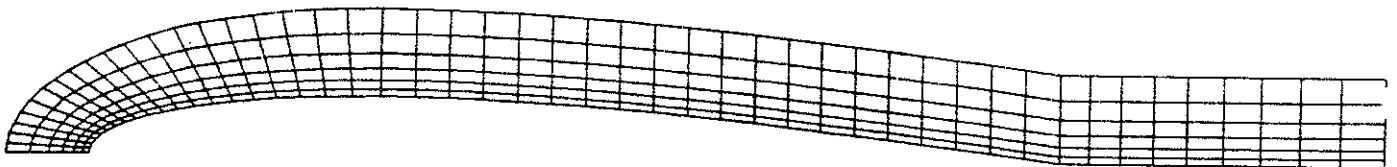


Figure 2.5 : Détail des 41 points sur le profil du maillage N41

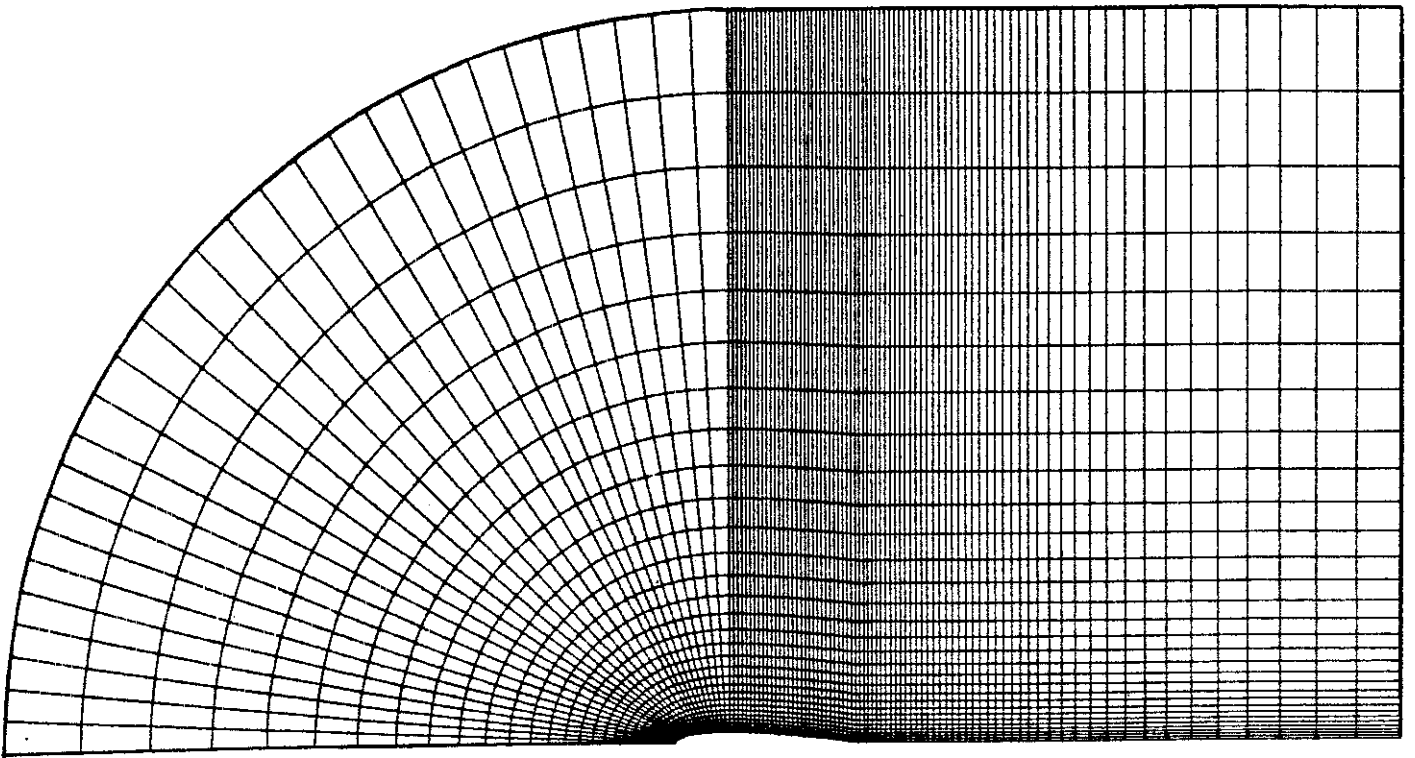


Figure 2.6 : Maillage N61 autour du profil NACA 0012

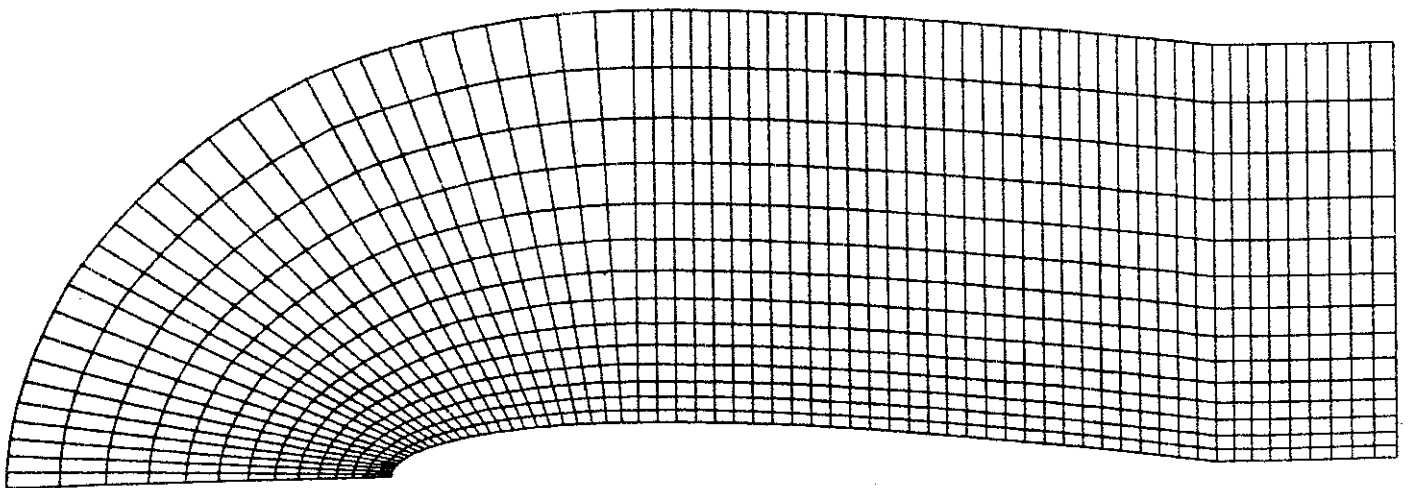


Figure 2.7 : Détail des mailles du maillage N61 près du profil.

Nous avons simplement utilisé le mailleur MEFISTO développé par A. PERRONNET [42] à l'Université Paris VI, très souple d'emploi et qui permet en peu de temps de générer un maillage cohérent. Comme contrainte essentielle, nous avons voulu garder des mailles régulières le long du profil. Quatre maillages de plus en plus raffinés ont été utilisés (figures 2.2 à 2.7) et comparés dans le tableau ci-dessous :

Maillage du NACA 0012	Nombre de points sur le profil	Nombre d'éléments	Nombre de sommets
N11	11	$18 \times 5 = 90$	$19 \times 6 = 114$
N21	21	$35 \times 10 = 350$	$36 \times 11 = 396$
N41	41	$70 \times 20 = 1400$	$71 \times 21 = 1491$
N61	61	$105 \times 30 = 3150$	$106 \times 31 = 3286$

3 - COMPARAISON DES PERFORMANCES DES DIFFERENTS DECENTRAGES

Les cas tests qui suivent sont classiques depuis le workshop du GAMM organisé par RIZZI-VIVIAND [43]. Nous présentons d'une part des cartes d'isovaleurs du nombre de Mach, et d'autre part des courbes de coefficient de pression $-C_p$ le long du profil. Celui-ci est défini par :

$$(2.3) \quad -C_p = \frac{P_\infty - p}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2}$$

avec une expression de la pression donnée par :

$$(2.4) \quad p = \frac{1}{\gamma M_0^2} \rho^\gamma .$$

Pour calculer le champ de densité le long du profil, nous utilisons un champ interpolé aux sommets du maillage à partir du champ calculé dans les éléments, par une simple moyenne (cf. figure 2.8) :

$$(2.5) \quad \tilde{\rho}_I = \frac{\sum_j \rho_j \cdot \text{vol}(K_j)}{\sum_j \text{vol} K_j}$$

où la somme sur j est étendue aux éléments K_j possédant le noeud I comme sommet.

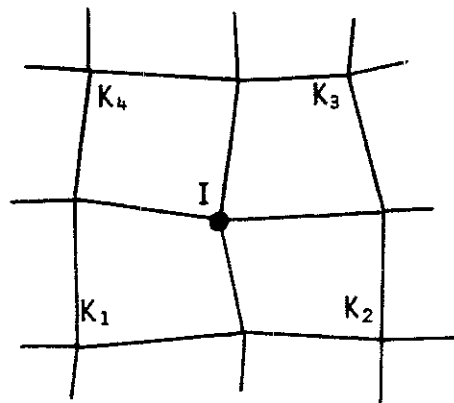


Figure 2.8 : Interpolation éléments → sommets

a) Calcul à $M_\infty = 0.72$

Pour ce cas test, l'écoulement obtenu est entièrement subsonique (bien que le nombre de Mach maximal sur le profil soit très proche de 1). Aucun des décentrages n'est efficace (i.e. $\bar{\rho} \equiv \rho$), et

un tel cas de calcul permet de tester la plupart des sous-programmes nécessaires à l'algorithme de point fixe (dont une variante a déjà été utilisée au chapitre 3). Quelques résultats significatifs sont rassemblés sur les figures 2.9 à 2.11. Une carte du nombre de Mach (figure 2.9) montre la classique décélération au bord d'attaque (le bout de l'aile étant en toute rigueur un point de vitesse nulle) suivie d'une détente dans la zone où l'épaisseur du profil augmente ($0 \leq x \leq 0,3$) puis d'une décélération jusqu'au bord de fuite. Les courbes de convergence (figure 2.10) montrent qu'à partir du maillage N21, la vitesse de convergence de l'algorithme dépend peu du choix du maillage ; les différences en temps de calcul sont alors essentiellement dues à la taille intrinsèque des systèmes linéaires à résoudre (où le nombre des inconnues est de l'ordre du nombre de sommets, soit 114, 396, 1491, 3286 pour nos quatre maillages). Les courbes de coefficient de pression sur le profil (figure 2.11) illustrent enfin clairement la convergence des résultats au fur et à mesure qu'on raffine le maillage.

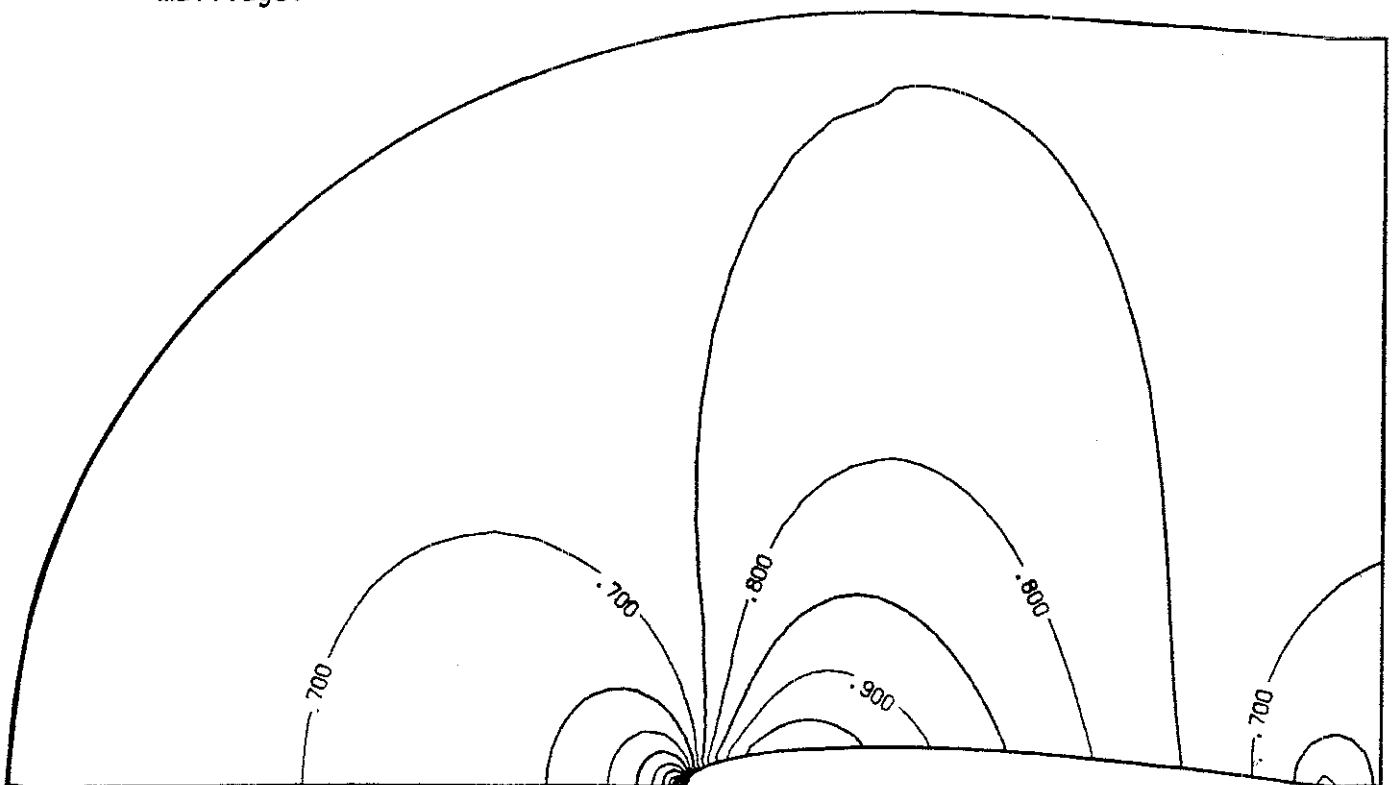


Figure 2.9 : NACA 0012, $M_\infty = 0.72$. Isovaleurs du nombre de Mach (maillage N61)

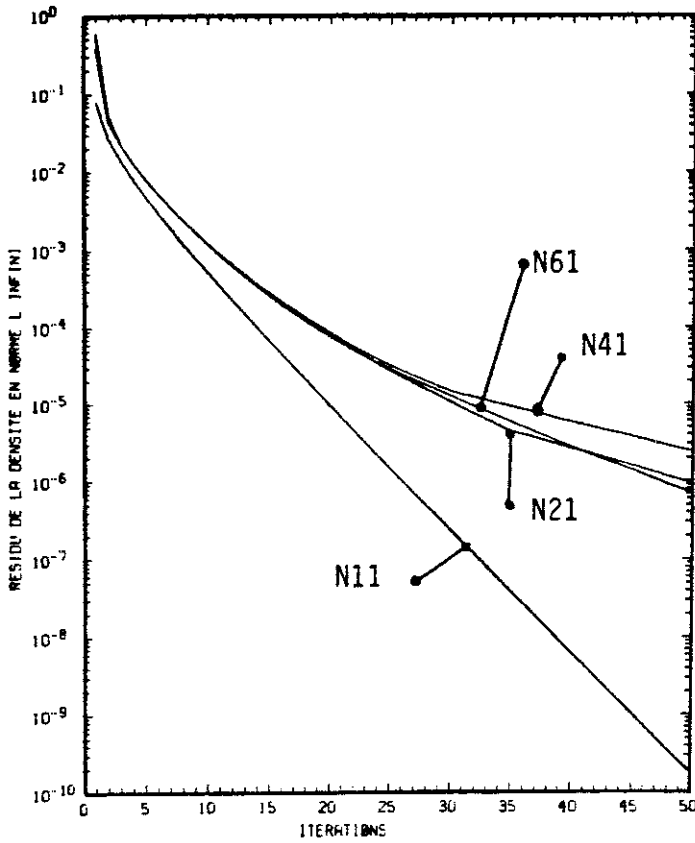


Figure 2.10 : NACA 0012, $M_\infty = 0.72$
 Courbes de convergence

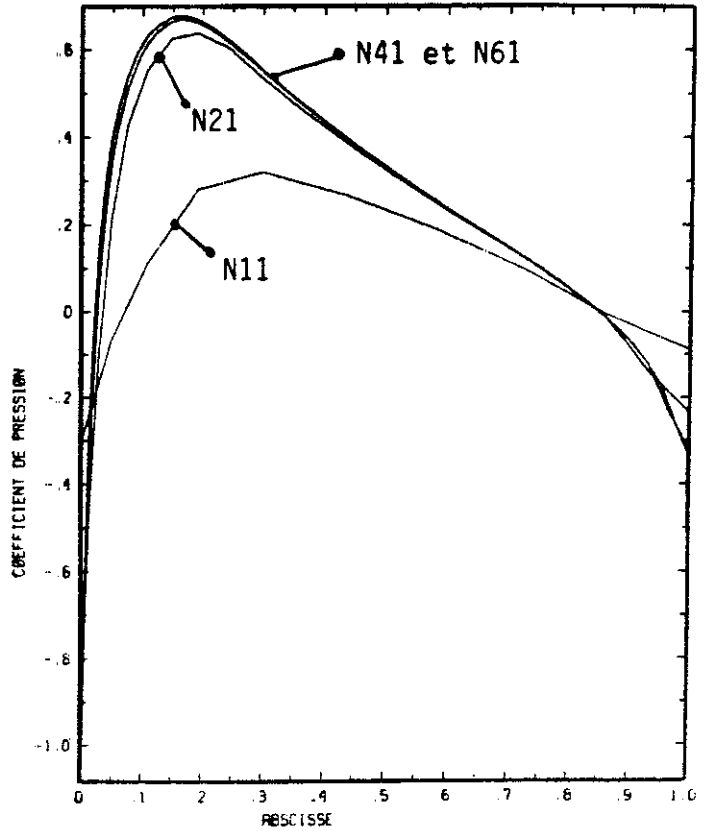


Figure 2.11 : NACA 0012, $M_\infty = 0.72$
 Courbes de C_p sur le profil

b) Calcul à $M_\infty = 0.80$

L'écoulement obtenu lors de ce test présente une poche super-sonique et un choc au milieu du profil. Si tous les décentrages permettent le calcul d'une solution dans le cas des maillages les plus grossiers (N11 et N21), nous avons constaté que les décentrages 1, 2 et 4 font diverger l'algorithme de point fixe pour le maillage N41. Nous résumons les comportements obtenus dans le tableau ci-dessous :

Maillage du NACA 0012	$M_\infty = 0.80$. Choix du décentrage			
	1	2	3	4
N11	converge	converge	converge	converge
N21	converge	converge	converge	converge
N41	diverge	diverge	converge	diverge
N61	/	/	converge	/

Ce test qualifie pour la suite le seul décentrage n° 3 (d'Amara, par fronts) parmi les quatre proposés. En effet, la divergence de l'algorithme (par la donnée de vitesses trop élevées lors du calcul de la densité par la relation (1.11)) empêche toute autre utilisation des décentrages n° 1, 2, 4. Notons toutefois que l'on teste ici l'ensemble de l'algorithme de point fixe I.5 et qu'en particulier la stabilité des divers décentrages est liée de façon intime au choix de l'algorithme pour résoudre le problème non-linéaire. Le choix d'un point fixe est effectivement très frustré et plusieurs auteurs (WONG-HAFEZ [49] par exemple) l'ont limité au cadre subsonique, où son emploi est classique (voir le chapitre 3). On peut penser que le caractère implicite du schéma (1.25) donne la raison essentielle de la stabilité lors du raffinement du maillage, mais une analyse complète du phénomène paraît actuellement hors de portée.

c) Calcul à $M_\infty = 0.85$

C'est un cas de calcul avec un choc assez fort, l'écoulement est supersonique sur plus des deux tiers du profil. Nous avons effectué ce test avec le décentrage par fronts d'Amara (n° 3) uniquement. Les résultats sur les maillages N11 à N41 sont satisfaisants, alors qu'avec le maillage N61, la méthode n'a pas convergé après 200 itérations non linéaires (soit 260s CPU sur Cray 2) sans toutefois diverger. Pour assurer la convergence d'un tel calcul présentant un choc fort, sur des maillages fins, on peut envisager de coupler l'algorithme du I-5° avec la méthode multigrille, comme d'autres auteurs l'ont déjà effectué (BRANDT [4], DECONINCK-HIRSCH [12], BREDIF [5] entre autres).

4 - ANALYSE DES RESULTATS

a) Calcul à $M_\infty = 0.80$

Dans ce paragraphe, nous étudions les résultats présentés sur les figures 2.12 à 2.14. Les courbes d'iso-mach (figure 2.12) montrent bien le caractère "shock capturing" du schéma, puisque le choc est étalé sur deux éléments finis environ. De plus, la convergence est de plus en plus lente au fur et à mesure que le nombre de points du maillage augmente (figure 2.13). Nous concentrons maintenant notre analyse sur les courbes de la figure 2.14 qui représentent le coefficient de pression sur le profil pour les trois maillages les plus fins. Les figures suivantes 2.15 et 2.16 reprennent ce même coefficient C_p , et sont tirées de RIZZI-VIVIAND [43] et AMARA [1]. L'ensemble de ces courbes a le même

aspect qualitatif, et en particulier le choc est situé au demi-profil pour tous les auteurs. Comme le schéma capture le choc, la vérification des relations de Rankine-Hugoniot n'est pas simple ; de plus, il est matériellement difficile de superposer rigoureusement des courbes issues de références différentes. Nous avons reporté figure 2.17 le coefficient de pression pris en quatre points qui caractérisent la structure du choc (valeur extrême de C_p , valeur du C_p directement en amont du choc, directement en aval du choc, minimum relatif qui suit le choc) et comparé nos valeurs avec celles d'Amara et de Jameson et al (figure 2.15). Pour le maillage N61 le C_p minimum est correct, et le C_p au maximum de l'overshoot est un peu fort. Par contre, la relation de saut est correctement vérifiée (comparer les C_p en pied de choc aux C_p théoriques obtenus pour un choc droit de C_p amont égal à -0.78 ou -0.84). Rappelons l'extrême sensibilité de tous ces résultats au choix de l'opérateur d'interpolation pour passer des valeurs des champs au centre des mailles à une valeur le long du profil, comme J.M. DUPUY l'avait illustré dans [15] ; le choix que nous avons fait (relation (2.5)) a tendance à adoucir les résultats, alors qu'Amara calculait les champs sur le profil par une extrapolation. Aussi les comparaisons quantitatives tirées de la figure 2.17 doivent-elles rester prudentes.

b) Calcul à $M_\infty = 0.85$

La figure 2.18 donne l'allure de la répartition du nombre de Mach sur l'ensemble du domaine de calcul, et un détail (faisant apparaître le maillage N41) est repris figure 2.19. Les courbes de convergence (figure 2.20) montrent bien les deux comportements présents lors

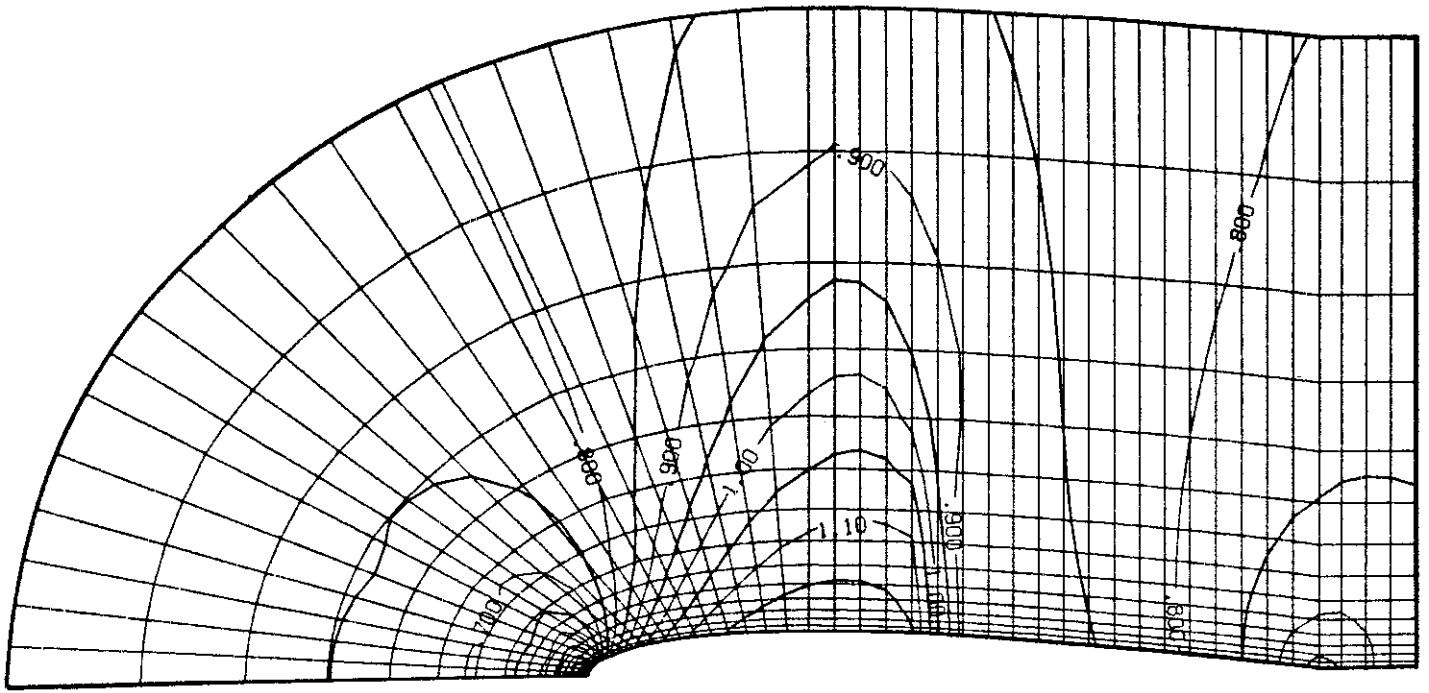


Figure 2.12 : NACA 0012, $M_\infty = 0.80$. Isovaleurs du nombre de Mach (maillage N41)

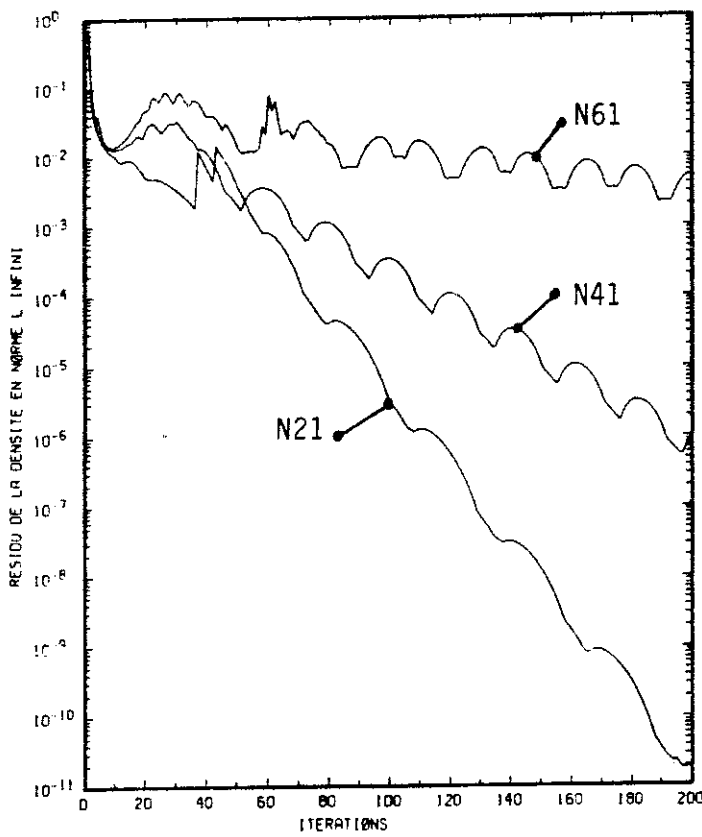


Figure 2.13 : NACA 0012, $M_\infty = 0.80$
Courbes de convergence

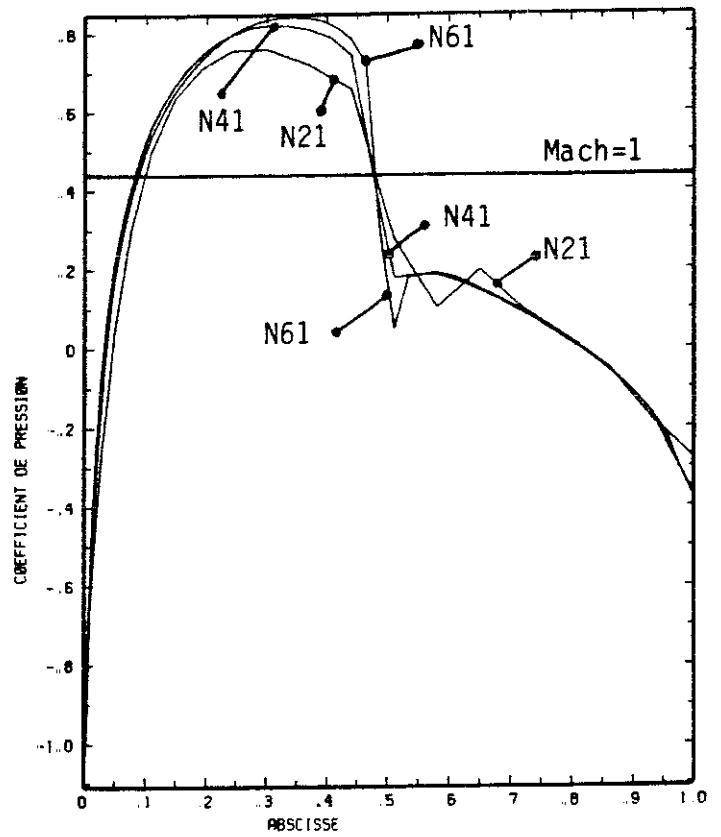


Figure 2.14 : NACA 0012, $M_\infty = 0.80$
Courbes de C_p sur le profil

des calculs transsoniques : une période chaotique (100 itérations de point fixe pour le maillage N41) où la zone supersonique se développe et où le choc se stabilise, suivie d'oscillations de grande amplitude au cours desquelles le résidu décroît. La position du choc que nous observons sur la courbe des C_p (figure 2.21) est conforme à celle des autres auteurs (figures 2.22 et 2.23) et se situe à 0.75 ± 0.05 . Le profil du choc est plus régulier que dans le cas précédent ($M_\infty = 0.80$), et nos résultats, très voisins de ceux obtenus par Amara, s'insèrent sans problème dans la fourchette des auteurs du GAMM workshop de 1979 [43]. Les relations de saut sont correctes elles aussi, puisque le C_p aval observé (0.22) est intermédiaire entre les coefficients de pression avals théoriques (0.20;0.25) calculés à partir des valeurs du C_p en amont du choc (cf. figure 2.24).

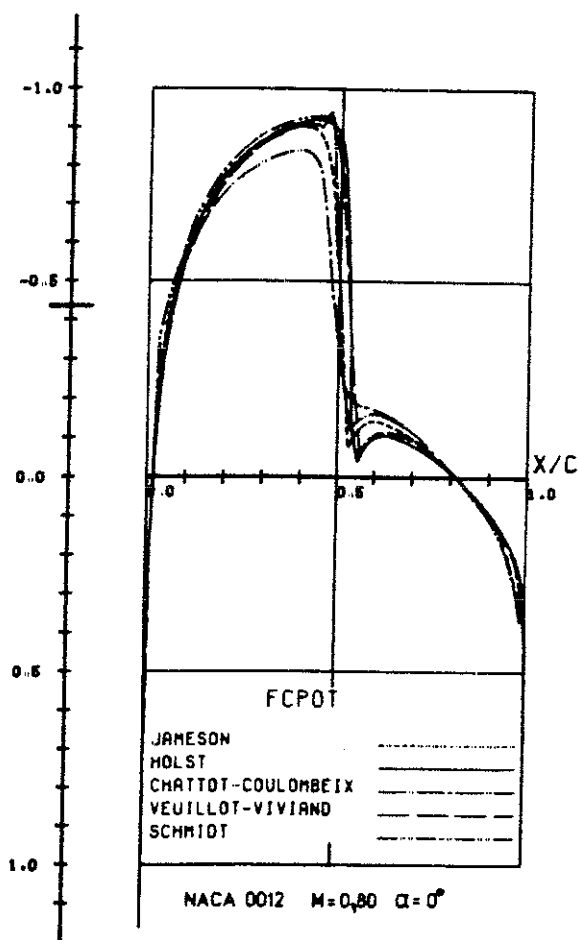


Figure 2.15 : Courbes de C_p sur le profil, référence [43]

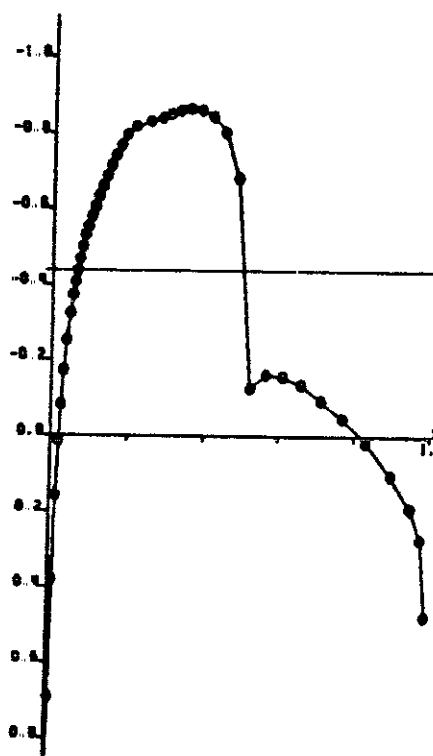
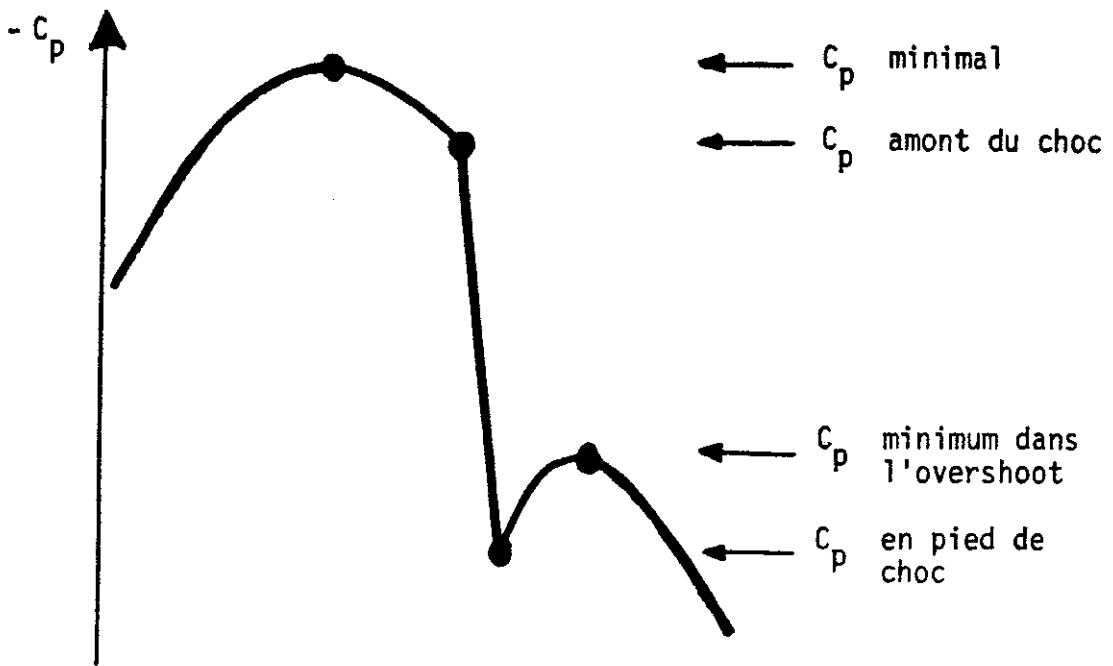


Figure 2.16 : NACA 0012, $M_\infty = 0,80$
Courbes de C_p obtenues par AMARA [1]

5 - CONCLUSION

Nous avons testé la méthode de calcul présentée dans la première partie dans le cas d'un écoulement autour d'un profil NACA 0012 (aérodynamique externe). Seul le décentrage par fronts n° 3 (relation (1.25)) proposé par Amara a permis de mener à bien des calculs transsoniques sur une famille de maillages de plus en plus fins. Les résultats obtenus alors à $M_\infty = 0.80$ et 0.85 sont conformes qualitativement et quantitativement aux résultats publiés antérieurement ([43],[1]). Ce décentrage par fronts a été ensuite seul utilisé pour l'étude du problème intérieur.



	C_p minimal	C_p associé au C_p minimal par Rankine-Hugoniot	C_p amont du choc	C_p associé au C_p amont par Rankine-Hugoniot	C_p en pied de choc	C_p minimum dans l'overshoot
maillage N41	-.82	-.053	-.74	-.13	-.18	-.19
maillage N61	-.84	-.034	-.78	-.092	-.05	-.19
Amara [1, maillage 3]	-.86	-.014	-.68	-.19	-.12	-.16
{43}	maxi	-.84	/	/	-.13	-.16
	mini	-.93	+.054	/	/	-.10

Figure 2.17 : NACA 0012, $M_\infty = 0.80$

Structure du choc numérique

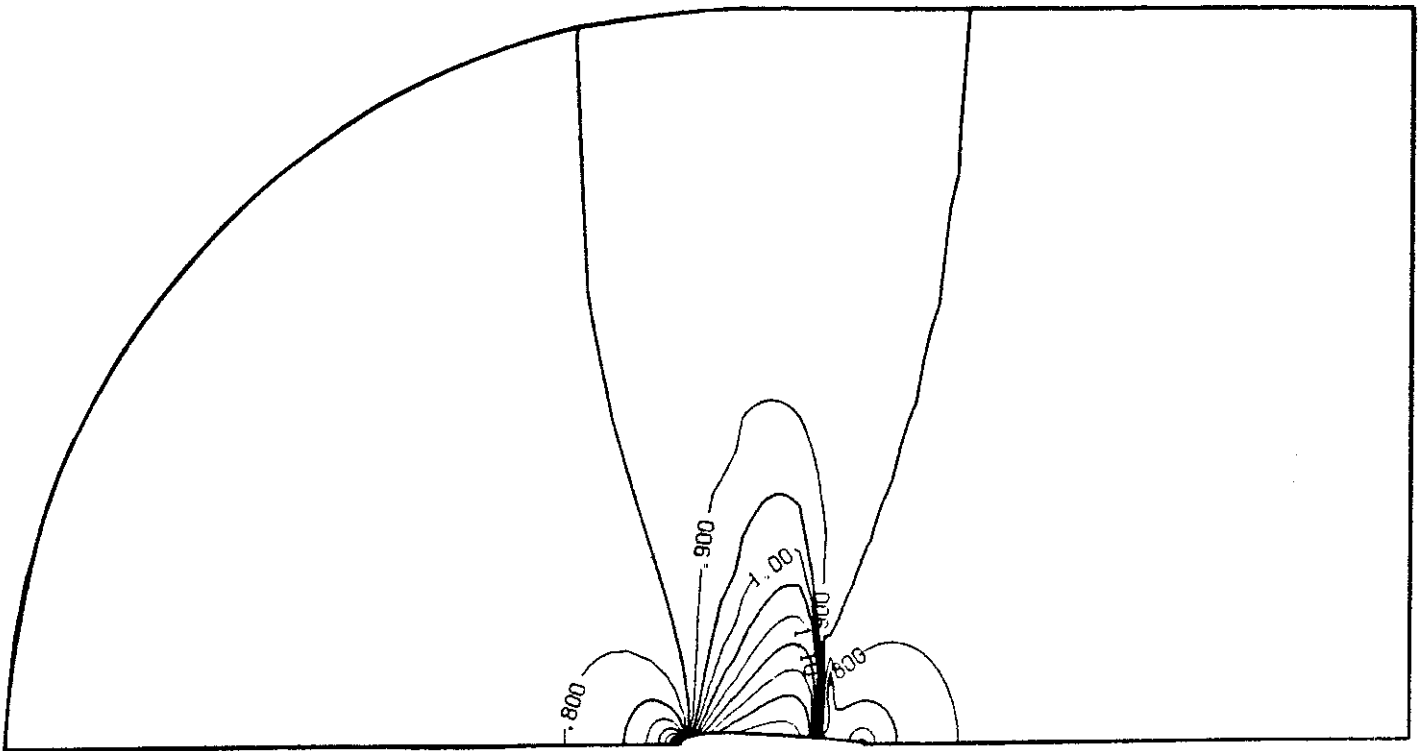


Figure 2.18 : NACA 0012, $M_\infty = 0.85$, maillage N41.
Isovaleurs du nombre de Mach. Vue globale.

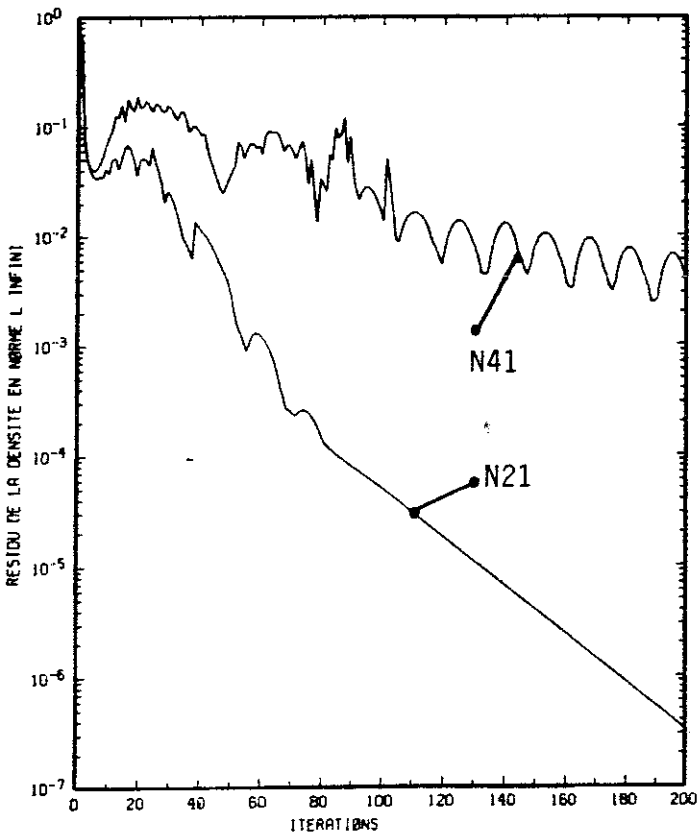


Figure 2.20 : NACA 0012, $M_\infty = 0.85$
Courbes de convergence

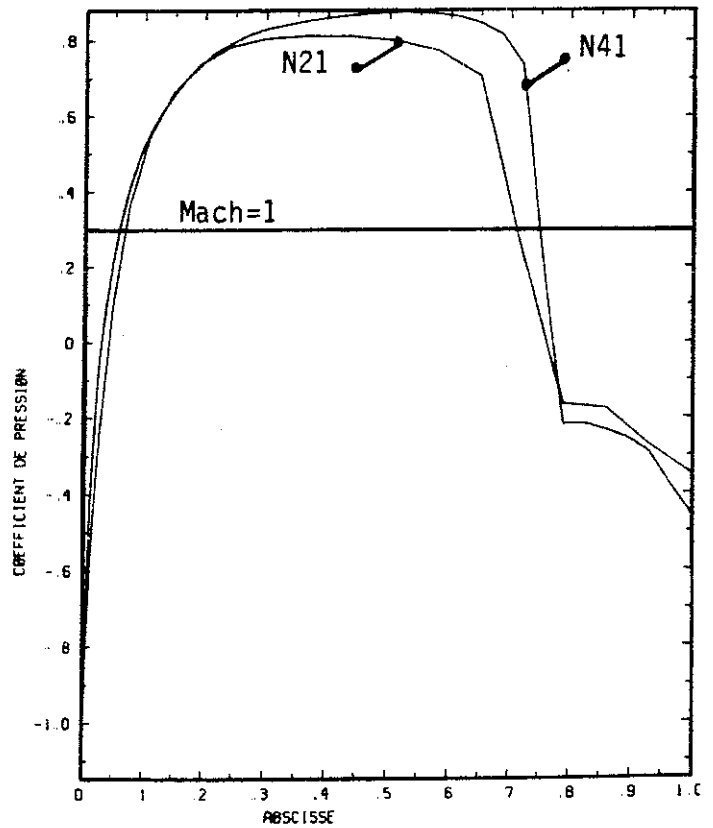


Figure 2.21 : NACA 0012, $M_\infty = 0.85$
Courbes de C_p sur le profil

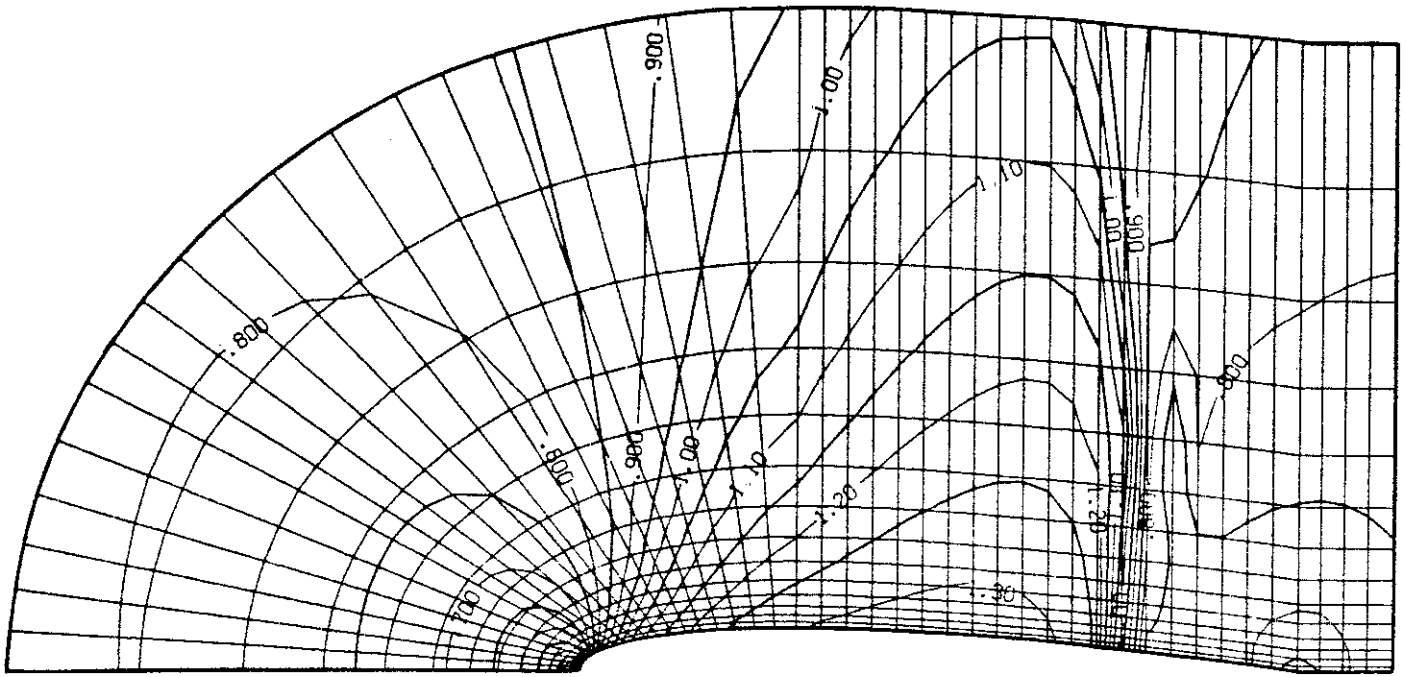


Figure 2.19 : NACA 0012, $M_\infty = 0.85$, maillage N41.
Isovaleurs du nombre de Mach. Détail.

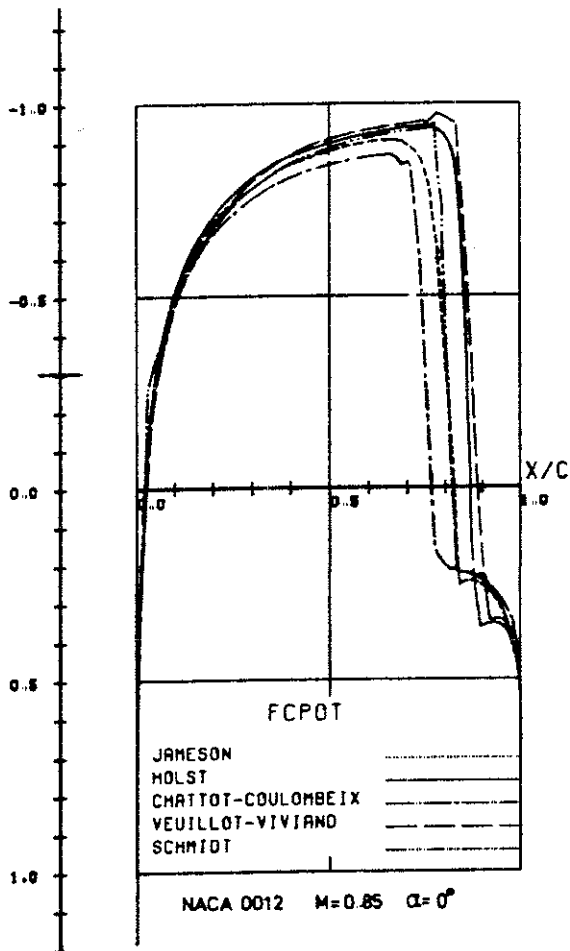


Figure 2.22 : Courbes de C_p
sur le profil, référence [43]

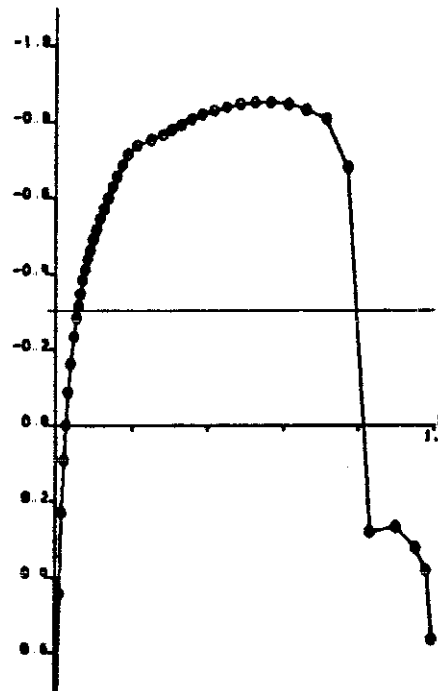
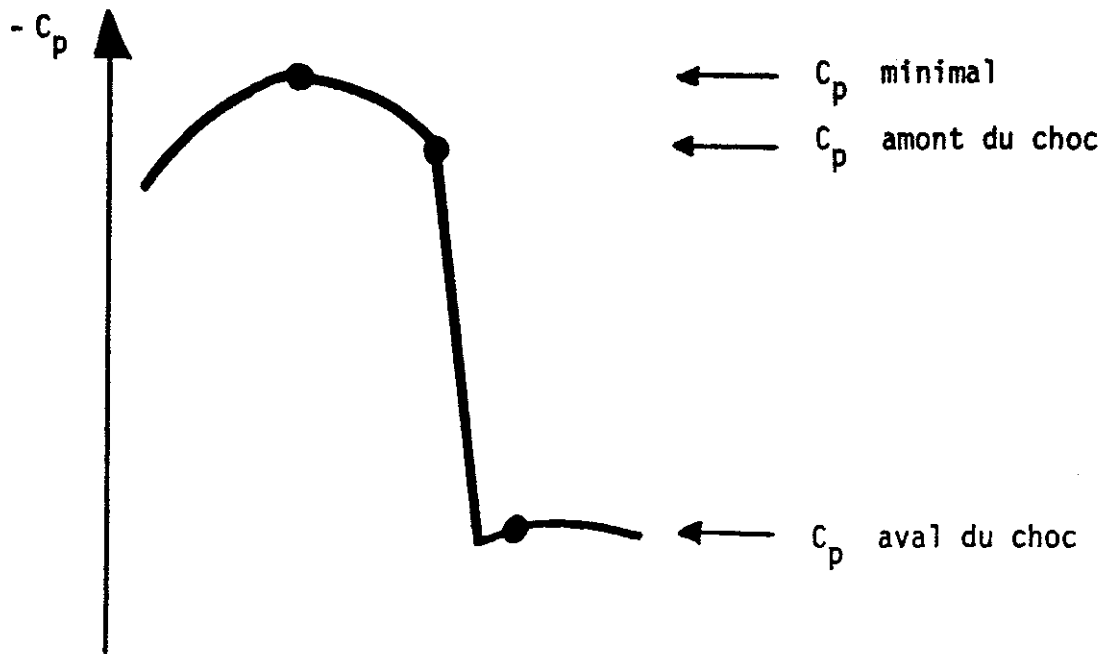


Figure 2.23 : NACA 0012, $M_\infty = 0.85$.
Courbes de C_p obtenues par AMARA [1]



	C_p minimal	C_p associé au C_p minimal par Rankine-Hugoniot	C_p amont du choc	C_p associé au C_p amont par Rankine-Hugoniot	C_p aval du choc	Position du choc
Maillage N41	-0.87	.25	-0.81	.20	.22	{.70 .80
Amara [1, maillage 3]	-0.85	.24	-0.68	.072	.28	.80
[43] {	maxi	.24	/	/	.36	.88
	mini	-.95	.34	/	/	.20

Figure 2.24 : NACA 0012, $M_\infty = 0.85$
Structure du choc numérique