

François DUBOIS

juin 1980

MEMOIRE DU D.E.A.
DE PHYSIQUE ATOMIQUE
ET STATISTIQUE

INTRODUCTION A L'ETUDE
DE LA DUALITE AU SENS DE
KRAMERS ET WANNIER

PLAN

I	Introduction	p 4
II	Dualité et modèle d'Ising à deux dimensions.	p 5
	1°) Introduction naïve de la dualité	p 6
	a) Développements de haute température	p 6
	b) Développements de basse température	p 11
	2°) Transformation de dualité	p 14
	3°) Premières applications.	p 17
	a) Température critique	p 17
	b) Dualité entre $\langle \sigma \rangle$ et $\langle s \rangle$	p 19
	c) Fonctions de corrélation	p 20
	4°) Premières extensions.	p 25
	a) Températures critiques des réseaux triangulaire et hexagonal	p 25
	b) Cas de la dimension 1 avec un champ extérieur	p 26
III	Transformation de dualité: étude abstraite	p 29
	1°) Généralisation du modèle d'Ising sans champ extérieur	p 29
	2°) Généralisation du modèle d'Ising en présence	

d'un champ extérieur.	p37
IV Applications	p41
1°) Modèle de jauge à quatre dimensions avec un spin à valeurs dans Z_5 .	p41
2°) Modèles de jauge "avec matière"	p45
a) Cas de la dimension deux	p46
b) Cas de la dimension trois.	p48
V Conclusion.	p52
Appendice A Equivalence Triangle-étoile	p53
Appendice B Aperçu de topologie combinatoire.	p56
1°) Simplexes	p56
2°) Complexes. Chaînes	p58
3°) Bord, Cobord	p60
4°) groupes d'homologie et de cohomologie.	p63
Appendice C A propos des théories de jauge.	p66
1°) le cas de l'électrodynamique	p66
2°) le cas de $SU(2)$	p68
3°) Passage du modèle d'Ising au modèle de jauge	
4°) conclusion	p72
Références	p74
Figures.	p78

1^{ère} PARTIE

Introduction.

au cours du stage de DEA effectué en physique théorique à Saclay durant juin 1980, nous avons étudié de façon détaillée la transformation de dualité de Krauss et Wannier. Avec le cours de mécanique statistique que donnait E Brézin au DEA, nous avons déjà rencontré cette technique. Dans la partie II, nous nous sommes donc contentés de cette première approche intuitive, pour généraliser ensuite le problème au III, et le traiter de façon très mathématique. Enfin, le IV présente quelques applications, principalement vers le domaine des théories de jauge sur réseau.

2^{ème} PARTIE

Dualité et modèle d'Ising à deux dimensions.

L'une des images les plus simples qu'on peut se faire d'un matériau ferromagnétique est celle que fournit le modèle d'Ising (1) : des spins sur un réseau, pointant soit vers le haut, soit vers le bas, chaque spin interagissant uniquement avec ses proches voisins, et le champ magnétique. Plus précisément, deux spins parallèles donnent au système une énergie plus faible que deux spins antiparallèles, et le champ magnétique tend à orienter chaque spin dans sa direction.

Ce modèle mathématique très simple permet de décrire des transitions de phase a priori différentes comme la transition paramagnétisme - ferromagnétisme, ou le voisinage du point critique dans la transition liquide - vapeur (2). L'un des plus grands succès fut la résolution exacte, par Onsager, du cas de la dimension 2 (ref 3). Mais si nous allons ici nous limiter à la dimension 2, c'est pour développer une idée antérieure, due à Kramers et Wannier (4) : la transfor-

mation de dualité (voir aussi 5)

1°) Introduction naïve de la dualité.

Nous allons pour le moment restreindre notre étude à un réseau plan carré. Le calcul de la fonction de partition demande de faire divers développements. Nous commencerons par la haute température, et après nous être assurés de leur convergence, dans un "bon" domaine, nous montrerons comment par dualité, on peut leur faire correspondre simplement des développements de basse température.

a) Développements de haute température

Le hamiltonien d'Ising peut s'écrire (en laissant de côté tout système d'unités) :

$$(2-1-1) \quad H = - \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - \frac{h}{\beta} \sum_i \sigma_i$$

où $\sum_{\langle ij \rangle}$ désigne une sommation sur les proches voisins du réseau, σ_i une variable associée à chaque site i et valant ± 1 , $\frac{h}{\beta}$ le champ magnétique qu'on prendra uniforme et \sum_i est une sommation sur les sites du réseau

Alors la fonction de partition Z_N pour un réseau de N sites, vaut.

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad Z_N &= \sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left\{ \beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i \right\} \\
 &= \sum_{\sigma_1 = \pm 1} \dots \sum_{\sigma_N = \pm 1} \exp \left\{ \beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i \right\}
 \end{aligned}$$

où β est l'inverse de la température.

Le calcul de Z_N est quelque chose de très difficile à faire: il y a en tout 2^N termes, soit par exemple pour un modeste réseau de $N = 10 \times 10$ sites, $2^{100} \approx 10^{30}$ termes (souvenons nous qu'il y a environ 10^{20} molécules dans une goutte d'eau!) Il est donc essentiel de chercher les termes dominants.

Nous allons commencer par faire un développement de haute température ($\beta \rightarrow 0$) en champ nul.

$$\begin{aligned}
 \text{on a} \quad Z_N &= \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{\beta \sigma_i \sigma_j} \\
 &= (ch\beta)^{L(N)} \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + \sigma_i \sigma_j th\beta)
 \end{aligned}$$

où $L(N)$ est le nombre de liens du réseau, ie $2N$

dans la limite thermodynamique. On pose $th\beta = t$, et on développe $\prod_{\langle ij \rangle} ()$ (voir par exemple ref 6), le champ $i \mapsto \sigma_i$ étant donné.

$$Z_N \text{ prend alors la forme. } \sum_{\{\sigma\}} \sum_n t^n (\sigma \sigma \dots \sigma)$$

• on a par exemple des termes du type $\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l t^2$

(cf figure 1)

Mais $\sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l$ se compose de deux termes: ceux pour lesquels $\sigma_i = +1$ et ceux où $\sigma_i = -1$.

$$\text{Donc } \sum_{\{\sigma\}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l = 2^{N-4} \left(\sum_{\sigma_j \sigma_k \sigma_l} \sigma_j \sigma_k \sigma_l - \sum_{\sigma_j \sigma_k \sigma_l} \sigma_j \sigma_k \sigma_l \right) = 0$$

Ainsi, les termes contribuant effectivement à Z_N sont ceux pour

lesquels chaque spin σ_i a un exposant pair (alors $\sum_{\{\sigma\}} 1 = 2^N$)

l'exemple le plus simple est celui d'une courbe fermée sans point

double (fig 2.) où tous les exposants sont 0 ou 2. Plus générale-

ment tout terme (ou diagramme) qui contribue est la juxtaposi-

tion de courbes fermées simples (6, et fig 3), on les appel-

lera "graphes fermés". Alors:

$$(2-1-3) \quad Z_N = (\text{ch}\beta)^{2N} 2^N \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} t^l g_l(N) \right)$$

où l désigne la longueur du périmètre du graphe et $g_l(N)$

le nombre de graphes de longueur l qu'on peut tracer sur

le réseau. Quel est l'intérêt du développement (2-1-3)?

La seule quantité physiquement intéressante est l'énergie

libre par site $f(\beta)$,

$$(2-1-4) \quad f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log Z_N}{N} \quad \text{et pourvu que}$$

l'expression (2-1-3) de Z_N ne tende pas diverger

9

$\frac{1}{N} \log Z_N$, on peut par cette méthode approcher l'énergie libre $f(\beta)$.

• Étudions donc la convergence (pour un réseau de dimension

d , dans ce paragraphe uniquement) de $\frac{1}{N} \log Z_N$, si

$$(2-1-5) \quad Z_N = (ch \beta)^{L(N)} z^N \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} g_l(N) t^l \right), \quad \text{avec}$$

$$(2-1-6) \quad L(N) = dN + o(1)$$

Nous allons classer les divers graphes suivant le nombre de parties connexes qu'ils présentent: on note $g_l^k(N)$ le nombre de graphes fermés, à k parties connexes et de longueur l .

alors:

$$(2-1-7) \quad g_l(N) = \sum_{k=1}^l g_l^k(N) \quad \text{et par suite,}$$

$g_l^1(N)$ est le nombre de graphes connexes fermés de longueur l .

* on a:

$$(2-1-8) \quad g_l^1(N) \leq \frac{N}{l} (2d)^l \quad \text{En effet, le choix du}$$

site de départ donne un facteur N , on fait ensuite l pas au hasard, donc il ne peut y avoir plus de $(2d)^l$ possibilités, et $\frac{1}{l}$ est dû au surcomptage car on aurait pu partir d'un point quelconque du graphe.

* Notons aussi que:

$$(2-1-9) \quad g_l^k(N) \leq \frac{1}{k!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_k = l} g_{\alpha_1}^1(N) \dots g_{\alpha_k}^1(N)$$

car pour avoir un graphe de k morceaux, il suffit d'accoler k graphes connexes. [il y a surcomptage, car si deux graphes connexes se coupent, ils forment un graphe connexe, donc le membre de droite de (2-1-9) compte aussi des graphes à moins de k morceaux.]

* on majore maintenant la série $\sum_{\ell} g_{\ell}(N) t^{\ell}$, avec $g_0 = 1$.

En développant $g_{\ell}(N)$ suivant (2-1-7) puis en majorant chaque $g_{\ell}^k(N)$ par (2-1-9), on reconnaît la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{\ell} g_{\ell}'(N) t^{\ell} \right)^k, \text{ ie } \sum_{\ell} g_{\ell}'(N) t^{\ell}$$

Vu (2-1-8) qui majore $g_{\ell}'(N)$, on a:

$$(2-1-10) \quad \log \left[\sum_{\ell} g_{\ell}(N) t^{\ell} \right] \leq N \sum_{k \geq 1} \frac{(2dt)^k}{k}, \text{ donc}$$

$$(2-1-11) \quad \left| \frac{1}{N} \log Z_N \right| \leq \log 2 + \left[d + o\left(\frac{1}{N}\right) \right] \log ch \beta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2dt)^k}{k}$$

La série de (2-1-11) converge pour $2dt < 1$, ie

β assez petit. Ainsi, à T assez grand, $\frac{1}{N} \log Z_N$ reste borné

* on peut aussi s'assurer explicitement de la convergence

de $\frac{1}{N} \log Z_N$; par exemple, $\frac{1}{N} \log(Z_N)$ est croissant en N si

β est assez petit. En effet,

$$Z_{N+1} = \sum_{\{i,j\} \in \sigma_{N+1}} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{\beta \sigma_i \sigma_j} \prod_{i \text{ voisin de } j} e^{\beta \sigma_i \sigma_{N+1}}$$

$$Z_{N+1} = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{\beta \sigma_i \sigma_j} \prod_{i \text{ voisin de "N+1"}} 2 \operatorname{ch} \beta \sigma_i$$

vu que $2 \leq 2 \operatorname{ch} \beta \sigma_i$ et vu qu'un site a au plus

$2d$ voisins les plus proches, on a:

$$2^{2d} Z_N \leq Z_{N+1}, \text{ ce qui entraîne}$$

$$(2-1-12) \quad \frac{\log Z_{N+1}}{N+1} - \frac{\log Z_N}{N} \geq \frac{1}{N+1} \left\{ (2d-1) \log 2 - \left[d + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] \log \operatorname{ch} \beta - \sum_{k \geq 1} \frac{(2d)^k}{k} (\operatorname{th} \beta)^k \right\}$$

Le membre de droite de (2-1-12) est alors positif ou nul si

β est assez petit.

• Les séries de haute température permettent de connaître $f(\beta)$ dans un certain domaine. Leur intérêt? A partir d'une expression approchée de $f(\beta)$, trouver la singularité "la plus proche", qui on identifie ensuite à une température de transition de phase (7).

b) Mais on peut aussi faire des développements de basse température. Il y a deux configurations possibles pour l'énergie la plus basse: tous les σ_i valant $+1$, ou tous les σ_i valant -1 . D'ailleurs, tous les niveaux d'énergie de (2-1-1) ou $h=0$ sont dégénérés, vu que la transformation

$\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ ne change rien à l'énergie H en champ 0. Il n'y

a invariance globale du hamiltonien par cette transformation. Essayons de voir quels sont les termes correctifs à la configuration où tous les spins sont vers le haut par exemple. Son niveau d'énergie est $-L(N)$ (nombre de liens) mais si on retourne un spin, on touche à quatre liens, et la nouvelle énergie est $-L(N) + (2 \times 4)$. Mais

$$\frac{Z}{2} = e^{-\beta H(\{\sigma_i = 1\})} [1 + N e^{-8\beta} + \dots]$$

• Si on retourne plusieurs spins, traçons sur un réseau décalé d'une demi-maille dans chaque direction un graphe, qui entoure chaque bloc de spins retournés (fig 4). Ce graphe est fermé, et la différence d'énergie ΔH entre la nouvelle configuration et l'ancienne est telle que:

$$-\beta \Delta H = -2\beta \times (\text{longueur du graphe})$$

$$\text{alors : (2-1-13)} \quad \frac{1}{2} Z_N = e^{\beta L(N)} \left[1 + \sum_{\text{graphes fermés}} (e^{-2\beta})^{\text{longueur du graphe}} \right]$$

Notons qu'on somme maintenant

sur le nouveau réseau qu'on appelle réseau dual, ou réseau des centres (figure 5). Remarquons, pour justifier tout à fait (2-1-13) que si on se donne un graphe fermé (au sens du 1°) a), il définit, sur un réseau plan carré, un

extérieure et un intérieur, et si on se donne des conditions aux limites (par exemple, tous les spins σ valent $+1$ sur le bord du réseau), on obtient une configuration $\{\sigma_i\}$ de spins sans ambiguïté ($\sigma_i = -1$ à l'intérieur du graphe, $+1$ sinon) (figure 6)

(R) Ceci n'est plus vrai si le réseau est tracé sur un tore par exemple (fig 7). Ainsi, le graphe représenté ne définit ni intérieur, ni extérieur.

Donc on a:

$$(2.1.14) \quad Z_N = 2 e^{\beta L(N)} \left[1 + \sum_{l \geq 1} g_l^*(N) (e^{-2\beta})^l \right]$$

où $g_l^*(N)$ désigne le nombre de graphes fermés de longueur l tracés sur le réseau dual.

Mais on reconnaît dans ce développement (à un facteur multiplicatif près) une série du type haute température ou plus haut, mais pour un système de spins sur le réseau dual à une température $1/\beta^*$ donnée par:

$$\mathfrak{h}\beta^* = e^{-2\beta} \quad \text{soit} \quad \beta^* = -\frac{1}{2} \log \mathfrak{h}\beta$$

$1/\beta^*$ est dite "température duale".

2°) Transformation de dualité

Nous allons dans ce paragraphe construire de façon plus précise une transformation qui fait passer du réseau initial $\bar{\alpha}$ son dual, et associe à toute configuration de spins $\{\sigma\}$ une configuration $\{s\}$ sur le réseau dual, en se débarrassant complètement des développements de haute et basse température qui nous avaient guidés jusque là. (il est beaucoup emprunté à (8) dans ce paragraphe)

on reprend donc la fonction de partition:

$$(2.2.1) \quad Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j} \quad \text{ou}$$

$$(2.2.2) \quad \exp(\beta \sigma_i \sigma_j) = \sum_{k=0}^1 c_k(\beta) (\sigma_i \sigma_j)^k$$

où $c_0 = \text{ch}$ et $c_1 = \text{sh}$

$$\text{donc} \quad Z = \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\langle ij \rangle} \sum_{k=0}^1 c_k(\beta) (\sigma_i \sigma_j)^k$$

Une paire $\langle i, j \rangle$ de proches voisins définit un lien l sur le réseau initial. (voir figure 8) le lien peut être noté $(\mu; i)$ où i désigne l'un des deux sites formant l'extrémité de l : celle de gauche (resp du bas) par exemple, et μ ($\mu=1,2$) désigne une direction: 1 vers la droite (resp 2 vers le haut)

associons alors à chaque lien (μ, i) une variable

$k_{\mu, i}$ valant 0 ou 1 alors

$$Z = \sum_{\{k\}} \sum_{\{k_{\mu, i}\}} \left(\prod_{\text{liens}} c_{k_{\mu}}(\beta) \right) \prod_{\text{sites } i} \sigma_i^{\sum_i k_{\mu}}$$

et $\sum_i k_{\mu}$ signifie qu'on somme sur tous les liens arrivant au site i , d'où

$$Z = \sum_{\{k\}} \left[\prod_{\text{liens}} c_{k_{\mu}}(\beta) \right] \prod_i \left(\sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_i^{\sum_i k_{\mu}} \right)$$

$$\begin{cases} \text{Si } \sum_i k_{\mu} \text{ est pair,} & \text{alors } \sum_{\sigma_i} () = 2 \\ \text{Si } \sum_i k_{\mu} \text{ est impair,} & \text{alors } \sum_{\sigma_i} () = 0 \end{cases}$$

Soit δ_2 la fonction : $\delta_2 = 1_{2\mathbb{Z}}$, ie

x pair $\mapsto 1$ x impair $\mapsto 0$ Alors

$$(2.2.3) \quad Z = \sum_{\{k\}} \left[\prod_{\mu} c_{k_{\mu}}(\beta) \right] \prod_i \left[2 \delta_2 \left(\sum_i k_{\mu} \right) \right]$$

on va s'intéresser aux seuls k_{μ} tels que, pour tout

$$\text{site } i, \quad \sum_i k_{\mu} \in 2\mathbb{Z}$$

alors on vérifie immédiatement, et on montrera plus

loin que dans le cas d'un réseau plan, on peut trouver

un champ $i \mapsto s_i$ défini sur le réseau dual,

à valeurs dans $\{-1, +1\}$, de façon que

$$(2.2.4) \quad k_{\mu, i} = \frac{1}{2} (1 - s_i s_{i - \hat{\nu}}) \quad \text{où } \mu \neq \nu$$

(cf figure 9)

(R) $i \xrightarrow{\hat{v}}$ désigne le site voisin du site i , dans la direction " \hat{v} " (voir figure 10)

Si on remarque que

$$(2-2-5) \quad c_R(\beta) = \text{ch } \beta \exp(k \log \text{th } \beta), \text{ on a donc}$$

$$C_{k_{p,i}}(\beta) = (\text{th } \beta \text{ ch } \beta)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_i s_i s_{i \xrightarrow{\hat{v}}} \log \text{th } \beta\right)$$

si (2-2-4) est satisfait

Et en regroupant les termes,

$$(2-2-6) \quad Z_N = \frac{1}{2} \sum_{\{s_i\}} \prod_{\text{liens}} 2^N \left[(\text{ch } \beta \text{ th } \beta)^{1/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_i s_i s_j \log \text{th } \beta} \right]$$

$$(2-2-7) \quad Z_N = 2^{N-1} (\text{th } \beta \text{ ch } \beta)^{\frac{1}{2} L(N)} \sum_{\{s_i\}} e^{\beta^* \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j}, \text{ où}$$

$$(2-2-8) \quad \beta^* = -\frac{1}{2} \log \text{th } \beta$$

Z est donc (à un facteur multiplicatif près) la fonction de partition d'un système de spins d'Ising sur le réseau dual, à la température "duale" β^* . Nous pouvons aussi écrire (2-2-8) sous la forme:

$$(2-2-9) \quad (\text{sh } 2\beta)(\text{sh } 2\beta^*) = 1, \text{ et } \beta \mapsto \beta^* \text{ a}$$

l'allure indiquée sur la figure 11.

• Problèmes aux limites

Prenons un réseau $N = M_1 \times M_2$ de réseau

dual est alors à priori un réseau $(M_1 - 1) \times (M_2 - 1)$ mais

il doit être tel que pour tout lien $(\mu; i)$ du réseau initial, il existe i et $i-\hat{v}$ de façon que (2.2.4) soit vérifiée. Or que se passe-t-il si le lien $(\mu; i)$ est sur le bord? A priori, il n'y a qu'un site du réseau dual qui lui soit proche. Il est donc nécessaire d'ajouter au réseau dual un point supplémentaire, "voisin" de tous les liens du bord du réseau initial, et idéalisé par des flèches sur la figure 12.

Alors la transformation globale $s_i \mapsto -s_i$ laisse la configuration $\{k_\mu\}$ invariante (et c'est la seule). Ceci explique la présence du facteur $\frac{1}{2}$ dans (2.2.6).

3°) Premières applications

a) Température critique du modèle d'Ising à $d=2$

La dualité échange haute et basse température. Ainsi les développements (légitimes) de haute température se traduisent par dualité. Mais il faut remarquer qu'ici, le dual du modèle d'Ising carré est encore un modèle d'Ising de même type. On dit qu'il y a "self dualité", ce qui n'est pas le cas le plus général.

Mais les développements de basse température sur le modèle d'Ising sont eux aussi légitimés par dualité. De plus, vu (2.1.4) et (2.2.7) on a:

$$(2.3.1) \quad f(\beta) = - \operatorname{sh} 2\beta^* + f(\beta^*)$$

on sait (9) que les transitions de phase se traduisent sur f par des points de singularité, et on a montré (voir (10) par exemple) que le modèle d'Ising présente au moins une transition (i.e. il existe un domaine de température où il subsiste une aimantation spontanée en champ nul). Si celle-ci est unique (c'est le cas ici, voir 3) la singularité sur $f(\beta)$ est aussi présente sur $f(\beta^*)$ vu la self-dualité, donc pour n'avoir qu'un point de singularité, on doit imposer la relation:

$$(2.3.2) \quad \beta_c^* = \beta_c, \text{ d'où}$$

$$(2.3.3) \quad \beta_c^* = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$$

• S'il y a deux températures de transition qu'on notera β_1 et β_2 (ce qui indique une transition du 1^o ordre, voir (11)), alors il y en a deux aussi pour le modèle dual, et la self-dualité impose maintenant:

$$(2-3-4) \quad (\text{sh } 2\beta_1)(\text{sh } 2\beta_2) = 1$$

• Le procédé se généralise à un nombre quelconque de transitions, la dualité couplant entre elles les diverses températures critiques (figure 13)

(R) Notons que toutes les relations qui imposent la dualité sont exactes, ce qui donne des connaissances très précieuses sur les températures critiques a priori possibles.

b) Dualité entre paramètres d'ordres $\langle \sigma \rangle$ et $\langle s \rangle$.

L'un des paramètres réellement intéressants dans le modèle d'Ising est le paramètre d'ordre $\langle \sigma \rangle$ (aimantation locale) qui vaut:

$$(2-3-5) \quad \langle \sigma \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} \left\{ \log \left[\sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_j \sigma_j} \right] \right\}$$

On sait que le modèle présente deux phases:

- l'une désordonnée, où $\langle \sigma \rangle = 0$ (haute température)
- l'autre ordonnée, où $\langle \sigma \rangle \neq 0$ (basse température)

Si on définit l'"aimantation duale" $\langle s \rangle$ par

$$\langle s \rangle = \frac{1}{Z} \left(\frac{1}{2} \text{sh } 2\beta^* \right) \sum_{\{s\}} s_i e^{\beta^* \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j},$$

alors on a par dualité $\langle s \rangle = 0$ si $\langle \sigma \rangle \neq 0$,

et $\langle s \rangle \neq 0$ si $\langle \sigma \rangle = 0$. Donc $\langle s \rangle$ est un paramètre "de désordre".

c) Fonctions de corrélation

On connaît l'importance des corrélations lors d'une transition de phase, (voir ref 12 et 13) donc il peut être très intéressant de calculer la fonction de corrélation de désordre - désordre $\langle s_l s_m \rangle$ par dualité. On a:

$$(2.3.6) \quad \langle s_l s_m \rangle = \frac{\sum_{\{s\}} s_l s_m \exp(\beta^* \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j)}{\sum_{\{s\}} \exp(\beta^* \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j)} = \frac{N_{lm}}{D}$$

De façon analogue à ce qui a été fait plus haut (14)

$$\begin{aligned} N_{lm} &= \sum_{\{s\}} s_l s_m \prod_{\langle ij \rangle} \sum_{k=0}^1 c_k(\beta^*) (s_i s_j)^k \\ &= \sum_{\{k_{\mu,i}\}} \sum_{\{s\}} \prod_{\text{liens}} c_k(\beta^*) \left[\prod_{i \neq l,m} (s_i)^{\sum_{\mu} k_{\mu}} \right] (s_l)^{1 + \sum_{\mu} k_{\mu}} (s_m)^{1 + \sum_{\mu} k_{\mu}} \end{aligned}$$

soit,

$$(2.3.7) \quad N_{lm} = 2^N \sum_{\{k\}} \prod_{\text{liens}} c_k(\beta^*) \times \delta_2(1 + \sum_{\mu} k_{\mu}) \times \delta_2(1 + \sum_{\mu} k_{\mu}) \times \prod_{i \neq l,m} \delta_2(\sum_{\mu} k_{\mu})$$

• Nous allons associer à chaque site du réseau dual du réseau dual (ie du réseau initial) un système de spins σ_i de la façon suivante (fig 14) : soit L un chemin tracé sur le réseau dual, joignant les sites l et m . alors tout lien (μ, i) du réseau initial coupe L , ou ne le coupe pas.

$$(2.3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dans le 1}^{\text{o}} \text{ cas, on pose } k_{\mu,i} = \frac{1}{2} (1 + \sigma_i \sigma_{i+\hat{\mu}}) \\ \text{et dans le 2}^{\text{o}} \text{ cas, on pose } k_{\mu,i} = \frac{1}{2} (1 - \sigma_i \sigma_{i+\hat{\mu}}) \end{array} \right.$$

On peut montrer facilement que tout champ $k_{\mu,i}$ écrit suivant (2.3.8) vérifie bien les conditions :

$$\delta_2 (1 + \sum_e k_\mu) = \delta_2 (1 + \sum_m k_\mu) = \delta_2 (\sum_i k_\mu) = 1$$

et réciproquement, que tout champ $k_{\mu,i}$ satisfaisant à ces relations permet de définir un champ σ_i sur le réseau initial, par les formules (2.3.8) - Le champ $i \mapsto \sigma_i$ n'est bien sûr pas unique puisque la transformation globale $\sigma \mapsto -\sigma$ permet de retrouver les mêmes k_μ .

Remarquons de plus que le choix d'un chemin L influence le choix des variables σ_i .

Nous allons réécrire N_{lm} en définissant une variable β_{ij} sur chaque lien du réseau direct, ainsi :

Si le lien $\langle i,j \rangle$ coupe L , alors $\beta_{ij} = -\beta$, et si $\langle i,j \rangle$ ne coupe pas L , alors $\beta_{ij} = \beta$ alors :

$$(2.3.9) \quad k_{\mu,i} = \frac{1}{2} (1 - \sigma_i \beta_{ij} \sigma_j)$$

et comme au 1^o, N_{lm} peut s'écrire :

$$(2.3.10) \quad \langle 1_l 1_m \rangle = \frac{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left(\sum_{\langle \rangle} \sigma_i \beta_{ij} \sigma_j \right)}{\sum_{\{\sigma_i\}} \exp \left(\beta \sum_{\langle \rangle} \sigma_i \sigma_j \right)}$$

Prendre $\beta_{ij} = \beta$ revient à mettre un lien ferromagnétique habituel (qui a tendance à aligner les spins) alors que $\beta_{ij} = -\beta$ est un lien antiferromagnétique (deux voisins tendent alors à être antiparallèles)

La fonction de corrélation désordre-désordre s'exprime donc comme le rapport de deux fonctions de partition. Le dénominateur est un modèle d'Ising ferromagnétique, alors que le numérateur est un modèle d'Ising contenant un mélange de liens ferro- et antiferromagnétiques (article original: Kadaneff - Ceva, ref 15)

Le choix des β_{ij} n'est pas unique, mais correspond exactement au choix du chemin L de départ. Si par exemple, on change un seul spin σ_i , et en même temps le signe des quatre liens β_{ij} qui y aboutissent, on ne change pas $\sigma_i \beta_{ij} \sigma_j$, donc $\langle s_i s_m \rangle$ reste inchangé (voir fig 15). Mais si le chemin L passe près du site i , on vérifie immédiatement qu'il est changé. De même, si L ne passe pas près de i (fig 16) changer les quatre liens revient à ajouter une boucle à L .

Ainsi, le numérateur N_{em} est invariant sous un certain nombre de transformations (invariance de jauge, locale).

(R) On se rend compte alors aisément que toute fonction de corrélation de désordre $\langle s_{i_1} \dots s_{i_m} \rangle$ peut s'exprimer comme rapport de fonctions de partition du type Ising, avec quelques liens antiferromagnétiques au numérateur. Ces moyennes $\langle s_{i_1} \dots s_{i_n} \rangle$ sont alors fort utiles lors de l'étude des verres de spin, on l'en envisage une distribution à l'histoire de liens ferro et antiferromagnétiques (16)

(R) Cas des basses températures.

Cherchons comment évolue le désordre $\langle s_l s_m \rangle$ lorsque la température tend vers 0 ($\beta \gg 1$) (Or, qui à ces températures, les spins sont de plus en plus alignés, on s'attend à ce que $\langle s_l s_m \rangle \rightarrow 0$)

on suppose ici que $|l-m| = \rho$ est grand devant a , la maille du réseau. On prend un chemin L "le plus direct possible" pour aller de l à m . Alors

$$(2-3.11) \quad D \propto \exp\left(\beta \sum_{\langle ij \rangle} 1\right) \quad \text{-car à } \beta$$

grand, la configuration la plus probable est l'une de celles

où les spins sont tous alignés. Si on met des liens anti-ferromagnétiques, les spins voisins auront tendance à être anti-parallèles.

• Mais que se passe-t-il par exemple pour les sites i, j, k, m au bout du chemin L , qui entourent le site l (fig 17)? Supposons $\sigma_l = +1$. alors par le chemin $i \rightarrow m \rightarrow k \rightarrow j$, le site j a tendance à pointer vers le haut, mais en suivant le lien anti-ferromagnétique $i \rightarrow j$, j a tendance à pointer vers le bas!

Cette contradiction est présente dès qu'une plaquette possède un nombre impair de liens anti-ferromagnétiques, et porte le nom de "plaquette frustrée" (17, 18) -

• alors d'une des configurations les plus probables est du type présenté sur la figure (18) et la fonction de partition N_{fm} est proportionnelle à $\exp \beta \left(\sum_{\langle \rangle} 1 - 2 \rho \right)$.

Donc

$$(2.3.12) \quad \langle s_l s_m \rangle \sim e^{-2\beta\rho} \quad \text{et à basse tempé-}$$

nature, l'ordre du réseau dual décroît exponentiellement, ou

l'ordre croissant sur le réseau initial.

4°) Premières extensions

a) Températures critiques des réseaux triangulaire et hexagonal. Nous allons généraliser l'étude précédente au cas d'un réseau un peu plus compliqué, le réseau triangulaire équilatéral, qui nous conduira par dualité au réseau hexagonal.

on peut reprendre l'étude du paragraphe 2 : la variable de lien k_μ peut s'écrire (cf 2-2-4) :

$$k_\mu = \frac{1}{2} (1 - s_i s_{i+\hat{\mu}})$$

si s_i est un spin défini au centre de chaque triangle élémentaire du réseau initial. Et la suite est inchangée. alors on voit (fig 19) que le réseau dual ainsi constitué est un réseau hexagonal (ref 19)

Mais, en supposant que l'un des réseaux ne présente qu'une température critique β_c , on a (cf 2-3 4)

$$(2-4-1) \quad (\text{sh } 2\beta_c^*) (\text{sh } 2\beta_c) = 1$$

Mais le dual du réseau hexagonal est le triangle, donc cette relation peut aussi s'écrire:

$$(2-4-2) \quad (\text{sh } 2\beta_c^{\text{tr}}) (\text{sh } 2\beta_c^{\text{hex}}) = 1$$

Où qu'on possède aussi une deuxième relation entre les énergies libres (cf appendice A), la singularité sur f^{hex} se transmet sur f^{tri} seulement dans le cas où

$$(2.4.3) \quad \beta_c^{\text{hex}} = \frac{1}{4} \log \frac{\text{ch } 3\beta_c^{\text{tri}}}{\text{ch } \beta_c^{\text{tri}}}$$

Les relations (2.4.2) et (2.4.3) prouvent qu'alors

$$\beta_c^{\text{tri}} = \frac{1}{4} \log 3, \quad \beta_c^{\text{hex}} = \log \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

b) Cas de la dimension un avec un champ extérieur.

Nous allons, dans ce paragraphe, appliquer la transformation de dualité pour retrouver un résultat classique: le calcul de la fonction de partition pour le hamiltonien d'Ising en dimension 1, avec un champ extérieur. Si gnalons avant tout qu'on a d'autres méthodes pour traiter ce problème (ref 19 bis) et que notre ambition est uniquement d'introduire certaines idées qui seront développées au IV dans les modèles de jauge où reprend la fonction de partition initiale:

$$(2.4.4) \quad Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i} \\ = (\text{ch } \beta)^{L(N)} (\text{ch } h)^N \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\langle ij \rangle} (1 + \sigma_i \sigma_j \text{th } \beta) \prod_i (1 + \sigma_i \text{th } h)$$

Les termes qui contribuent effectivement sont ceux pour les quels chaque exposant est pair, donc les graphes joignant entre eux un nombre pair de points du réseau; chaque "bout" du graphe a une contribution en hk , et chaque lien contribue pour $h\beta$

[Ainsi, le graphe de la figure 20 a une contribution proportionnelle à $(hk)^4 (h\beta)^5$]

On peut comme au 2^p) caractériser un graphe par un ensemble de variables $s_i = \pm 1$ définies sur le réseau dual :

$$\begin{cases} s_i = -1 & \text{si } i \text{ est "dans" le graphe} \\ s_i = +1 & \text{si } i \text{ est "hors" du graphe} \end{cases}$$

Alors la longueur d'un graphe est $\sum_i \frac{1-s_i}{2}$, et le nombre d'extrémités vaut $\sum_{\langle ij \rangle} \frac{1-s_i s_j}{2}$. Par suite,

$$Z = (2ch\beta ch)^N \times \frac{1}{2} \times \sum_{\{s\}} (h\beta)^{\sum_i \frac{1-s_i}{2}} (hk)^{\sum_{\langle ij \rangle} \frac{1-s_i s_j}{2}}$$

donc $Z \propto \sum_{\{s\}} e^{\beta^* \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j + h^* \sum_i s_i}$, où

$$(2-4-5) \quad \beta^* = -\frac{1}{2} \log hk, \quad \text{et} \quad h^* = -\frac{1}{2} \log h\beta.$$

Nous constatons qu'une fois encore, on tombe sur un modèle self-dual.

• Si $h=0$, alors $\beta^* = \infty$ (température nulle sur le réseau dual), et le terme en $(th)^N \sum \frac{1-s_i s_j}{2}$ est nul, sauf si l'exposant est nul, ie $s_i s_j = 1$ pour tout $\langle i, j \rangle$. On peut alors montrer (par des méthodes analogues à celles développées au III et dans l'appendice B) que cette condition n'est réalisée que pour $s_i = 1$ pour tout i (ou $s_i = -1$ pour tout i). Dans ces conditions,

$$Z_N = \frac{1}{2} (2ch\beta)^N [1 + (th\beta)^N], \text{ soit}$$

$$(2-4-6) \quad Z_N = \frac{1}{2} [(2ch\beta)^N + (2sh\beta)^N]$$

• Nous venons de voir, dans les exemples traités au 3°) et 4°) que la transformation de dualité s'avère être un outil fort puissant.

3^{ème} PARTIE

Transformation de dualité: étude abstraite

1°) Généralisation du modèle d'Ising sans champ extérieur

Nous allons dans cette partie, traiter la transformation de dualité de la façon la plus générale possible:

- le réseau carré du II devient un complexe de dimension (voir l'appendice B pour les définitions de topologie combinatoire)

- Les spins σ deviennent des variables R prenant leur valeur dans un groupe abélien compact G donné, et définies sur des cellules de dimension $(k-1)$.

On écrit la fonction de partition sous la forme :

$$(3-1-1) \quad Z = \sum_{\text{configurations } R} e^{S(R)}, \quad \text{où}$$

$$S = -\frac{H}{kT} \text{ est l'action.}$$

Comme S doit être hermitique, on impose à R d'être une $(k-1)$ chaîne sur G , donc si on note multiplicativement la loi du groupe G , on a:

30 (3-1-2)
$$R(-c_j^{k-1}) = [R(c_j^{k-1})]^{-1}$$
 (avec les notations $R(c_j^{k-1}) = R_j$, $R_{-j} = (R_j)^{-1}$)

on donne alors à S la forme suivante:

(3-1-3)
$$S(R) = \sum_{k \text{ cellules } c^k} \chi \left(\begin{array}{c} \Pi \\ c_j^{k-1} \text{ à la frontière} \\ \text{de } c^k \end{array} R_j \right)$$

χ étant une fonction réelle définie sur le groupe G .

d'où
$$S(R) = \sum_{\substack{\text{couples de } k \text{ cellules} \\ (c^k, -c^k)}} \left[\chi \left(\begin{array}{c} \Pi \\ \Delta c^k \end{array} R \right) + \chi \left(\left(\begin{array}{c} \Pi \\ \Delta c^k \end{array} R \right)^{-1} \right) \right]$$

Il reste à changer la définition de

χ , on pose:

(3-1-4)
$$S(R) = \sum_{\substack{\text{couples } (c_i^k, -c_i^k) \\ \sim}} \chi \left[\begin{array}{c} \Pi \\ c_j^{k-1} \in \Delta c_i^k \end{array} R_j \right]$$

$$= \sum_{c_i^k} \chi \left(\begin{array}{c} \Pi \\ \Delta c_i^k \end{array} R_j \right)$$

• Il reste à éclaircir ce qu'est $\begin{array}{c} \Pi \\ c_j^{k-1} \in \Delta c_i^k \end{array} R_j$

Notons avant tout que physiquement,

$\begin{array}{c} \Pi \\ \Delta c^k \end{array} R_j$ signifie que si une cellule c^k est donnée, les seuls spins généralisés R_j qui vont intervenir se trouvent sur la frontière de c^k , donc que deux spins R_j n'interagissent que s'ils sont proches voisins, et portés par des cellules incidentes à une même cellule c^k de dimension supérieure.

on suppose donnée la cellule c^k avec son orientation

alors $\left(\prod_{c_j^{k-1} \in \Delta c^k} R_j \right)$ désigne en fait

$$\prod_{c_j^{k-1}} R_j \frac{1}{2} (c^k; c_j^{k-1})$$

En effet, si c^k et c_j^{k-1} ne sont pas incidentes, R_j

ne contribue pas, et si elles le sont, alors

$$R_j \frac{1}{2} (c^k; c_j^{k-1}) \times R_{-j} \frac{1}{2} (c^k; -c_j^{k-1}) = R_j (c^k; c_j^{k-1})$$

l'exposant $\frac{1}{2}$ n'est donc qu'une notation commode, et

dans le produit total $\prod_{\Delta c^k} R_j$ figurent toutes les $(k-1)$ cellules incidentes à c^k .

• Exemple Dans le cas du modèle d'Ising, les R_j sont dans $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$, on les note σ_i . On a de plus $k=1$. un lien $l = \langle i, j \rangle$ orienté définit une "orientation sur les points" i et j , à savoir -1 sur i , et $+1$ sur j (voir figure 8), et $\prod_{\Delta c^1} R_j$ se réduit à $\sigma_i \sigma_j^{-1} = \sigma_i \sigma_j$.

• Alors, G étant abélien, χ n'est fonction que des classes de conjugaison du groupe, et e^X s'exprime comme combinaison linéaire des caractères irréductibles χ_n de G

(voir nos exemples (2)) on écrit donc écrivons

$$(3.1.5) \quad Z = \sum_{\substack{(k-1)\text{ chaînes} \\ R}} \prod_{\substack{k\text{-cellules} \\ c_i^k}} \left[\sum_{\pi} \beta(\pi) \chi_{\pi} \left(\prod_{\Delta c_i^k} R_j \right) \right]$$

on note χ_0 le caractère $G \ni g \mapsto 1$, et vu que

$$\beta(\pi) = \sum_{g \in G} \chi_{\pi}(g^{-1}) e^{\chi(g)} \quad \left(\text{ou } \sum_{g \in G} \text{ est une int.} \right)$$

égration suivant la mesure invariante sur G), alors

$$(3.1.6) \quad \beta_0 > 0 \quad \text{puisque} \quad e^{\chi(g)} > 0$$

alors quitte à changer $\beta(\pi)$ en $\beta(0)\beta(\pi)$ et à

supprimer un facteur multiplicatif, on a

$$(3.1.7) \quad Z = \sum_{\substack{(k-1)\text{ chaînes} \\ R}} \prod_{\substack{k\text{-cellules} \\ c_i^k}} \left[1 + \sum_{\pi \neq 0} \beta(\pi) \chi_{\pi} \left(\prod_{\Delta c_i^k} R_j \right) \right]$$

• On développe le produit portant sur les k -cellules. Cela revient à choisir pour chaque cellule c_i^k un caractère χ_{π_i} (ou un indice π_i). Il apparaît alors des produits de caractères χ_{π} . Mais on sait que dans le cas d'un groupe abélien, les caractères irréductibles coïncident avec les représentations irréductibles (puisque elles sont unidimensionnelles) et l'ensemble \mathcal{U} de tous les caractères irréductibles χ_{π} est muni naturellement d'une structure de groupe. [si $\chi_{\bar{\pi}}$ désigne le caractère adjoint de χ_{π} : $g \mapsto \chi_{\pi}(g^{-1})$, alors $(\chi_{\pi})^{-1} = \chi_{\bar{\pi}}$]

on a donc pour le moment une application

$c_i^k \mapsto \chi_{r_i} \in \mathcal{U}$ mais les c_i^k ne décrivent que la "moitié" de l'ensemble des k -cellules du complexe.

on construit simplement une k -chaîne sur \mathcal{U} en imposant:

$-c_i^k \mapsto \chi_{r_i}$ (on dit aussi qu'on a un graphe \mathcal{G}

sur \mathcal{U} , cf (21)). Aussi, $g = \sum_{c_i^k} \chi_{r_i} c_i^k$ alors

$$(3-1-8) \quad Z = \sum_{\{R\}} \sum_{\mathcal{G}} \left[\prod_i \beta(r_i) \right] \prod_{c_i^k} \prod_{c_j^{k-1}} \chi_{r_i} \left(R_j^{\frac{1}{2}(c_i^k: c_j^{k-1})} \right)$$

• Pour chaque couple $(c_i^k, -c_j^{k-1})$, donnons nous une de

ces deux cellules, notée c_j^{k-1} , afin de transformer Π en $\tilde{\Pi}$

$$\text{alors } \prod_{c_j^{k-1}} \chi_{r_i} \left(R_j^{\frac{1}{2}(c_i^k: c_j^{k-1})} \right) = \prod_{c_j^{k-1}} \chi_{r_i} (c_i^k: c_j^{k-1})_{(R_j)}$$

et par suite,

$$(3-1-9) \quad Z = \sum_{k\text{-chaînes } \mathcal{G}} \sum_{(k-1)\text{-chaînes } R} \left[\prod_i \beta(r_i) \right] \left\{ \prod_{c_i^k} \prod_{c_j^{k-1}} \chi_{r_i} (c_i^k: c_j^{k-1})_{(R_j)} \right\}$$

alors la sommation sur les $(k-1)$ -chaînes R se factorise, et

$$(3-1-10) \quad Z = \sum_{k\text{-chaînes } \mathcal{G}} \left[\prod_i \beta(r_i) \right] \left[\prod_{c_j^{k-1}} \left\{ \sum_{REG} \chi_{\otimes_j} (R) \right\} \right]$$

(ou $\{r_i\}$) où χ_{\otimes_j} est le caractère $\prod_{c_i^k} \chi_{r_i} (c_i^k: c_j^{k-1})$

(car pour deux caractères χ_r et χ_s , $\chi_r \chi_s$ est un nouveau

caractère, noté $\chi_{r \otimes s}$) Mais la chaîne

$$c_j^{k-1} \mapsto \chi_{\otimes_j}$$

est exactement la frontière du graphe g (cf appendice B)

De plus, $\sum_{R \in G} \chi(R)$ est nul, sauf si χ est le caractère identité χ_0 (alors $\sum_R \chi_0(R) = 1$). Par suite, les chaînes g qui contribuent à Z sont celles pour lesquelles

$$\text{pour tout } c_j^{k-1}, \quad \prod_{c_i^k} \chi_{\pi_i} (c_i^k; c_j^{k-1}) = \chi_0,$$

ie les k -chaînes de bord nul. Ainsi,

$$(3.1-11) \quad Z = \sum_{\substack{k\text{-chaînes } g \\ \Delta g = 0}} \left\{ \prod_{c_i^k} \beta(\pi_i) \right\} \quad \text{et } \pi_i = g(c_i^k)$$

• Supposons maintenant que notre complexe est issu d'une grosse cellule unique. Alors pour tout groupe G , son $k^{\text{ième}}$ groupe d'homologie est trivial. Donc il existe une $(k+1)$ -chaîne h sur \mathcal{U} telle que $g = \Delta h$. Ce h n'est pas unique, mais quitte à diviser Z par un facteur constant (l'ordre du noyau $h \mapsto \Delta h$), on a:

$$(3.1-12) \quad Z = \sum_{\substack{(k+1)\text{-chaînes } h \\ \text{sur } \mathcal{U}}} \left\{ \prod_{c_i^k} \beta \left(\prod_{r \in \mathcal{V}c} \pi_r \right) \right\}$$

En effet, si $h = \sum_{c_e^{k+1}} \chi_{\pi(e)} c_e^{k+1}$, alors

$$g = \Delta h = \sum_{c_i^k} \left[\prod_{c_e^{k+1}} \chi_{\pi(e)} (c_e^{k+1}; c_i^k) \right] c_i^k, \text{ donc}$$

$$g = \sum_{c_i^k} \chi_{\pi_i} c_i^k, \quad \text{et } \left(\prod_{r \in \mathcal{V}c} \pi_r \right) \text{ est encore une mo-}$$

tation agréable, qui désigne le numéro du caractère
 $\prod_{c_i^{k+1}} \chi_{r_i} (c_i^{k+1} : c_i^k)$ puisque seules interviennent les
 $(k+1)$ -cellules se situant sur le colord de c_i^k - on

a donc enfin:

$$(3-1-13) \quad Z = \sum_{\substack{(k+1)\text{ chaînes} \\ \text{sur } U}} \exp \left[\sum_{\substack{k\text{-cellules} \\ c_i^k}} \log \beta \left(\prod_{\nabla c_i^k} r \right) \right]$$

ce qui se donne une expression analogue à (3-1-5)
 mais G est devenu U , et le bord s'est transformé en
 colord.

• Nous sommes finalement en mesure de définir
 le complexe dual du complexe initial de dimension d .

* Sa dimension reste d

* Les cellules du complexe ne changent pas, mais on
 change leur dimension: une k -cellule du réseau initial
 devient une $(d-k)$ -cellule par dualité.

* Les nombres d'incidences entre nouvelles cellules sont
 les mêmes qu'entre les anciennes:

$$(3-1-14) \quad \left(c_i^{d-k} \text{ dual} : c_j^{d-k-1} \text{ dual} \right) = \left(c_j^{k+1} \text{ initial} : c_i^k \text{ initial} \right)$$

Ainsi, toute d -cellule devient un point du réseau dual

quelle devient un point, par dualité) et on voit facilement que si on transforme par dualité le complexe dual, on retombe sur le complexe initial.

Dans la transformation, bord et cobord s'échangent, et les nouveaux champs sont définis sur des cellules de dimension $(d-k-1)$; donc la nouvelle action S^* s'écrit:

$$(3.1.15) \quad S^* = \sum_{(d-k) \text{ cellules } c} \log \beta \left(\prod_{\pi \in \Delta c} \pi \right), \text{ et}$$

la fonction de partition a la forme:

$$(3.1.16) \quad Z = \sum_{\substack{(d-k-1) \text{ chaînes sur } U \\ \{\pi\}}} e^{S^*(\pi)}$$

• Nous constatons que pour le modèle d'Iving si $d=2$ et $k=1$, alors $d-k=1$ et $d-k-1=0$, et on retrouve bien que ce modèle est self dual. Nous en verrons d'autres par la suite.

(R) Nous n'avons pas du tout justifié les diverses interventions de Σ et Π , donc tous les problèmes liés à la convergence des séries et au passage à la limite thermodynamique ont été ignorés. Sachons seulement que pour un groupe G compact, les calculs faits plus haut sont vala-

elles si la température est assez haute, ie si la fonction de départ $X(g)$ est assez petite (démonstration dans la référence (21), voisine de celle vue au II-1°-a)

2°) généralisation du modèle d'Ising en présence d'un champ extérieur -

Que se passe-t-il si on essaie maintenant de généraliser le modèle d'Ising avec un champ extérieur? (Nous nous contenterons d'indiquer les idées directrices du calcul.)

on donne à l'action la forme suivante:

$$(3.2.1) \quad S = \sum_{c_i^k}^{\sim} X \left(\prod_{\Delta c_i} R_j \right) + \sum_{c_j^{k-1}}^{\sim} Y(R_j)$$

(X et Y sont des fonctions réelles sur G) et

$$(3.2.2) \quad Z = \sum_{(k-1)\text{ chaînes } R} e^{S(R)}$$

Le calcul de e^S se développe comme au 1°), et

$$(3.2.3) \quad Z = \sum_{(k-1)\text{ chaînes } R} \prod_{c_i^k}^{\sim} \left[\sum_{\pi} \beta(\pi) X_{\pi} \left(\prod_{\Delta c_i} R_j \right) \right] \times \prod_{c_p^{k-1}}^{\sim} \left[\sum_{p} \gamma(p) X_p(R_p) \right]$$

Le premier produit vaut:

$$\sum_{k \text{ chaînes } \{ \pi_i \}} \left[\prod_{c_i^k}^{\sim} \beta(\pi_i) \right] \left[\prod_{c_i^k}^{\sim} \prod_{c_j^{k-1}}^{\sim} X_{\pi_i} (c_i^k; c_j^{k-1}) (R_j) \right]$$

et le second prend une forme analogue:

$$\sum_{(k-1) \text{ chaînes } \{s_p\}} \left[\prod_{c_p^{k-1}}^{\sim} \gamma(s_p) \right] \left[\prod_{c_p^{k-1}}^{\sim} \chi_{s_p} (R_p) \right]$$

Donc la fonction de partition prend la forme:

$$(3.2.4) \quad Z = \sum_{k \text{ chaînes } \{r_i\}} \sum_{\{ \text{chaînes } s \}} \left[\prod_{c_i^k}^{\sim} \beta(r_i) \right] \left[\prod_{c_p^{k-1}}^{\sim} \gamma(s_p) \right] \times \\ \prod_{c_j^{k-1}}^{\sim} \left\{ \sum_{R \in G} \left[\prod_{c_i^k}^{\sim} \chi_{r_i} (c_i^k; c_j^{k-1}) \cdot \chi_{s_p} \right] (R) \right\}$$

(Les nouvelles chaînes sont à valeurs dans \mathcal{U})

La somme sur les éléments R du groupe G dans (3.2.4) est non nulle seulement dans le cas où la frontière de la chaîne $\{r_i\}$ (ie le graphe g) est la chaîne $\{s_p\}$ -

Dans ces conditions, en notant h la chaîne Δg ,

$$Z = \sum_{(k-1) \text{ chaînes } h} \sum_{\substack{k \text{ chaînes } g \\ \Delta g = h}} \left[\prod_{c_i^k}^{\sim} \beta(r_i) \right] \left[\prod_{c_j^{k-1}}^{\sim} \gamma(s_j) \right]$$

ou l'expression de la frontière Δg (cf appendice B)

la fonction de partition peut s'écrire:

$$Z = \sum_{k \text{ chaînes } g} \left[\prod_{c_i^k}^{\sim} \beta(r_i) \right] \left[\prod_{c_j^{k-1}}^{\sim} \gamma \left\{ \prod_{c_i^k}^{\sim} \chi_{r_i} (c_i^k; c_j^{k-1}) \right\} \right]$$

ce qu'on notera:

$$(3.2.5) \quad Z = \sum_{k \text{ chaînes } g} \exp \left\{ \sum_{c_i^k}^{\sim} \log \beta(r_i) + \sum_{c_j^{k-1}}^{\sim} \log \gamma \left(\prod_{\forall c_j}^{\sim} r_j \right) \right\}$$

• Il est alors temps de se placer dans le complexe dual. Le graphe g devient une $(d-k)$ -chaîne g^* à valeurs dans le groupe U , et

$$(3.2-6) \quad Z = \sum_{(d-k)\text{-chaînes } g^*} \exp \left\{ \sum_{c_j}^{\sim} \log \gamma \left(\prod_{\Delta_j} r_j^* \right) + \sum_{c_i}^{\sim} \log \beta(r_i^*) \right\}$$

On remarque que (3.2.6) a la même forme que (3.2.1) si on pose $X^* = \log \gamma$ et $Y^* = \log \beta$. La dualité échange donc les rôles de X et Y , soit de l'interaction et du champ extérieur.

De plus, le champ R défini sur les $(k-1)$ cellules devient le champ r^* défini sur les $(d-k)$ cellules du réseau dual.

• Ainsi, dans l'exemple du modèle d'Ising traité au II 4°-b ($d=1$) le groupe U des caractères est isomorphe à Z_2 (ref 21), l'interaction est propagée par les liens, donc $k=1$, et $k-1 = d-k$, donc le modèle est self dual, comme nous l'avons remarqué.

• De façon générale, un cas de self dualité pour un modèle "en champ extérieur" (on dit aussi "avec matière") a lieu si les deux conditions suivantes sont réalisées:

(i) le groupe \mathcal{U} des caractères de G est isomorphe à \bar{G}

(ii) $2k = d + 1$

• Nous avons donc, dans cette partie, montré que pour un réseau issu d'une grosse cellule (cas particulier: réseau hypercubique avec un nombre fini de sites), la transformation de dualité est possible, pour un hamiltonien décrivant une interaction entre proches voisins. On s'assure aisément que pour une interaction plus compliquée (entre deux premiers voisins par exemple) la transformation de dualité aboutit à un complexe très abstrait, dont la signification géométrique est loin d'être claire.

Plutôt que de chercher à généraliser encore plus la forme de l'action, nous allons au IV appliquer la dualité à des modèles où le spin prend ses valeurs dans des groupes classiques.

4^{ème} PARTIE

Applications

1°) Modèle de jauge à quatre dimensions avec un spin à valeurs dans \mathbb{Z}_5

On a vu que dans le cas de pure dualité (cf III 1°) le champ R , de dimension $(k-1)$ se transforme par dualité en un champ Q de dimension $d-k-1$ à valeurs dans le groupe U des caractères irréductibles de G . L'interaction, propagée initialement par des cellules k -dimensionnelles, devient $(d-k)$ dimensionnelle après transformation de dualité. Donc il y a self dualité si les conditions

$$(4-1-1) \quad \begin{cases} - G \cong U \\ - k-1 = d-k-1 \end{cases} \quad \text{sont satisfaites, ce qui}$$

est le cas pour $G = \mathbb{Z}_m$ (ref 21) et pour un champ de jauge ($k=2$, voir aussi appendice C) en dimension 4 (voir

aussi 22) - On note $e^{2i\pi \frac{\sigma}{m}}$, $\sigma = 1, 2, \dots, m$ les éléments de \mathbb{Z}_m , et on écrit l'action la plus générale sous la forme

42 (4-1-2)
$$S = \sum_P \log \left\{ \prod_{r=0}^{m-1} \gamma_r \exp \left[2i\pi \frac{r}{m} (\sigma_{ij} + \sigma_{jk} + \sigma_{kl} + \sigma_{li}) \right] \right\}$$

où i, j, k, l forment la plaquette P , $\sigma_{ij} + \sigma_{ji} = \pi$

et on impose de plus (cf ref 23)

(4-1-3)
$$\gamma_{m-r} = \gamma_r$$

alors l'action duale s'écrit (voir III-1-16)

$$S^* = \sum_P \log \gamma \left(\frac{\pi r}{\Delta P} \right)$$

et e^{S^*} se développe sur les éléments de Z_m :

$$e^{S^*} = \prod_P \gamma \left(\frac{\pi r}{\Delta P} \right) = \prod_P \left[\sum_{g \in Z_m} \gamma^*(g) \chi_{\frac{\pi r}{\Delta P}}(g) \right]$$

où
$$\gamma^*(r) = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \gamma(l) \cos \frac{2\pi lr}{m}$$

Dans ces conditions, l'énergie libre vérifie la relation:

(4-1-4)
$$f(\{\gamma_r\}) = f\left(\left\{ \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_k \cos \frac{2k\pi r}{m} \right\}\right) + \text{cte}(\beta)$$

Les points fixes de la transformation $\gamma \mapsto \gamma^*$

sont les vecteurs propres de la matrice $\left(\cos \frac{2k\pi r}{m} \right)_{k,r}$

et ils vérifient:

(4-1-5)
$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \frac{\gamma_2}{\gamma_0} + \dots + \frac{\gamma_{m-1}}{\gamma_0} = \sqrt{m} - 1$$

Donc cet hyperplan dans l'espace des paramètres se

pare le diagramme de phases en deux régions, symétriques l'une de l'autre par dualité.

• Restreignons nous maintenant au cas $n=5$.

Alors il n'y a que deux paramètres effectifs, à savoir $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}$ et $\frac{\gamma_2}{\gamma_0}$ par exemple (ou 4-1-3). De plus pour avoir un minimum de problèmes à pouvoir définir l'action par la formule (4.1.2), on impose

$$0 < \frac{\gamma_i}{\gamma_0} < 1 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n-1$$

Les calculs de singularités des séries haute température peuvent être faits à l'aide de techniques comme les approximations de Padé (24), ou les méthodes de Monte-Carlo (25). On obtient alors, pour les singularités les plus proches, un diagramme ayant l'allure de la figure (21) Comment l'interpréter?

• On commence par introduire la droite

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_0} + \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{des points fixes par la trans}$$

formation de dualité. Alors l'ensemble des singularités est symétrique par rapport à cette droite, et on obtient le diagramme de la figure (22) qu'il faut comprendre.

On remarque avant tout que toute une famille de singularités (courbes en pointillés) aurait été oubliée lors du

calcul numérique, car elle se trouve en plein dans le domaine de convergence. Donc ces singularités n'ont pas une signification physique immédiate. Nous les interprétons comme décrivant une transition du premier ordre. En effet, lors de la transition classique liquide-vapeur (fig 23) la métastabilité autour éventuellement l'existence de l'une des phases, alors que c'est l'autre qu'on obtient dans la plupart des cas. Il n'y a donc aucune raison pour que l'énergie libre devienne singulière au moment même de la transition. Sur le diagramme (24-1), on a représenté ce qui se passe dans le cas plus simple où il n'y a qu'un paramètre d'ordre. Alors la transition a lieu au point (fig 24-1) ou sur la ligne (fig 22) de self dualité, sinon il y en aurait au moins une deuxième, qui aurait dû apparaître dans les développements de haute température. Par contre sur les lignes ABC et A'B'C' de la figure 22, les domaines de convergence des diverses séries apparaissent comme disjoints (voir aussi fig 24-2). Il faut introduire au moins une troisième phase, responsable de cette

singularité sur l'énergie libre, qu'on suppose unique -

Enfin, quand les diverses séries donnent le même point pour la 1^{ère} singularité, on est dans le cas d'une transition du 2^{ème} ordre (fig 24-3). Et dans notre modèle de jauge à spin dans \mathbb{Z}_5 , c'est le cas pour les points B et B', mais tout indique que les lignes ABC et A'B'C' décrivent en fait une transition du 2^o ordre (ref 23)

• L'étude faite ici conduit donc au diagramme de phases de la figure 22 - Remarquons que sans la dualité, on ne possède comme informations numériques que celles de la figure 21, ce qui montre encore une fois la richesse de cette technique.

2^o) Modèles de jauge "avec matière"

Nous allons maintenant étudier le cas particulier d'un champ de jauge (donc le spin T_{ij} à valeurs dans $\{-1, +1\}$ est défini sur un lien, et l'interaction est portée par une plaque, ie $k=2$) avec un champ extérieur, dans les cas des dimensions deux et trois. Rappelons que dans ce cas, l'action

s'écrit:

$$(4.2.1) \quad S = \beta \sum_P J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} + \gamma \sum_l J_{ij} \quad \text{et}$$

$$(4.2.2) \quad Z = \sum_{\{J\}} \exp S(J) \quad (\text{voir par exemple l'appendice C})$$

a) cas de la dimension 2

La transformation de dualité montre qu'alors (formule 3.2.6) l'action S^* est telle que l'interaction est portée par des complexes de dimension $d-k+1=1$, donc les spins du réseau dual, $\bar{\alpha}$ valeurs dans le groupe U des caractères irréductibles de \mathbb{Z}_2 (donc de \mathbb{Z}_2 à un isomorphisme près) sont définis sur des cellules de dimension zéro, ie les sites du réseau. Le dual du champ extérieur est "de dimension -1 ", ce qui impose un champ constant. On peut alors écrire (à un facteur multiplicatif près, qu'on trouvera dans (26)) la fonction de partition sous la forme :

$$(4.2.3) \quad Z = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \exp \left[\sum_l \beta^* \sigma_i \sigma_j + \sum_i H \sigma_i \right]$$

et on reconnaît un modèle d'Ising, avec un champ extérieur constant. De plus, si on réécrit les caractères irréductibles de \mathbb{Z}_2 (ie $\chi_\alpha: g \mapsto g^\alpha$, $\alpha=0,1$) en termes

$$(4.2.4) \quad \begin{cases} \beta^* = -\frac{1}{2} \log th \delta \\ H = -\frac{1}{2} \log th \beta \end{cases}$$

ce qui est très analogue au cas vu au (2° 4° b)

• Mais le modèle d'Ising a un diagramme de phases bien connu: phase ordonnée si $H=0$ et $\beta^* > \frac{1}{2} \log(1+\sqrt{2})$, désordonnée sinon (fig 25). Donc par dualité, on a une phase désordonnée pour ce modèle de jauge si $\beta < \infty$ et $\delta > \frac{1}{2} \log(1+\sqrt{2})$ et ordonnée sur le segment de droite restant (fig 25)

Ⓡ on peut aussi étudier plus précisément comment se comporte le modèle, sur les bords du diagramme (26)

• côté (1) $\delta=0$: modèle de jauge pur (dual d'Ising à température nulle). alors

$$Z = \sum_{\{J\}} \prod_P \pi e^{\beta J J J J} = (ch \beta)^{nb(\text{plaquettes})} \sum_{\{J\}} \prod_P (1 + J J J J \beta)$$

Dans le développement de cette somme, prenons un terme qui contient

la plaquette P_0 (fig 27). alors $\sum_{\{J\}} J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} = 0$, donc

on doit prendre au moins deux fois chaque variable J_{ij} , ce qui

n'est possible qu'en introduisant les plaquettes adjacentes à P_0 ,

donc leurs voisines, ... et finalement toutes les plaquettes. alors

Z se réduit à deux termes: ou on ne prend aucune plaquette,

ou on les prend toutes. Par suite,

$$(4.2.5) \quad Z_N = (\text{ch} \beta)^{\text{nb}(\text{plaquettes})} + \text{sh} \beta^{\text{nb}(\text{plaquettes})} \\ = (\text{ch} \beta)^N + (\text{sh} \beta)^N$$

Et la fonction de partition est entièrement calculée dans ce cas.

• côté (2) $\beta = 0$ (dual du modèle d'Ising en champ extérieur très fort) on a:

$$Z = \sum_{\{J\}} \prod_{\langle ij \rangle} e^{\gamma J_{ij}} \quad \text{Toutes les variables se séparent, et :}$$

$$(4.2.6) \quad Z = (2 \text{ch} \gamma)^{\text{nb}(\text{liens})} = (2 \text{ch} \gamma)^{2N}$$

Donc on a encore ici un modèle sans problème

• côté (3) $\gamma \rightarrow \infty$ (dual d'Ising à température infinie) on peut transposer les développements de haute température du (II 1^o a), et la contribution due à la variable β se réduit à de petites corrections.

b) Cas de la dimension 3.

Dans ce cas, l'interaction initialement portée par des plaquettes se transforme par dualité en une interaction

des plaquettes. Nous voyons donc que le modèle est self dual. alors, comme en (4.1.4) la dualité nous fournit une relation que doit vérifier l'énergie libre f :

$$(4.2.7) \quad f(\beta, \gamma) = f\left(-\frac{1}{2} \log \text{th} \gamma, -\frac{1}{2} \log \text{th} \beta\right) + \frac{3}{2} \log(\text{sh} 2\beta \text{ sh} 2\gamma)$$

• Cette relation devient plus claire si on prend comme nouvelles variables

$$(4.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\beta} = 1 - \frac{\log(1+e^{-2\beta})}{\log 2} \\ \tilde{\gamma} = 1 - \frac{\log(1+e^{-2\gamma})}{\log 2} \end{array} \right.$$

(dont la courbe représentative est donnée figure 28)

et comme nouvelle énergie libre:

$$(4.2.9) \quad \phi(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = f(\beta, \gamma) - \frac{3}{2} \log[(1+e^{2\beta})(1+e^{2\gamma})]$$

alors (4.2.7) s'écrit:

$$(4.2.10) \quad \phi(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = \phi(1-\tilde{\gamma}, 1-\tilde{\beta}) = \phi(\tilde{\beta}^*, \tilde{\gamma}^*)$$

ou les variables duales β^* et γ^* deviennent:

$$(4.2.11) \quad \tilde{\beta}^* = 1 - \tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma}^* = 1 - \tilde{\beta}$$

Dans les variables $(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$, le diagramme de phases doit être symétrique par rapport à la droite $\tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = 1$ (fig 29)

• Étudions le un peu plus en détail.

* des côtes numérotés (2) et (3) se transforment l'un en l'autre

par dualité. Pour le côté (2) par exemple, où $\beta = 0$

$$(4.2.12) \quad Z = (2 \operatorname{ch} \gamma)^{\text{nb}(\text{liens})} = (2 \operatorname{ch} \gamma)^{3N}$$

* Dans le cas où $\beta \rightarrow \infty$, alors (4.2.2) s'écrit:

$$(4.2.13) \quad Z = (\operatorname{ch} \beta)^{\text{nb}(\text{plaquettes})} (\operatorname{ch} \gamma)^{\text{nb}(\text{liens})} \times \sum_{\{J_{ij}\}} \prod_P (1 + J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} \operatorname{th} \beta) \prod_l (1 + J_{ij} \operatorname{th} \gamma)$$

mais pour $\beta \rightarrow \infty$, les termes qui contribuent à Z satis-

font à la condition :

$$(4.2.14) \quad J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} = 1, \text{ pour toute plaque } (ijkl)$$

(voir (25), et pour l'idée le cas du modèle d'Ising avec un champ extérieur ou au II 4° b))

(4.2.14) exprime que le cobord du graphe J_{ij} est "nul", donc on en déduit (cf appendice B) que J_{ij} est lui-même un cobord, et on a:

$$(4.2.15) \quad J_{ij} = \sigma_i \sigma_j, \text{ pour un champ } \sigma_i \text{ défini sur les sites du réseau alors, à un facteur multiplicatif près,}$$

la fonction de partition vaut

$$(4.2.16) \quad Z_N = (\operatorname{ch} \gamma)^{3N} \sum_{\{\sigma_i\}} \prod_{\text{liens}} (1 + \operatorname{th} \gamma \sigma_i \sigma_j)$$

On retombe sur un modèle d'Ising sans champ extérieur

Le modèle présente une transition de phase pour un certain δ_I tabulé (voir (26) et (7)), qui se traduit par le point A de la figure 29.

Mais par dualité, le symétrique B de A est aussi un point singulier de l'énergie libre, ce qui donne un nouveau point de départ pour la courbe de transition. alors, avec ces points, on pense que les transitions se produisent sur la courbe dont l'allure est donnée figure 29, avec un point triple T.

- Remarquons pour finir que le modèle de jauge pur à $d=4$ peut être retrouvé à partir du modèle "en champ" (voir ref 25)

5^{ème} PARTIE

Conclusion

Ainsi, la transformation de dualité a beaucoup d'applications vers les théories de jauge, comme nous l'avons vu au IV. Mais nous n'avons pas, faute de temps durant ce stage pu étudier les applications au cas où le spin prend ses valeurs sur le cercle $U(1)$ (ref 27), et en particulier le modèle $X-Y$ (28) ou le modèle de Villain (29), qui contiennent une physique très riche...

Je tiens enfin à remercier l'ensemble du D Ph T de Saclay pour l'excellent accueil que j'ai reçu tout au long de ce stage, et plus particulièrement J.M Drauffe, qui a supervisé ce travail.

APPENDICE A

Équivalence triangle-étoile

Montrons que :

$$2 f^{\text{hex}}(\beta) = f^{\text{tri}} \left(\frac{1}{4} \log \frac{\text{ch} 3\beta}{\text{ch} \beta} \right) + \log \left[2 (\text{ch}^3 \beta \text{ch} 3\beta)^{1/4} \right]$$

où f désigne l'énergie libre par site.

1) Soit un spin σ_0 , relié à trois spins $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (fig A₁)

Nous allons montrer que l'expression :

$$\alpha = \sum_{\sigma_0 = \pm 1} e^{\beta \sigma_0 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}$$

peut s'écrire

$$\alpha = X e^{Y (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)} \quad (\text{ref A}_1)$$

En notant avant tout que les σ_i valent ± 1 , $\log \alpha$ est symétrique.

que en $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, donc c'est une fonction de $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$,

$\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$, $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ seulement. Comme $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$,

tout produit de deux de ces trois arguments en redonne un, et

on peut affirmer que $\log \alpha$ est de la forme :

$$\log \alpha = A (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + B (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + C \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + D$$

Comme $\log \alpha$ est inchangé dans la transformation :

on a : $A = C = 0$

on prend des valeurs particulières pour $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 1 & \text{donne :} & D + 3B = \log(2 \operatorname{ch} 3\beta) \\ \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \sigma_3 = -1 & \text{donne :} & D - B = \log(2 \operatorname{ch} \beta) \end{cases}$$

on en tire :

$$B = \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{ch} 3\beta}{\operatorname{ch} \beta}$$

$$D = \frac{1}{4} \log (2^4 \operatorname{ch}^3 \beta \operatorname{ch} 3\beta)$$

d'où :

$$\alpha = 2 (\operatorname{ch}^3 \beta \operatorname{ch} 3\beta)^{1/4} e^{\frac{1}{4} (\log \frac{\operatorname{ch} 3\beta}{\operatorname{ch} \beta}) (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)}$$

• Nous avons donc montré que les quatre spins d'Iring à une température β formant une étoile deviennent, en éliminant σ_0 un système de trois spins sur un triangle $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, mais à une température

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{4} \log \frac{\operatorname{ch} 3\beta}{\operatorname{ch} \beta}$$

celle-ci. C'est "l'équivalence triangle - étoile".

2) Considérons maintenant un réseau hexagonal la fonction de partition est :

$$Z_N^{\text{hex}}(\beta) = \sum_{\{\sigma_i\}} e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j}$$

on effectue la somme partielle indiquée au 1^o sur les sites marqués d'un point sur la figure A₂. Il reste une somme

sur les sites marqués d'un rond, qui forment un réseau triangulaire de $\frac{N}{2}$ sites. Alors

$$Z_N^{\text{hex}}(\beta) = \left[2 (\text{ch}^3 \beta \text{ch} 3\beta)^{1/4} \right]^{N/2} Z_{N/2}^{\text{tri}} \left(\frac{1}{4} \log \frac{\text{ch} 3\beta}{\text{ch} \beta} \right)$$

Vu que $f(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N(\beta)$, on en déduit :

$$2 f^{\text{hex}}(\beta) = \log \left[2 (\text{ch}^3 \beta \text{ch} 3\beta)^{1/4} \right] + f^{\text{tri}} \left(\frac{1}{4} \log \frac{\text{ch} 3\beta}{\text{ch} \beta} \right) .$$

APPENDICE B

Aperçu de topologie combinatoire

La topologie combinatoire traite d'êtres mathématiques à partir de techniques propres à la topologie et à l'algèbre (ref B₁)

Dans cet appendice, nous nous contenterons d'une approche élémentaire de la notion d'orientation, qui amènera à la définition abstraite d'un complexe. Enfin, on décrira les principales opérations qu'on peut faire sur ces objets.

1) Simplexes

a) Définitions.

Un simplexe de dimension n est une suite de $(n+1)$ points linéairement indépendants plongée dans \mathbb{R}^m , où m est un entier donné.

On écrit $T = (e_0, e_1, \dots, e_m)$

Une face F du simplexe T est une sous-suite de la suite (e_0, e_1, \dots, e_m) . Par exemple, $F = (e_0, e_1, \dots, e_k)$.

b) Comment orienter un simplexe?

on procède de la façon suivante:

(i) Écrire les $(m+1)$ points de T dans un ordre donné.

exemple : (e_0, e_1, \dots, e_m)

(ii) Choisir, dans le groupe \mathcal{S}_{m+1} des permutations de $\{0, 1, \dots, m\}$ d'une des deux classes : permutations paires ou impaires. Ce choix étant fait, T est dit orienté, et on le note

$$t = |e_{\sigma(0)}, \dots, e_{\sigma(m)}|$$

Cet simplexe T définit deux orientations qu'on note " t " et " $-t$ ".

(R) On peut aussi orienter un simplexe de dimension m si on s'est donné une orientation pour une des faces de dimension $(m-1)$.

Par exemple (voir fig B₁) T est un triangle. Alors $m=2$, et la "face" orientée $f = |e_0 e_1|$ transmet son orientation au triangle (sens de la flèche).

De façon générale, si $t^{m-1} = |e_1, \dots, e_m|$ est une face orientée de T , alors $t^m = |e_0, e_1, \dots, e_m|$ est dit de même orientation que t^{m-1} , et on peut répéter l'opération de proche en proche.

e) On définit alors le nombre d'incidence $(t^m : t^{m-1})$ de deux simplexes orientés par:

- Si t^{m-1} n'est pas une face de t^m , alors $(t^m : t^{m-1}) = 0$

- Si t^{m-1} est une face qui transmet son orientation à t^m , alors $(t^m : t^{m-1}) = 1$

- Si t^{m-1} ne transmet pas son orientation, $(t^m : t^{m-1}) = -1$

• Sur l'exemple de la figure B_2 , t^3 est le tétraèdre, et t^2 le triangle orienté par les doubles flèches on a $(t^3 : t^2) = -1$

on montre (A.) que pour deux simplexes orientés t^m et t^{m-1} arbitraires, on a:

$$(-t^m : t^{m-1}) = (t^m : -t^{m-1}) = -(t^m : t^{m-1})$$

et aussi :

$$\sum_{t_i^{m-1}} (t^m : t_i^{m-1}) (t_i^{m-1} : t^{m-2}) = 0$$

pour un couple (t^m, t^{m-2}) donné. Notons que le \sum porte sur tous les simplexes de dimension $(m-1)$ qui on peut envisager.

2°) Complexes, chaînes

a) Complexes. Fais de l'intuition acquise au para-

graphe précédent, nous définissons ainsi un complexe :

C'est un ensemble d'objets qu'on appelle des cellules, ayant les propriétés suivantes:

(a) Toute cellule a une dimension (i.e. un entier de \mathbb{N}) et la borne supérieure de ces dimensions est la dimension du complexe.

(b) Toute cellule c^r de dimension r est associée à une cellule notée $-c^r$ de même dimension, mais d'orientation contraire.

(c) A tout couple de cellules (c^r, c^{r-1}) est associé un nombre entier (élément de \mathbb{Z}) appelé nombre d'incidence, et noté $(c^r : c^{r-1})$. Deux cellules c^r et c^{r-1} sont dites incidentes si $(c^r : c^{r-1}) \neq 0$.

$$\text{on a: } (c^r : -c^{r-1}) = (-c^r : c^{r-1}) = -(c^r : c^{r-1})$$

(d) Pour tout couple de cellules c^r et c^{r-2} , on a:

$$\sum_{c_i^{r-1}} (c^r : c_i^{r-1})(c_i^{r-1} : c^{r-2}) = 0$$

(e) Moyennant ces définitions, on voit que les sommes de \mathbb{R}^m définies plus haut forment des complexes, mais ce ne sont pas les seuls: on peut très bien envisager deux cellules c^r, c^{r-1} dont le nombre d'incidence vaut deux. ce

qui était exclu dans le paragraphe 1

b) Chaînes

on introduit maintenant la notion de chaîne. on se donne un groupe abélien $(G, +)$. Une r -chaîne est une application x^r de l'ensemble des r -cellules (cellules de dimension r) dans G :

$$x^r: \{r \text{ cellules}\} \rightarrow G$$

$$t_i^r \mapsto x^r(t_i^r)$$

satisfaisant à la condition: $x^r(-t_i^r) = -x^r(t_i^r)$

G étant fixé une fois pour toutes, on note L^r le groupe des r -chaînes.

On note c_i^r la chaîne \hat{c}_i^r $\begin{cases} c_i^r \mapsto 1 \\ -c_i^r \mapsto -1 \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

Alors toute chaîne x^r peut s'écrire:

$$x^r = \sum_{c_i^r} a_i c_i^r,$$

où la sommation \sum porte sur l'une des cellules c_i^r et $-c_i^r$ seulement.

3°) Bord, cobord

a) Bord. opérateur Δ .

Soit c^r la r -chaîne introduite au 2°) b. Alors

par définition, Δc^r désigne la $(r-1)$ chaîne suivante :

$$\Delta c^r = \sum_{c_j^{r-1}}^{\sim} (c^r : c_j^{r-1}) c_j^{r-1}$$

Donc toute cellule de dimension $(r-1)$ a pour image par cette chaîne son nombre d'incidence avec c^r , donc Δc^r permet de connaître le bord (ou la frontière) de la cellule c^r .

• Par linéarité, la définition s'étend à toute

r -chaîne x^r :

$$\Delta x^r = \sum_{c_j^{r-1}}^{\sim} \sum_{c_i^r}^{\sim} a_i (c_i^r : c_j^{r-1}) c_j^{r-1}$$

$$\text{si } x^r = \sum_{c_i^r}^{\sim} a_i c_i^r.$$

Δ est donc un homomorphisme $L^r \rightarrow L^{r-1}$,

qu'on devrait en principe noter Δ_r .

(R₁) Si $r=0$, on convient que pour tout x^0 de L^0 , on a $\Delta x^0 = 0$

(R₂) On appelle cycle une chaîne de bord nul.

• Exemple on considère le complexe de la figure B₃. Les cellules de dimension 2 sont les petits carrés, ou plaquettes, celles de dimension 1 les différents liens, enfin celles de dimension 0 les points du réseau. $G = \mathbb{Z}$, et x^2

est une 2-chaîne définie sur les plaquettes P . Pour chaque plaquette orientée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, $x^2(P)$ est noté dans le carré correspondant. Δx^2 , à valeurs entières est définie sur chaque lien orienté, est notée par un certain nombre de flèches; dans le diagramme, tout lien a une orientation de bas en haut ou de gauche à droite et le sens des flèches figure le signe que prend la fonction Δx^2 . On ne manquera pas de voir l'analogie entre le réseau des flèches et un circuit électrique satisfaisant à la loi des nœuds.

b) Cobord, opérateur ∇ .

De façon analogue, on définit par ∇ un opérateur linéaire $L^r \rightarrow L^{r+1}$ tel que

$$c^r \mapsto \sum_{c_i^{r+1}}^{\sim} (c_i^{r+1} : c^r) c_i^{r+1} = \nabla c^r$$

Ainsi, ∇c^r est une chaîne qui permet de sélectionner les cellules de dimension $(r+1)$ incidentes à c^r , c'est à dire le cobord de c^r .

exemple (figures B_4 et B_5) La chaîne initiale est

x^1 , représentée par des flèches, et son cobord ∇x^1 est figuré par les valeurs prises sur chaque plaquette.

4°) Groupes d'homologie et de cohomologie.

a) Propriété fondamentale.

$$\text{on a: } \Delta\Delta = 0 \quad \nabla\nabla = 0$$

Mentions le par exemple pour $\Delta\Delta$.

$$\text{Soit } x^r \text{ une } r\text{-chaîne: } x^r = \sum_{c_i^r} a_i c_i^r$$

$$\begin{aligned} \text{alors } \Delta(\Delta x^r) &= \Delta \left\{ \sum_{c_i^r, c_j^{r-1}} a_i (c_i^r : c_j^{r-1}) c_j^{r-1} \right\} \\ &= \sum_{c_i^r, c_k^{r-2}} a_i \left\{ \sum_{c_j^{r-1}} (c_i^r : c_j^{r-1}) (c_j^{r-1} : c_k^{r-2}) \right\} c_k^{r-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Conséquences. Définitions.

on a donc le diagramme suivant :

$$L^r \xrightarrow{\Delta_r} L^{r-1} \xrightarrow{\Delta_{r-1}} 0 \in L^{r-2}$$

$$\text{i.e. } \text{Im}(\Delta_r) \subset \text{Ker}(\Delta_{r-1})$$

on appelle alors π ^{ième} groupe d'homologie du complexe

$$\text{le groupe quotient } \frac{\text{Ker } \Delta_{r-1}}{\text{Im } \Delta_r}$$

• De même, on a: $L^r \xrightarrow{\nabla_r} L^{r+1} \xrightarrow{\nabla_{r+1}} 0 \in L^{r+2}$

et $\frac{\text{Ker } \nabla_{r+1}}{\text{Im } \nabla_r}$ s'appelle π ^{ième} groupe de cohomologie.

(R) Notons bien que les groupes d'homologie et de cohomologie dépendent à la fois du complexe et du groupe G .

c) Cas d'un réseau.

Dans les applications envisagées ici, on suppose toujours le réseau tel que les groupes d'homologie et de cohomologie sont triviaux, et on montre (B₁) que tout complexe obtenu par divisions successives d'une grosse cellule unique a des groupes d'homologie et de cohomologie formés d'un seul élément, ce quel que soit G abélien.

• Alors, si x^r est une r -chaîne satisfaisant à l'équation $\Delta x^r = 0$, il existe une $(r+1)$ chaîne x^{r+1} telle que $x^r = \Delta x^{r+1}$.

De même, si le cobord de x^r est nul, i.e. $\nabla x^r = 0$ alors x^r est un cobord: Il existe x^{r-1} telle que $x^r = \nabla x^{r-1}$.

(R) Remarquons que si le réseau est tracé sur un tore par exemple, ce qui revient physiquement à imposer des conditions aux limites périodiques, alors les groupes d'homologie ne sont pas triviaux, et la propriété précédente disparaît.

Ⓡ) On notera l'analogie avec les propriétés habituelles d'analyse vectorielle :

$\vec{\text{rot}} \vec{a} = 0$ implique qu'il existe un champ scalaire U tel que $\vec{a} = \vec{\text{grad}} U$, et $\text{div} \vec{B} = 0$ implique l'existence d'un champ \vec{a} vectoriel tel que $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{a}$.

Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces problèmes à la référence B, où toutes les notions introduites ici sont étudiées en détail.

APPENDICE C

À propos des théories de jauge.

Cet appendice n'a pas pour but d'être une véritable introduction aux théories de jauge, mais se propose de décrire très simplement comment une idée féconde en théorie des champs a pu ensuite être utilisée par les statisticiens.

1°) Le cas de l'électrodynamique

On sait que l'équation de Dirac avec un champ extérieur peut être dérivée du lagrangien.

$$(C-1-1) \quad L = \bar{\Psi} [\gamma^{\mu} (i \partial_{\mu} - e A_{\mu}) - m] \Psi$$

où Ψ est un spineur à quatre composantes et γ^{μ} les matrices de Dirac (voir par exemple C₁)

La transformation

$$\Psi(x) \mapsto e^{i\alpha} \Psi(x) \quad \text{où } \alpha \text{ est}$$

un réel donné indépendant du point x laisse L invariant:

$$\delta L = 0$$

(on dit qu'il y a symétrie globale $U(1)$)

Mais que se passe-t-il si on fait une transformation :

$$\Psi(x) \mapsto e^{i\alpha(x)} \Psi(x),$$

où $\alpha(x)$ est une fonction (différentiable) du point x ?

Le calcul montre qu'alors :

$$(C-1-2) \quad \delta L = - (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) (\partial_\mu \alpha + e \delta A_\mu)$$

dans l'hypothèse où on s'autorise à faire varier le champ

$$A: \quad A_\mu \mapsto A_\mu + \delta A_\mu$$

on veut imposer la condition $\delta L = 0$, afin d'extraire de cette transformation de jauge une constante du mouvement (théorème de Noether)

Si $\alpha(x)$ est quelconque, alors la variation δA_μ est imposée :

$$(C-1-3) \quad \delta A_\mu = - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$$

Par suite, si $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, alors :

$\delta F_{\mu\nu} = 0$, donc le lagrangien du champ électromagnétique :

$$L_c = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

est invariant.

• Cette méthode, due à Yang et Mills (C_2) permet de retrouver l'invariance de jauge de l'électromagnétisme.

me, qui était déjà bien connue. Elle doit donc pouvoir se généraliser, en apportant des résultats féconds.

2^o) Cas de SU(2)

Ainsi, Yang et Mills ont proposé une description de la symétrie interne d'isospin (c'est à dire liée au groupe SU(2) des matrices complexes 2×2 unitaires de déterminant

+1). On reprend le spineur $\Psi(x)$, mais on l'autorise à avoir un indice d'isospin supplémentaire i , valant 1 ou 2. On obtient ainsi un champ $\Psi_i(x)$ à 2×4 composantes. Soit la transformation :

$$(C-2-1) \quad \Psi_i(x) \mapsto \Psi'_i(x) = U_{ij}^+(x) \Psi_j(x)$$

où U_{ij}^+ est une matrice unitaire n'opérant que sur les variables d'isospin. Le lagrangien (C-1-1) prend maintenant la forme :

$$(C-2-2) \quad L = \bar{\Psi}_i \left[i \gamma^\mu (\partial_\mu \delta_{ij} - ie A_\mu(i,j)) - m \delta_{ij} \right] \Psi_j$$

(chaque A_μ devient une matrice 2×2)

et on cherche quelle doit être la forme du lagrangien propre du champ L_C pour que la transformation (C-2-1)

soit simultanément $\delta L = 0$ et $\delta L = 0$.

le calcul de δL donne

$$(C-2-3) \quad \delta A_\mu = \frac{i}{e} (\partial_\mu U^\dagger) U - U^\dagger [U, A_\mu]$$

mais si on introduit un nouveau tenseur électromagnétique $F_{\mu\nu}$ par:

$$(C-2-4) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie [A_\mu, A_\nu],$$

$$\text{alors } \delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{voir } C_1 \text{ et } C_3)$$

Dans ces conditions, le choix de L_C est très restreint, et on prend finalement (C_4)

$$(C-2-5) \quad L_C = -\frac{1}{4} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$$

Nous venons donc de voir comment les idées de Yang et Mills peuvent d'une part confirmer la forme de l'interaction électromagnétique, et d'autre part la généraliser.

3°) Passage du modèle d'Ising au modèle de jauge.

Dans le cadre de la mécanique statistique, c'est le hamiltonien qui correspond au lagrangien de la théorie des champs. Nous allons voir que l'idée vue aux paragraphes 1 et 2 se transpose et enrichit, entre autres, le modèle d'Ising.

Considérons le hamiltonien d'Ising :

$$(C-3-1) \quad H = - \sum_{i,j} \sigma_i J_{ij} \sigma_j = - \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

où σ est un spin qui vaut ± 1 , et J_{ij} définie sur chaque lien du réseau vaut ± 1 si i et j sont proches voisins, et 0 sinon.

On voit que H est invariant sous la transformation globale :

$$\sigma_i \mapsto -\sigma_i$$

mais on aimerait avoir une invariance locale, c'est à dire rendre H invariant par les transformations

$$(C-3-2) \quad \sigma_i \mapsto \epsilon_i \sigma_i$$

où ϵ_i valant ± 1 est une fonction arbitraire du site i .

On voit immédiatement que si on impose à J_{ij} de se transformer par (C-3-2) suivant la loi

$$(C-3-3) \quad J_{ij} \mapsto \epsilon_i J_{ij} \epsilon_j$$

ce pour tout couple de sites (i, j) , alors le hamiltonien H de la formule (C-3-1) reste inchangé.

• Mais dans ces conditions, J_{ij} ne décrit plus un ensemble de paramètres, mais des variables dynamiques, définies sur des liens, et il faut leur chercher un hamiltonien propre H_J de façon que la transformation de jauge (C-3-2) et (C-3-3) soit telle que $\delta H_J = 0$

En supposant H_J suffisamment dérivable, et en se

limitant aux termes d'ordres le moins élevé, on peut essayer de prendre pour H_J un polynôme par rapport aux H_J .

Vu que J_{ij} n'est pas invariant par (C-3-3), on doit exclure les polynômes de degré 1, et vu que $J_{ij} J_{ji} = J_{ij}$, l'idée est d'essayer, pour un monôme du 2^e degré, de prendre un terme du type $J_{ij} J_{jk}$ (figure C₁) qui devient, par la transformation de jauge:

$$(C-3-4) \quad J_{ij} J_{jk} \mapsto \epsilon_i J_{ij} J_{jk} \epsilon_k$$

donc pour enlever tous les ϵ , le polynôme non trivial invariant et d'ordre le plus bas s'écrit:

$$(C-3-5) \quad H_J = \sum_P J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li}$$

pour un réseau cubique, ou l'on somme sur toutes les plaquettes élémentaires du réseau (voir ref C₅)

• Donc l'action, pour un hamiltonien "de jauge"

s'écrit finalement:

$$(C-3-6) \quad S = -\frac{1}{kT} H = \beta \sum_P J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} + \sum_{\text{liens}} \sigma_i J_{ij} \sigma_j$$

Mais la transformation:

$$(C-3-7) \quad J_{ij} \mapsto J'_{ij} = \sigma_i J_{ij} \sigma_j, \quad \sigma_i \mapsto \sigma_i$$

laisse S invariant, et on écrira plutôt (en supprimant

le terme):

$$(C-3-8) \quad S = \beta \sum_P J_{ij} J_{jk} J_{kl} J_{li} + \gamma \sum_L J_{ij}$$

ce qui ne change qu'un facteur multiplicatif dans la fonction de partition.

Notons que les spins σ_i ont totalement disparu, et les idées de Yang et Mills nous ont fait découvrir un nouveau modèle, à partir du classique modèle d'Ising.

4°) Conclusion

Ces modèles de champs de jauge ont été introduits par K. Wilson (C₅) pour résoudre le problème du confinement des quarks, on discrétise l'espace-temps au moyen d'un réseau afin de pouvoir faire explicitement des calculs (donc on rompt l'invariance de Lorentz, pour essayer de la rétablir ensuite) et on se propose de placer dessus un spin à valeurs dans SU(3) (groupe de symétrie interne pour les quarks). Mais les diverses phases que fournit le modèle peuvent s'interpréter comme "phase de quark" ou "phase de baryon" (voir l'introduction de C₅) suivant la valeur de la constante de couplage (ie la température, en mécanique statistique).

Notons que $SU(3)$ n'est pas abélien, ce qui pose de grosses difficultés (ref C7). Aussi s'est-on d'abord intéressés aux théories où le spin est à valeurs dans un groupe abélien ($U(1)$, C8) - Notons enfin que les modèles sur réseau ont aussi été introduits pour des problèmes à priori bien différents, comme la supraconductivité (C9)

REFERENCES

1. Ising. Z Phys 31 253 (1925)
2. Huang. Statistical mechanics (Wiley and sons, 1963)
3. Onsager. Phys Rev 65 117 (1944)
4. Kramers - Wannier. Phys Rev 60 252 (1941)
5. Wegner. J math phys 12 2259 (1971)
6. Newell - Montroll. Rev mod phys 25 353 (1953)
7. Fisher - Gaunt. Phys rev 133 A 225 (1964)
 voir aussi. Phys rev 162 480 (1967)
8. Savit. Duality in field theory and statistical systems (National Science Foundation PH 7808426
 septembre 1979)
9. Lee - Yang. Phys Rev 87 410 (1952)
10. Yang. Phys rev 85 808 (1952)
11. Stanley. Introduction to phase transition and critical phenomena (Oxford university press. 1971)
12. Peierls. Proc Cambridge Phil Soc 32 477 (1936)
 et Phys Rev 54 918 (1938)

- 13 - Griffiths J math phys. 8 478 (1967)
- 14 - Vaidya Phys lett A 57 1 (1976)
- 15 - Kadanoff - Ceva Phys Rev B 3 3918 (1971)
- 16 - Anderson - Edwards J phys F 5 965 (1975)
- 17 - Toulouse Comm Phys 2 115 (1977)
- 18 - Jose - Kadanoff - Kirkpatrick - Nelson
phys rev B 16 1217 (1977)
- 19 - Syoji in Phase transitions and critical phenomena, vol 1 p 269 (Academic press Londres 1974)
- 19 bis - Thompson page 177 de la référence (19)
- 20 - J.P. Serre Représentations linéaires des groupes finis
(Hermann - Paris. 1967)
- 21 - Drauffe Phys rev D 18 1174 (1978)
- 22 - Kerthals - Alles Nucl phys B 142 315 (1978)
- 23 - Drauffe Series analysis in four Z_m lattice gauge systems - Preprint CEA déc 79 et Nucl phys B
- 24 - Baker Essentials of Padé approximants
Academic Press (1975)
- 25 - Creutz, Jacobs, Rebbi. phys rev lett 42 1390 (1979)
et phys rev D 20 1915 (1979)

- 26 - Balian. Drauffe. Itzykson.
 Phys rev D10 3376 (1974) et D11 2098 (1975)
- 27 - Banks - Meyerson. Kogut. Nucl. phys B129 493 (1977)
 - Savit. Phys Rev Lett 39 55 (1977)
- 28 - Kosterlitz. Thouless. J. phys C6 1187 (1973)
 - Savit. phys rev B 17 1340 (1978)
- 29 - Villain. J. phys C 36 581 (1975)
- A₁ - Fisher. phys rev A13 969 (1959)
- B₁ - Aleksandrov. Combinatorial Topology (tome 2)
 (Graylock, New York 1956)
 en français: Alexandrov. Introduction à la théorie homologique de la dimension (Mir, Moscou 1977)
- C₁ - Bogoliubov - Chirkov. Introduction à la théorie quantique des champs (Dunod. Paris. 1966)
- C₂ - Yang - Mills. Phys Rev 96 191 (1954)
- C₃ - Abers. Lee. Phys reports 9 C 1 (1973)
- C₄ - Itzykson, Zuber. Electrodynamique et théorie quantique des champs (cours - photocopié)

et Quantum Field Theory (Mc Graw-Hill - New York 1980)

- C₅ - Drouffe, Itzykson phys reports 38 C 133 (1978)
- Larges 1976 New developments in quantum field theory and statistical mechanics. (K Osterwalder)
- C₆ - Wilson Phys rev D 10 2445 (1974)
- Kogut Susskind Phys rev D 11 395 (1975)
- C₇ - Drouffe, Itzykson, Zuber Nucl phys B 147 (1979)
page 132
- Goddard - Nuyts - Olive Nucl phys. B 125 1 (1977)
- Montonen - Olive Phys Lett 72 B 117 (1977)
- 't Hooft Nucl phys B 138 - 1 - (1978)
- Halpern phys rev D 19 517 (1979)
- C₈ - Kadanoff J phys A 11 1399 (1978)
- Hittag - Stephen J math phys 12 441 (1971)
- C₉ - Goldstone Nuovo Cimento 19 154 (1961)
- Peskin Ann phys 113 122 (1978)

Figures

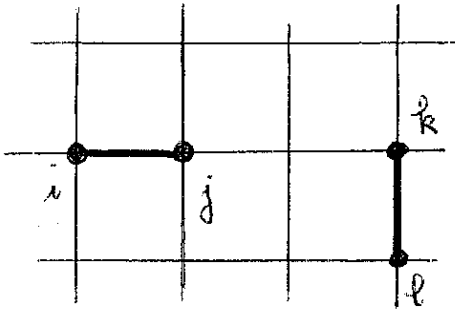


figure 1

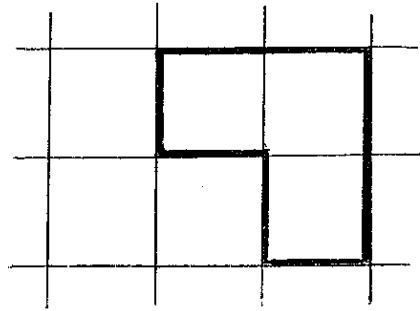


figure 2

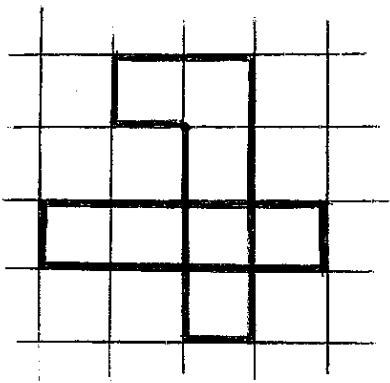


figure 3

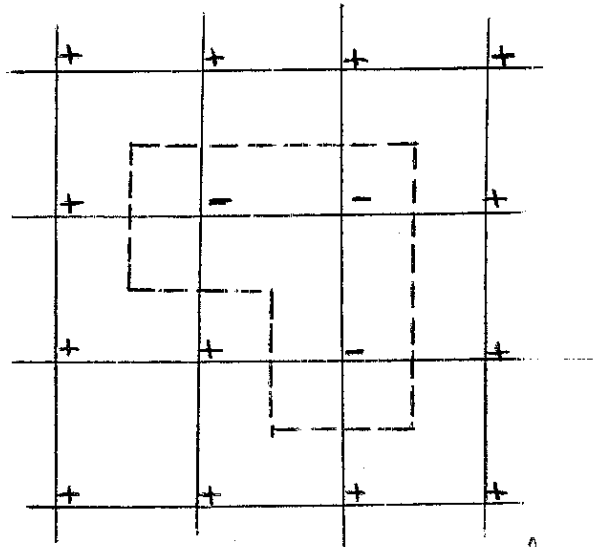


figure 4

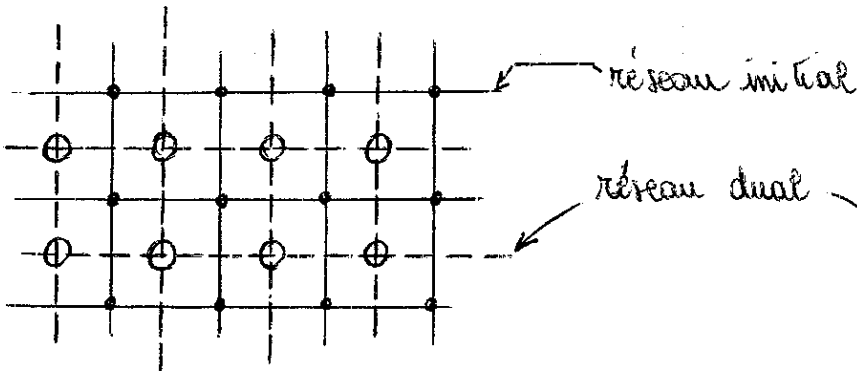


figure 5

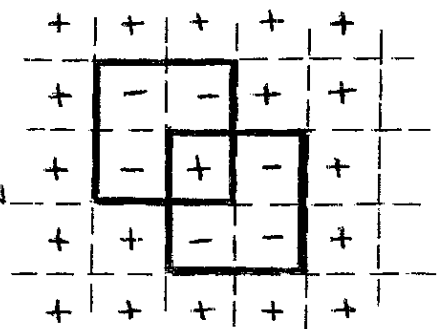


figure 6

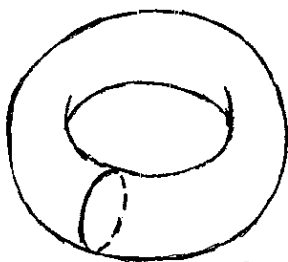


figure 7

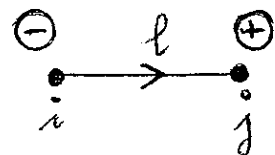


figure 8

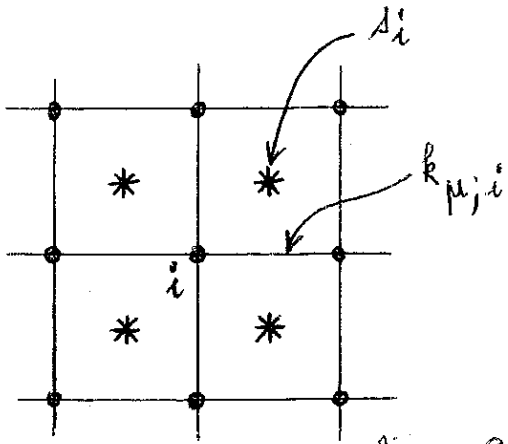


figure 9

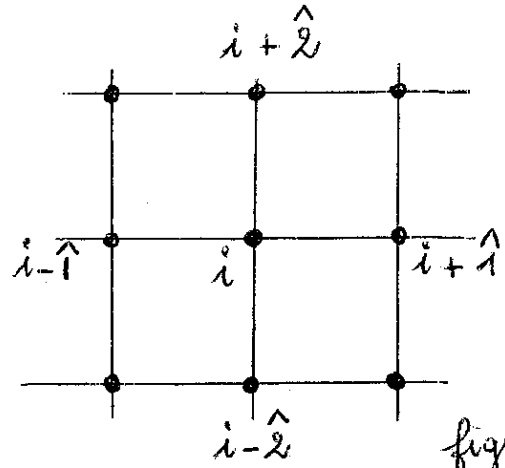


figure 10

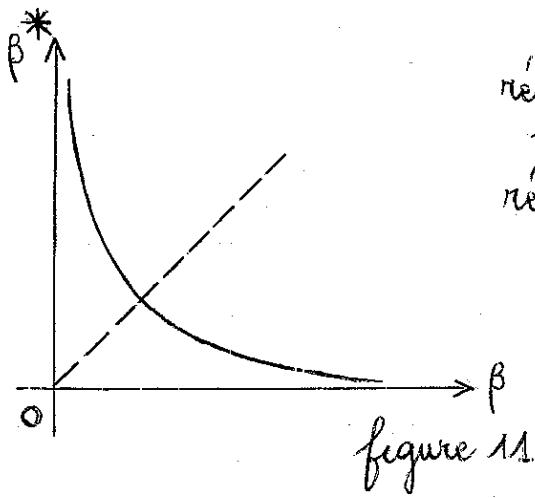


figure 11

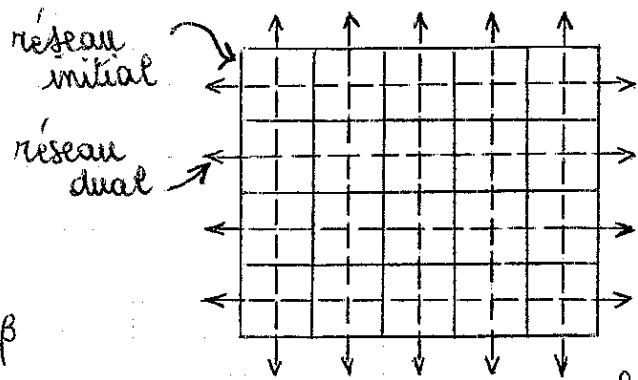


figure 12

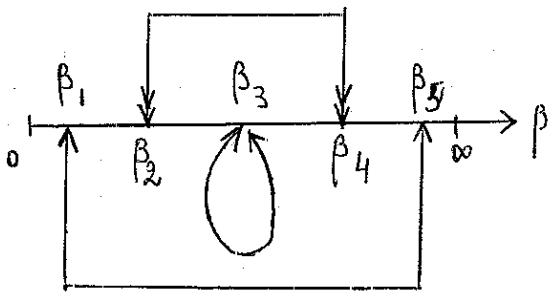


figure 13

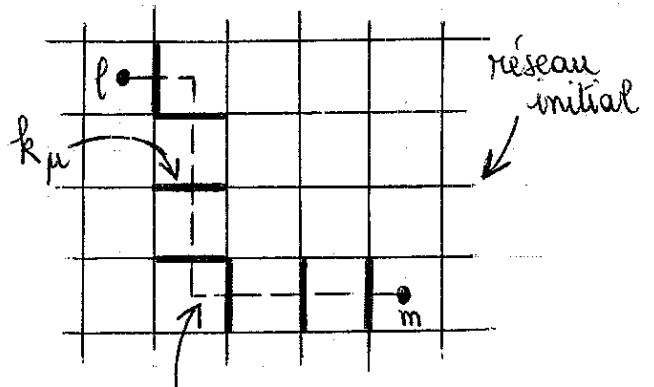


figure 14

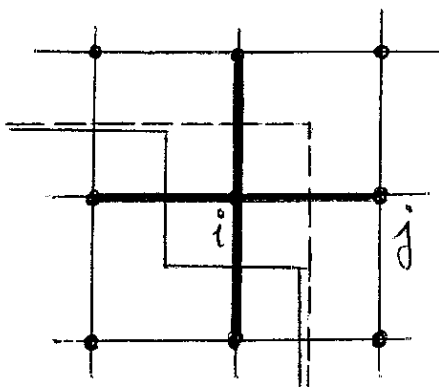


figure 15

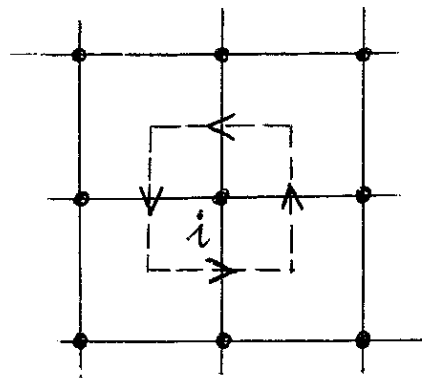


figure 16

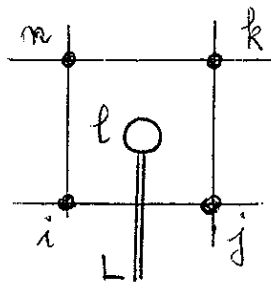


figure 17

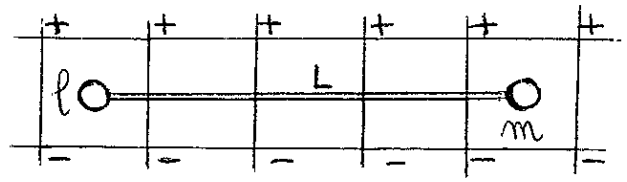


figure 18

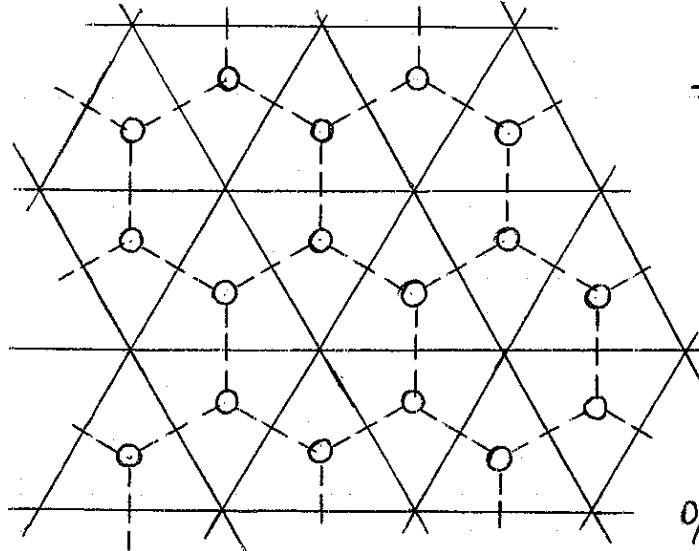


figure 19

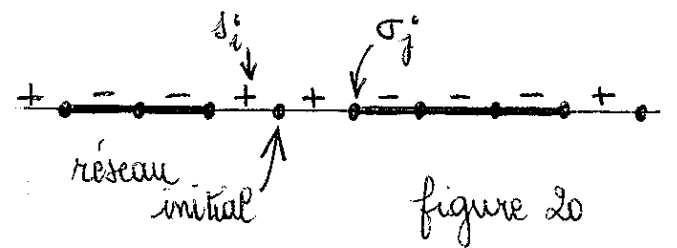


figure 20

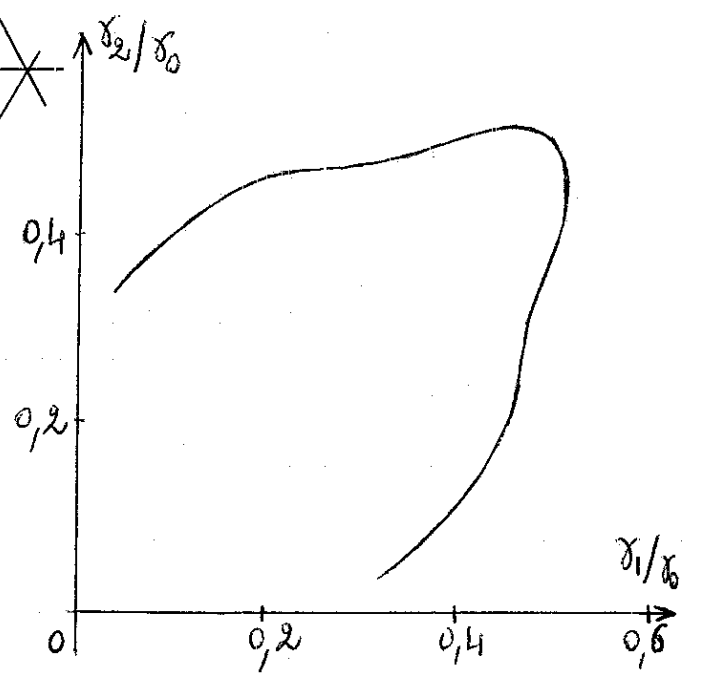


figure 21

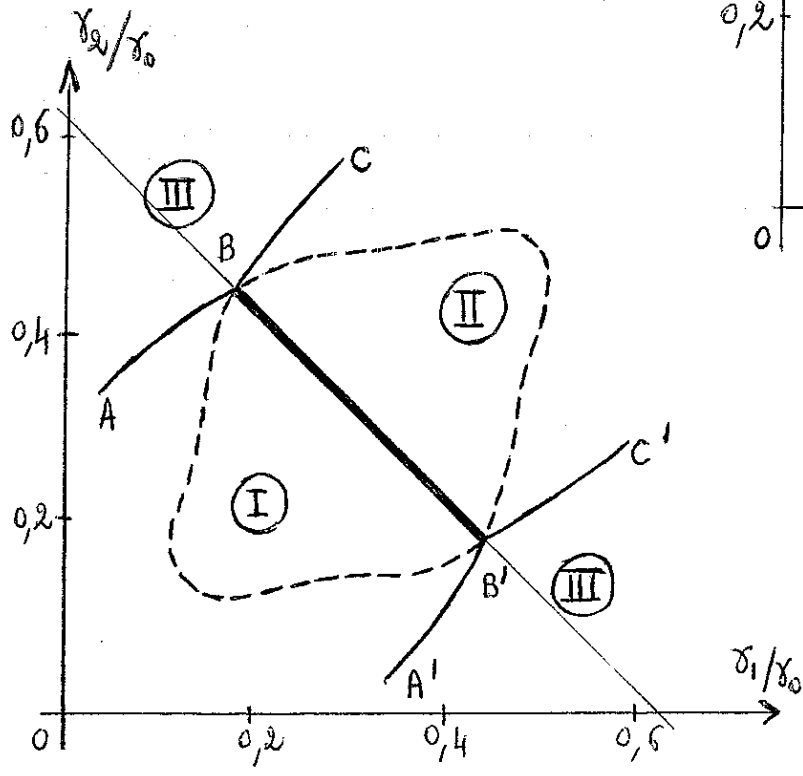


figure 22

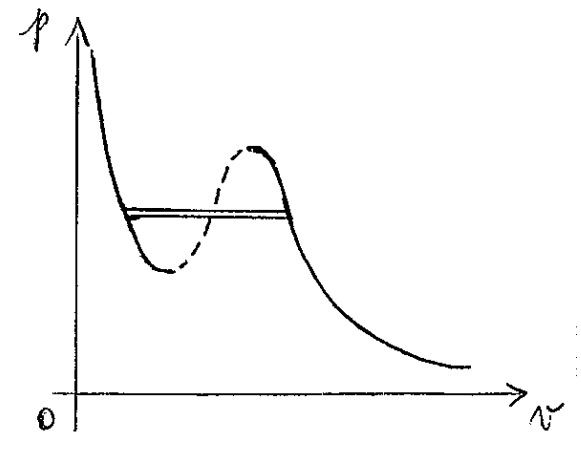
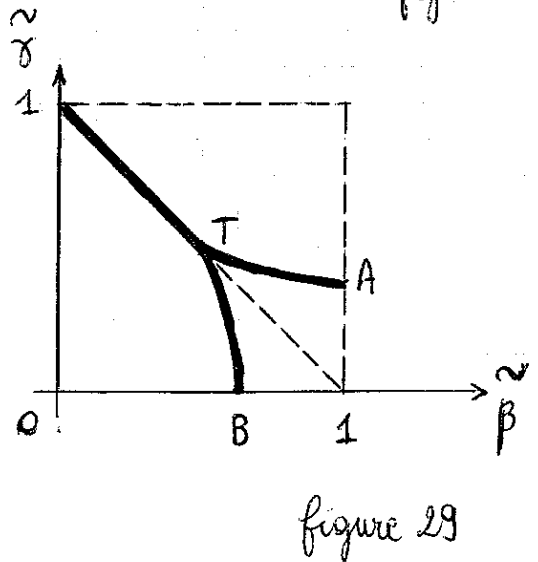
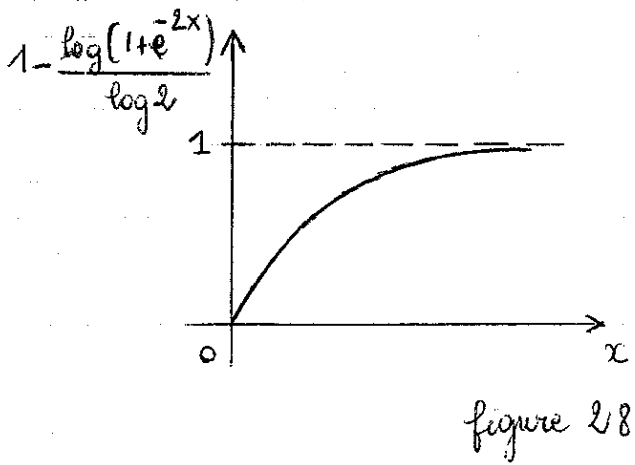
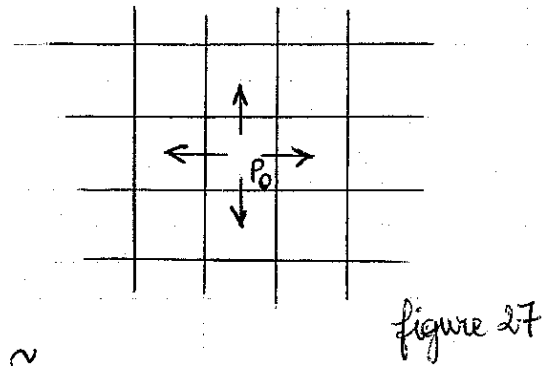
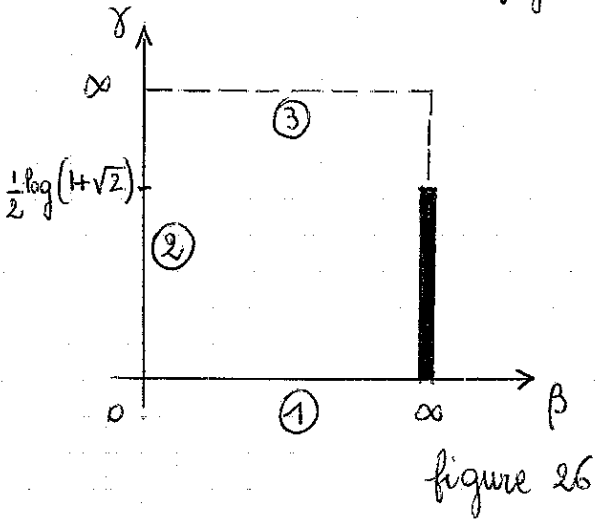
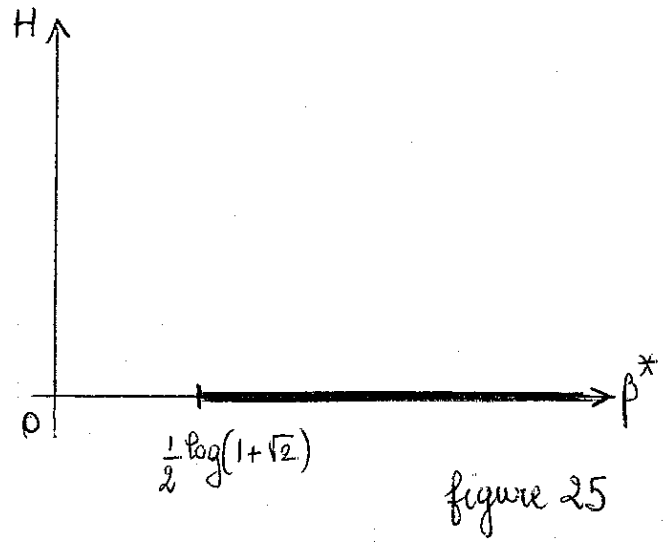
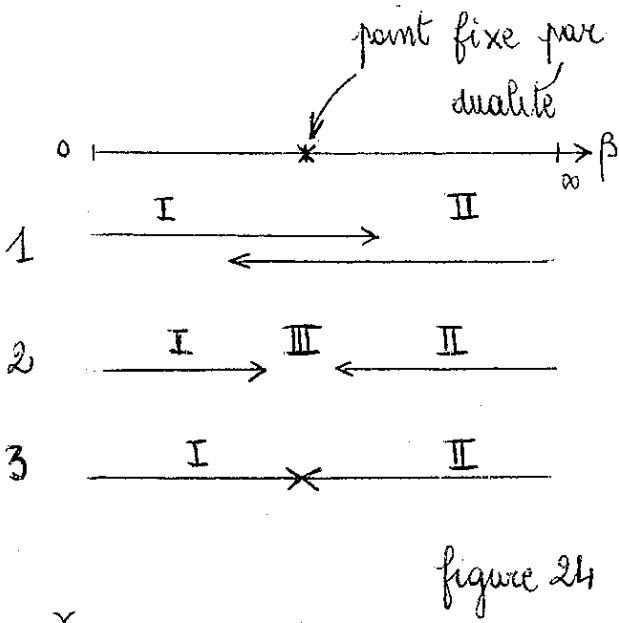


figure 23



Figures des appendices

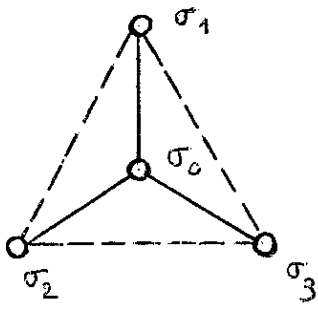


figure A₁

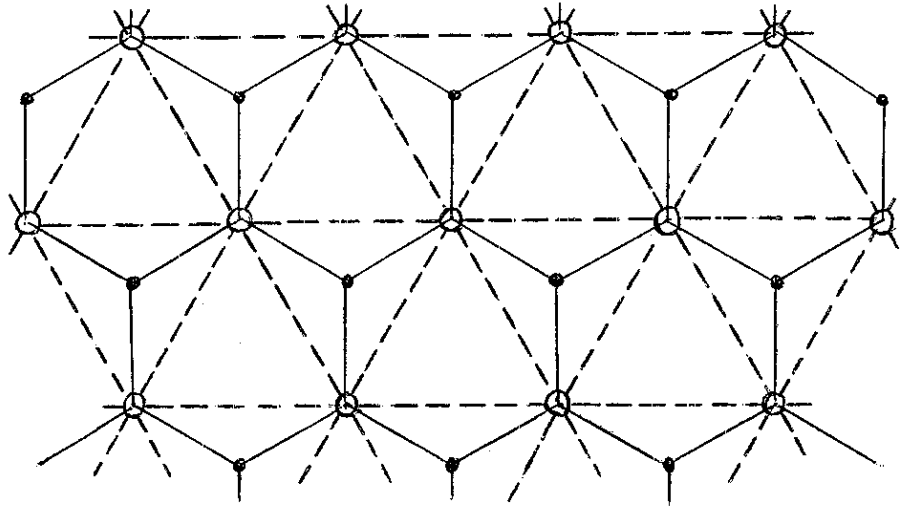


figure A₂

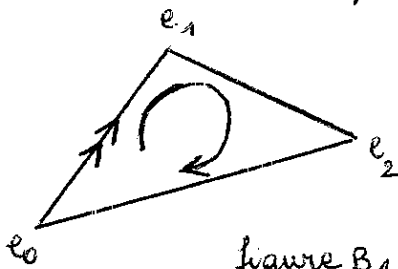


figure B₁

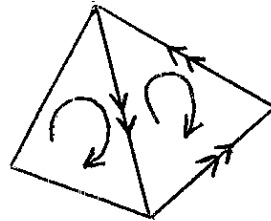


figure B₂

o	o	o	o	o	o
	←	→	←	→	
o	↓ 1	↑ -1	↓ 1	↑ -1	o
	←	←	→	→	←
o	↓ 2	↑ 0	↑ -2	↓ 1	o
	→	←	←	→	
o	↓ 1	↑ 1	↓ 1	↑ -1	o
	→	→	→	←	
o	o	o	o	o	o

figure B₃

o	↓	o	↓	o	↓	o
→						←
o	o	o	o	o	o	
→						←
o	↑	o	↑	o	↑	o

figure B₄

o	-1	o
-1	↓ 4	↑ -1
o	-1	o

figure B₅

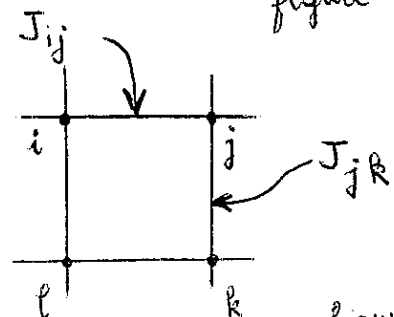


figure C₁