

## Dynamique des gaz, volumes finis et moment cinétique

Après avoir remarqué que les équations de la dynamique des gaz conservent le moment cinétique, nous proposons un nouveau schéma de volumes finis pour leur approximation numérique. C'est une généralisation du schéma de Godunov qui prend en compte un champ de vitesse tourbillonnant décrit par un mouvement de type solide rigide dans chaque maille. Le point original du schéma est l'équation d'évolution du tourbillon, qui est une conséquence directe de la conservation du moment cinétique.

### 1) Euler conserve le moment cinétique.

- Les équations d'Euler de la dynamique des gaz permettent d'écrire la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie sous forme locale en fonction de la masse volumique  $\rho$ , de la vitesse  $u$ , de la pression  $p$ , de l'énergie interne  $e$  et totale  $E$  liés dans le cas d'un gaz parfait polytropique par les relations

$$(1.1) \quad E = \frac{1}{2} |u|^2 + e$$

$$(1.2) \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

Si  $t$  désigne le temps et  $x \in \mathbb{R}^m$  ( $m = 2$  ou  $3$ ) est un point courant de l'espace, on a les relations classiques :

---

Exposé au séminaire du Centre de Mathématiques Appliquées de l'école Polytechnique, juin 1998. Rédaction juillet 2003. Edition février 2011 ; 11 pages.

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j E + p u_j) = 0.$$

• On désigne par  $\epsilon_{ijk}$  le tenseur complètement antisymétrique d'ordre 3 ;  $\epsilon_{ijk}$  est égal à 1 si  $(i, j, k)$  est une permutation paire de  $(1, 2, 3)$ ,  $\epsilon_{ijk}$  est égal à  $-1$  si c'est une permutation impaire et est nul dans les autres cas. On introduit le moment cinétique relativement à l'origine de l'espace *via* la relation

$$(1.6) \quad \sigma = x \times u ; \quad \sigma_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j u_k, \quad i = 1, 2, 3.$$

On remarque que pour  $x \in \mathbb{R}^3$ , la relation (1.6) définit le produit vectoriel usuel alors que pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , on se ramène aisément au cas précédent en annulant la troisième composante spatiale de la variable  $x$  et du champ de vitesse  $u$ . La relation (1.6) montre qu'alors seul  $\sigma_3$  le long du troisième vecteur de base est non nul et qu'on peut considérer le moment cinétique comme un champ scalaire. Rappelons que le rotationnel est défini pour un champ  $\mathbb{R}^3 \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^3$  par la relation

$$(1.7) \quad (\text{rot } \varphi)_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

**Proposition 1. Conservation du moment cinétique.**

Avec les notations précédentes, le moment cinétique  $\sigma$  défini à la relation (1.6) satisfait la loi de conservation suivante, pour  $i = 1, \dots, m$  :

$$(1.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sigma_i) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \sigma_i u_j) - (\text{rot } (p x))_i = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

**Preuve de la proposition 1.**

• Compte tenu des relations (1.4) et (1.6), on a dans un premier temps

$$(1.9) \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_j \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) + \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) + \frac{\partial p}{\partial x_k} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

• Or, en évitant la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés au prix de symboles de sommation, on peut développer les trois termes présents dans le membre de gauche de la relation (1.9). Il vient

$$(1.10) \quad \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_k) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j (\rho u_k) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \sigma_i),$$

$$\sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} u_k u_l = \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} \delta_{jl} u_k u_l = (u \times u)_i = 0$$

donc  $\sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \rho u_k u_l \right)$  et

$$(1.11) \quad \sum_{j,k,l} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_k u_l) = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho u_l \sigma_i).$$

Enfin  $\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = 0$ , donc  $\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial p}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\epsilon_{ijk} x_j p)$  et

$$(1.12) \quad \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial p}{\partial x_k} = - \sum_{j,k} \epsilon_{ikj} \frac{\partial}{\partial x_k} (p x_j).$$

• La relation (1.8) se déduit alors aisément des relations (1.10) à (1.12) du paragraphe précédent.  $\square$

### Remarque 1.

• Notons que la conservation du moment cinétique (1.8) n'est pas une loi de conservation nouvelle si on suppose que les équations (1.3) à (1.5) sont vérifiées. L'énergie totale massique  $E$  reste toujours évaluée par la relation (1.1) qui est à prendre ponctuellement. De plus, les relations de saut associées à (1.8) peuvent s'écrire le long d'une surface de discontinuité  $\Sigma$  de normale  $n$  et de vitesse  $\zeta$  en fonction du flux de masse  $m$

$$(1.13) \quad m = \rho (u - \zeta) \cdot n$$

qui traverse  $\Sigma$ , sous la forme

$$(1.14) \quad m [\sigma] + [p] (x \times n) = 0.$$

Compte tenu de la définition (1.6), cette relation (1.14) n'apporte pas plus d'information que la relation de saut classique associée à la conservation (1.4) de l'impul-sion, c'est à dire

$$(1.15) \quad m [u] + [p] n = 0.$$

- Par contre, la conservation du moment cinétique (1.8) a l'avantage d'expliquer une loi de conservation fondamentale de la nature, conséquence directe *via* le théorème d'E. Noether (qu'on pourra consulter par exemple dans le livre d'Arnold [Ar76]) de l'invariance par rotation des lois de la physique, mais cachée derrière la forme très locale (1.4) de la conservation de l'impulsion.

## 2) Vitesse tourbillonnante pour les volumes finis.

- Nous utilisons la conservation du moment cinétique pour proposer une méthode de volumes finis qui l'utilise explicitement. Nous commençons par quelques notations.

- Soit  $\mathcal{T}$  un maillage du domaine d'étude  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ . L'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$  des éléments  $K$  du maillage ( $K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ ) définit les volumes de contrôle et nous supposons que dans chaque maille, la densité est une fonction constante du point d'espace :

$$(2.1) \quad \rho(x) = \rho_K, \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

Nous approchons le champ de vitesse par un mouvement de corps rigide linéarisé, paramétré par la vitesse moyenne  $u_K$  et le tourbillon moyen  $\omega_K$  dans la maille  $K$  :

$$(2.2) \quad u(x) = u_K + \frac{1}{2} \omega_K \times (x - x_K), \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

où  $x_K$  désigne le centre de gravité de l'élément  $K$ .

### Proposition 2. Tourbillon local.

Avec les notations introduites en (2.1) et (2.2), on a

$$(2.3) \quad \text{rot } u(x) = \omega_K, \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

### Preuve de la proposition 2.

- On prend le rotationnel de la relation (2.2) :

$$\begin{aligned} \sum_{jklm} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_l (x^m - x_K^m) \right] &= \sum_{jklm} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \delta_j^m \omega_l = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{jlm} (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_j^m - \delta_{im} \delta_{jl} \delta_j^m) \omega_l = \frac{1}{2} (3 - 1) \omega_i = \omega_i. \end{aligned}$$

- La relation (2.3) s'en déduit, à la différence de notation près.  $\square$

**Remarque 2.**

• La relation (2.3) est à prendre dans la maille  $K$  et non pas comme la dérivée au sens des distributions de la fonction  $u(x)$  définie par la relation (2.2). Dans la maille  $K$ , la vitesse est une fonction affine par maille et l'impulsion  $\rho u$  l'est également compte tenu de la relation (2.1). Nous sommes donc en train de définir une méthode plus riche que le schéma de Godunov [Go59] mais plus simple que l'approche Muscl de van Leer [vL79].

• Nous relierons maintenant le moment cinétique  $\sigma_K$  relativement au centre de gravité de la maille  $K$  au tourbillon  $\omega_K$ , à l'aide d'une matrice d'inertie  $J_K$ . Nous posons

$$(2.4) \quad \rho_K \sigma_K = \frac{1}{|K|} \int_K \rho_K (x - x_K) \times u(x) dx, \quad K \in \mathcal{E}_T$$

$$(2.5) \quad (J_K)_{ij} = \frac{1}{|K|} \int_K (|x - x_K|^2 \delta_{ij} - (x - x_K)_i (x - x_K)_j) dx, \quad K \in \mathcal{E}_T.$$

**Proposition 3. Relation tourbillon-moment cinétique.**

Avec les notations introduites aux relations (2.2) à (2.5), on a

$$(2.6) \quad \sigma_K = \frac{1}{2} J_K \bullet \omega_K.$$

**Preuve de la proposition 3.**

• On injecte la représentation (2.2) du champ de vitesse au sein de la définition (2.4) du moment cinétique dans la maille  $K$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \rho_K \sigma_K &= \frac{1}{|K|} \int_K \rho_K (x - x_K) \times \left[ u_K + \frac{1}{2} \omega_K \times (x - x_K) \right] dx \\ &= \frac{1}{2 |K|} \int_K \rho_K (x - x_K) \times \left[ \omega_K \times (x - x_K) \right] dx. \end{aligned}$$

• La relation (2.6), compte tenu de (2.5), résulte de la formule élémentaire  $y \times (\omega \times y) = |y|^2 \omega - (\omega \bullet y) y$  appliquée à  $y = (x - x_K)$ . La proposition en résulte.  $\square$

**Proposition 4. Propriété de la matrice d'inertie.**

La matrice d'inertie  $J_K$  définie à la relation (2.5) est symétrique définie positive.

**Preuve de la proposition 4.**

• Le résultat est classique. Il est d'abord clair que la matrice  $J_K$  est une matrice symétrique. Pour  $\omega \in \mathbb{R}^m$  fixé, on a ensuite

$$\begin{aligned}
 (\omega, J_K \omega) &= \frac{1}{|K|} \int_K (\omega, (x - x_K) \times (\omega \times (x - x_K))) \, dx \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_K (\omega, (x - x_K), \omega \times (x - x_K)) \, dx \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_K [\omega \times (x - x_K)] \bullet [\omega \times (x - x_K)] \, dx \\
 &= \frac{1}{|K|} \int_K |\omega \times (x - x_K)|^2 \, dx \quad \geq 0
 \end{aligned}$$

ce qui montre que  $J_K$  est positive pour tout  $m \in \{2, 3\}$ .

• Si  $m = 3$ , la relation  $(\omega, J_K \omega) = 0$  entraîne que  $\omega$  est presque partout parallèle à tout vecteur  $(x - x_K)$  pour tout  $x \in K$ . Donc  $\omega = 0$  et  $J_K$  est définie positive. Si  $m = 2$ , la relation  $\omega \times (x - x_K) = 0$  pour tout  $x \in K$  entraîne que  $\omega$  appartient au plan du domaine  $\Omega$ . Comme  $\omega$  n'a qu'une composante perpendiculaire à ce plan,  $\omega$  est nul si  $(\omega, J_K \omega) = 0$ . Donc  $J_K$  est définie positive dans ce cas également.  $\square$

• Nous explicitons maintenant la relation entre l'énergie totale  $E_K$  dans une maille et l'énergie interne, supposée constante,  $e_K$  dans cette maille. On suppose donc

$$(2.7) \quad e(x) = e_K, \quad \forall x \in K, \quad \forall K \in \mathcal{E}_T.$$

L'énergie totale  $E_K$  dans la maille  $K$  est définie par intégration de la composante cinétique  $\frac{1}{2} \rho |u|^2$  et de la composante interne  $\rho e$ , compte tenu de la relation (1.1). On pose donc

$$(2.8) \quad \rho_K E_K = \rho_K e_K + \frac{1}{2|K|} \int_K \rho_K |u(x)|^2 \, dx, \quad K \in \mathcal{E}_T,$$

où le champ de vitesse  $u(x)$  dans la maille  $K$  est supposé satisfaire la relation (2.2).

**Proposition 5. Énergie interne.**

Avec les définitions et notations introduites aux relations (2.1) à (2.8), on a

$$(2.9) \quad e_K = E_K - \frac{1}{2} |u_K|^2 - \frac{1}{8} (\omega_K, J_K \omega_K), \quad K \in \mathcal{E}_T.$$

**Preuve de la proposition 5.**

- On évalue l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2|K|} \int_K \rho |u|^2 dx &= \frac{\rho_K}{2|K|} \int_K |u_K + \frac{1}{2} \omega_K \times (x - x_K)|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \rho_K |u_K|^2 + \frac{\rho_K}{8|K|} \int_K |\omega_K \times (x - x_K)|^2 dx \\
 &= \frac{1}{2} \rho_K |u_K|^2 + \frac{1}{8} \rho_K (\omega_K, J_K \omega_K)
 \end{aligned}$$

compte tenu du calcul fait au cours de la preuve de la proposition 4.

- La relation (2.9) résulte alors du calcul ci-dessus et de la définition (2.8) de l'énergie totale.  $\square$

**3) Volumes finis pour les équations d'Euler.**

- Nous proposons dans ce paragraphe de construire un système dynamique discret qui approche les équations (1.1) à (1.5) de la dynamique des gaz. L'idée de base est d'utiliser la représentation affine incomplète (2.2) du champ de vitesse et de tirer de la conservation du moment cinétique une équation d'évolution pour le tourbillon  $\omega_K$ . La variable conservée  $W_K$  dans la maille  $K$  est le vecteur formé de la densité, l'impulsion, le moment cinétique et l'énergie totale :

$$(3.1) \quad W_K = (\rho_K, \rho_K u_K, \rho_K \sigma_K, \rho_K E_K)^t.$$

Nous notons que si  $x \in \mathbb{R}^2$  alors  $W_K \in \mathbb{R}^5$  alors que si  $x \in \mathbb{R}^3$ , on a  $W_K \in \mathbb{R}^8$ .

- Quand on intègre dans la maille  $K$  les lois de conservation (1.3), (1.4), (1.8) et (1.5), on obtient une équation différentielle ordinaire pour décrire l'évolution de  $W_K$  au cours du temps

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} W_K + \frac{1}{|K|} \int_{\partial K} (\Phi \bullet n) d\gamma(x) = 0, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

Le flux  $(\Phi \bullet n)$  dans le second terme de la relation (3.2) est dû au caractère conservatif des équations de la masse, de l'impulsion, du moment cinétique et de l'énergie. Si  $x$  désigne un point du bord  $\partial K$  de l'élément  $K$  ou plus précisément de l'interface  $f$  ( $f$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$  des arêtes du maillage si  $m = 2$  et  $f$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}$  des faces du maillage si  $m = 3$ ) qui sépare deux éléments  $K_g$  et  $K_d$  et si  $U^*(x)$  désigne un état fluide sur cette interface, défini

par exemple par sa densité  $\rho^*(x)$ , sa vitesse  $u^*(x)$  et sa pression  $p^*(x)$ , c'est à dire

$$(3.3) \quad U^*(x) = (\rho^*(x), u^*(x), p^*(x))^t, \quad x \in f$$

on a simplement

$$(3.4) \quad (\Phi \bullet n_f)(K, U^*) = \begin{pmatrix} \rho^* u^* \bullet n_f \\ \rho^* u^* (u^* \bullet n_f) + p^* n_f \\ (x - x_K) \times [\rho^* u^* (u^* \bullet n_f) + p^* n_f] \\ (\rho^* E^* + p^*)(u^* \bullet n_f) \end{pmatrix}$$

où l'énergie totale  $E^*$  de l'état intermédiaire est donnée par un condensé des relations (1.1) et (1.2) :

$$(3.5) \quad E^* = \frac{1}{2} |u^*|^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p^*}{\rho^*},$$

et  $n_f$  désigne la normale à l'interface  $f$  au point  $x \in f$ .

- Le second terme de l'équation (3.2) se décompose sur les faces  $f$  du bord du volume  $K$  :

$$(3.6) \quad \int_{\partial K} (\Phi \bullet n) d\gamma(x) = \sum_{\substack{f \in \mathcal{F}_T \\ f \cap \partial K \neq \emptyset}} \int_f (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x)) d\gamma(x)$$

où  $\mathcal{F}_T$  désigne maintenant l'ensemble des faces du maillage si  $m = 3$  et l'ensemble des arêtes de celui-ci si  $m = 2$ . Quand on utilise le schéma de Godunov, on a  $\omega_K \equiv 0$  et une formule de quadrature à un point

$$(3.7) \quad \frac{1}{|f|} \int_f (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x)) d\gamma(x) \approx (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x_0(f)))$$

qui introduit le centre de gravité  $x_0(f)$  de la face  $f$  du maillage. On utilise alors au sein de la relation (3.7) la valeur de  $U^*(x_0(f))$  qui correspond à l'état stationnaire du problème de Riemann entre les états  $U_g$  et  $U_d$  respectivement à gauche et à droite de l'interface  $f$  :

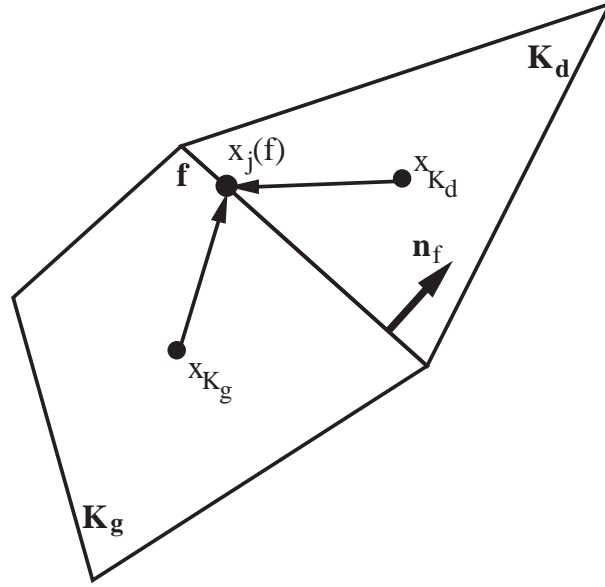
$$(3.8) \quad U^*(x_0(f)) = R(U_g, n_f, U_d).$$

Nous renvoyons le lecteur par exemple à Godlewski-Raviart [GR96] pour les détails de mise en œuvre.

- Nous proposons ici d'enrichir la description de l'interaction entre états sur l'interface pour prendre en compte la caractère variable en espace de la relation (2.2) ainsi que la variation spatiale du moment cinétique, tout en n'utilisant comme outil de résolution de base "que" le problème de Riemann entre deux



états  $U_g$  et  $U_d$ . Le schéma de volumes finis pour les équations d'Euler à l'aide de l'équation différentielle (3.2) suit l'algorithme décrit ci-dessous.



**Figure 1** Extrapolation.

★i★

Pour chaque interface  $f$  du maillage (entre deux cellules de contrôle), on se donne une formule de quadrature avec un nombre fixé ( $p + 1$ ) de points  $x_j(f)$  et des poids associés  $a_j$  :

$$(3.9) \quad \frac{1}{|f|} \int_f (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x)) d\gamma(x) \approx \sum_{j=0}^p a_j (\Phi \bullet n_f)(K, U^*(x_j(f))).$$

★ii★

Les points  $(x_j(f)), j = 0, \dots, p$  étant donnés pour toute interface  $f$  du maillage  $\mathcal{T}$ , on détermine deux états extrapolés  $U_g((x_j(f)))$  et  $U_d((x_j(f)))$  à l'aide du couple d'éléments  $(K_g, K_d)$  situés respectivement à gauche et à droite de l'interface  $f$  (voir la figure 1). Les états extrapolés demandent surtout d'évaluer le champ de vitesse au point  $x_j(f)$  à partir des valeurs  $u_{K_g}$  et  $u_{K_d}$  aux centres  $x_{K_g}$  et  $x_{K_d}$  des mailles  $K_g$  et  $K_d$  :

$$(3.10) \quad u_g(x_j(f)) = u_{K_g} + \frac{1}{2} \omega_{K_g} \times (x_j(f) - x_{K_g})$$

$$(3.11) \quad u_d(x_j(f)) = u_{K_d} + \frac{1}{2} \omega_{K_d} \times (x_j(f) - x_{K_d}),$$

avec les notations de la relation (2.2). On dispose donc des deux états extrapolés de part et d'autre du  $j^{\circ}$  point d'intégration sur la face  $f$  :

$$(3.12) \quad U_g(x_j(f)) = (\rho_{K_g}, u_g(x_j(f)), p_{K_g})^t$$

$$(3.13) \quad U_d(x_j(f)) = (\rho_{K_d}, u_d(x_j(f)), p_{K_d})^t.$$

★ iii ★

Les états extrapolés de part et d'autre du point  $x_j(f)$  d'interface une fois évalués par les relations (3.10) à (3.13), on résout le problème de Riemann monodimensionnel entre ces deux états pour calculer un état stationnaire  $U^*(x_j(f))$  d'inter-face, comme pour le schéma de Godunov :

$$(3.14) \quad U^*(x_j(f)) = R(U_g(x_j(f)), n_f, U_d(x_j(f))), \quad j = 0, \dots, p, \quad f \in \mathcal{F}_{\mathcal{T}}.$$

★ iv ★

Il suffit alors d'évaluer le flux au point  $x_j(f)$  à l'aide de la relation (3.4), écrite au point  $x = x_j(f)$  puis de sommer toutes les contributions des divers points de quadrature grâce aux relations (3.9) puis (3.6).

- On remarque que le flux calculé avec l'algorithme précédent (relations (3.4) à (3.14)) n'est pas *stricto sensu* rigoureusement conservatif. En effet, le moment cinétique est considéré relativement au centre de gravité de chaque maille. Le flux correspondant sur l'interface  $f$  pour cette variable utilise pour l'élément de gauche  $K_g$  le bras de levier  $(x_j(f) - x_{K_g})$  multiplié vectoriellement par le flux d'impulsion et pour l'élément de droite  $K_d$  le bras de levier  $(x_j(f) - x_{K_d})$  multiplié vectoriellement par le même flux d'impulsion. L'écart de non-conservation ne reflète que la différence des points de repère où l'on considère les moments cinétiques.

- On associe enfin ce calcul de flux à un intégrateur temporel par exemple de type Runge-Kutta pour passer de l'état  $W_K^n$  au temps  $n \Delta t$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) à un état  $W_K^{n+1}$  au temps  $(n+1) \Delta t$ . Dans le code de calcul Ns3gr, nous avons utilisé (voir [DM92]) avec satisfaction le schéma de Heun qui est un schéma de Runge-Kutta à deux pas. Pour l'équation différentielle modèle,

$$(3.15) \quad \frac{dw}{dt} = f(w(t))$$

il s'écrit

$$(3.16) \quad \frac{1}{\Delta t}(w^{n+1} - w^n) = \frac{1}{2} [f(w^n) + f(w^n + \Delta t f(w^n))].$$

On dispose alors des variables conservées  $W_K^{n+1}$  au temps  $(n+1)\Delta t$ . Il faut en tirer la vitesse  $u_K$  (c'est clair), le tourbillon par résolution du système linéaire (2.6) de trois équations à trois inconnues si  $x \in \mathbb{R}^3$  (de l'équation (2.6) si  $x \in \mathbb{R}^2$ ), puis l'énergie interne  $e_K$  à l'aide de la relation (2.9). Si le pas de temps  $\Delta t$  n'est pas trop grand (condition de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy), cette dernière grandeur est positive et la relation (1.2) permet de calculer la pression.

**Remarque 3.**

- Le schéma de volumes finis décrit plus haut a un cousinage clair avec la méthode Muscl de van Leer [vL79]. Mais il est plus modeste dans son approche puisqu'une seule variable (le tourbillon  $\omega_K$  dans la maille  $K$ ) est ajoutée pour construire les variables primitives du schéma numérique. L'extrapolation (3.10)-(3.11) ne concerne que le champ de vitesse et aucun limiteur de pente ne doit *a priori* être introduit dans le schéma puisqu'aucune positivité particulière ne doit être respectée lors de l'étape d'extrapolation du champ de vitesse. On utilise également une résolution du problème de Riemann, éventuellement approchée puisque le flux d'interface, en plus des champs classiques, n'utilise que le moment du flux d'impulsion aux points de quadrature. Par contre, la "pente" du champ de vitesse (c'est à dire le tourbillon) est une variable primitive et l'équation discrète (3.2) détermine "toute seule" son évolution en temps, ce qui constitue un avantage substantiel si on le compare au savoir-faire "ad hoc" dans l'approche Muscl de van Leer.

