

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

INSTITUT AÉROTECHNIQUE
DE S^T-CYR

CONDITION LIMITE NUMÉRIQUE

NON RÉFLÉCHISSANTE

FORTEMENT NON LINÉAIRE

François Dubois

Note 270

Juillet 1996

15, RUE MARAT - 78210 SAINT-CYR-L'ÉCOLE

**CONDITION LIMITE NUMÉRIQUE
NON RÉFLÉCHISSANTE
FORTEMENT NON LINÉAIRE**
François Dubois

Note 270

Juillet 1996

| |
|---|
| <p style="text-align: center;">CONDITION LIMITE NUMÉRIQUE NON RÉFLÉCHISSANT FORTEMENT NON LINÉAIRE</p> |
|---|

François DUBOIS
Juillet 1996

RÉSUMÉ

Pour faire évoluer au cours du temps l'état sur la frontière, un schéma décentré permet de prédire une valeur intérieure à l'instant ultérieur. Celle-ci est ensuite utilisée pour évaluer la valeur stationnaire d'un problème de Riemann dont l'autre donnée est la valeur limite à l'instant antérieur. Cette valeur stationnaire constitue le nouvel état au bord du domaine de calcul.

PLAN

- I. Introduction
- II. Traitement par caractéristiques
- III. Condition non réfléchissante non linéaire
- IV. Application à l'équation de Burgers
- V. Application à la dynamique des gaz
- VI. Références bibliographiques

I. INTRODUCTION

Nous étudions une loi de conservation à une dimension d'espace :

$$(1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

où t est la variable de temps ($t > 0$), x la variable d'espace ($0 < x < L$), W le vecteur des inconnues ($W(t, x) \in \mathbb{R}^m$) dans leur forme conservative et $\mathbb{R}^m \ni W \rightarrow f(W) \in \mathbb{R}^m$ la fonction de flux, choisie de sorte que le système (1) soit hyperbolique : la jacobienne $A(W) = df(W)$ est une matrice diagonalisable dans le champ réel. On note $\lambda(W)$ une valeur propre de A ($\lambda(W) \in \mathbb{R}$) et $r(\lambda, W)$ le vecteur propre associé ($r(\lambda, W) \in \mathbb{R}^m$) :

$$(2) \quad A(W) \cdot r(\lambda, W) = \lambda(W) r(\lambda, W) .$$

La loi de conservation (1) est discrétisée à l'aide d'un pas d'espace Δx paramétré par un entier J :

$$(3) \quad \Delta x = \frac{L}{J} ,$$

à l'aide d'un pas de temps Δt qui vérifie une condition de stabilité de type Courant-Friedrichs-Lewy [CFL] et d'un schéma aux différences que nous supposons explicite et à trois points pour fixer les idées :

$$(4) \quad \frac{1}{\Delta t} (W_j^{n+1} - W_j^n) + \frac{1}{\Delta x} \left[\phi(W_j^n, W_{j+1}^n) - \phi(W_{j-1}^n, W_j^n) \right] = 0$$

où $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \ni (U, V) \rightarrow \phi(U, V) \in \mathbb{R}^m$ est la fonction de flux numérique du schéma (voir par exemple Harten-Lax-Van-Leer [HLVL]) et W_j^n une valeur approchée de $W(n\Delta t, j\Delta x)$. La relation (4) définit une valeur du champ W au nouvel instant $(n+1)\Delta t$ lorsque l'entier j est supérieur ou égal à 1 ou inférieur ou égal à $J-1$. Par contre, pour les deux valeurs $j=0$ et $j=J$, la relation (4) ne peut pas être utilisée et il est nécessaire de construire une condition limite numérique en complément du schéma intérieur (4).

Dans le cas où $f(\bullet)$ est une application linéaire, c'est à dire où la matrice $A(W)$ ne dépend pas de l'état W et qu'on peut écrire :

$$(5) \quad f(W) = A \cdot W,$$

diverses conditions limites numériques peuvent être employées selon les situations envisagées. Nous rappelons au second paragraphe le choix classique de suivi des caractéristiques (voir Bramley-Sloan [BS] ou par exemple Veuillot-Viviand [VV]).

L'analyse de stabilité du schéma intérieur (4) associé aux conditions limites numériques en $j=0$ et $j=J$ est délicate. Elle a été développée par Gustafsson-Kreiss-Sundström [GKS] et Goldberg-Tadmor [GT] ont ensuite proposé des critères simples pour vérifier que l'ensemble du schéma numérique est stable au sens de Kreiss [K70].

Dans le cas où la loi de conservation (1) est non linéaire et en particulier pour les équations d'Euler de la dynamique des gaz (voir Landau-Lifchitz [LL] par exemple) le choix des conditions aux limites qui respectent les données physiques du problème a été proposé par Godunov (voir le livre de Godunov et ses collaborateurs [GZIKP]) et étendu dans le champ fortement non linéaire par nous mêmes (voir Dubois-Le Floch [DLF] ainsi que des exposés pédagogiques dans [D88] ou Chargy-Dubois-Vila [CDV]).

Le point traité dans cette note consiste à proposer une condition limite non réfléchissante en $j=J$ (pour fixer les idées ; le cas $j=0$ est tout à fait analogue) qui d'une part dégénère naturellement dans le cas linéaire du traitement par caractéristiques rappelé au paragraphe II et d'autre part permette la prise en compte d'ondes monodimensionnelles fortement non linéaires telles que chocs et détente. Cette généralisation (heuristique) est proposée au paragraphe III.

II. TRAITEMENT PAR CARACTÉRISTIQUES

• Nous devons trouver une condition limite au point de grille $j=J$ qui permette d'écrire que "toutes les ondes sortent librement du domaine de calcul" et "qu'aucune onde ne pénètre de l'extérieur". Rappelons que si la loi de conservation (1) est une advection de vitesse constante λ , c'est à dire :

$$(6) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 ,$$

le problème à condition initiale et à la limite formé de l'équation aux dérivées partielles (6), de la condition initiale :

$$(7) \quad w(0, x) = w^0(x) \quad x \leq L ,$$

et de la condition limite (éventuelle)

$$(8) \quad w(t, L) = g(t) \quad t \geq 0$$

est bien posé sous les conditions suivantes, qui distinguent le cas où la frontière $x=L$ est une entrée ($\lambda < 0$ dans ce cas de figure) ou une sortie ($\lambda > 0$). De façon précise, et moyennant des hypothèses ad hoc sur les données (voir Kreiss [K70]), le problème (6) (7) (8) est bien posé si $\lambda < 0$ et le problème (6) (7) est bien posé pour $\lambda > 0$.

• Lorsque la frontière se comporte comme une entrée, c'est à dire si les droites caractéristiques d'équation $\frac{dx}{dt} = \lambda$ entrent dans le domaine $\{x < L\}$ si on les suit avec un temps croissant, il faut se donner une condition limite (8) en $x=L$. Lorsque la frontière est une sortie, c'est à dire si les caractéristiques sortent du domaine $\{x < L\}$ dans les conditions analogues, il n'y a pas de condition limite à donner en $\{x=L\}$ pour poser correctement l'équation d'advection.

Nous suivons cette idée pour construire une condition limite numérique non réfléchissante en $x=L$ pour l'équation d'advection (6) dans une première étape. Nous traitons d'abord le cas $\lambda > 0$ (sortie) puis le cas $\lambda < 0$ (entrée).

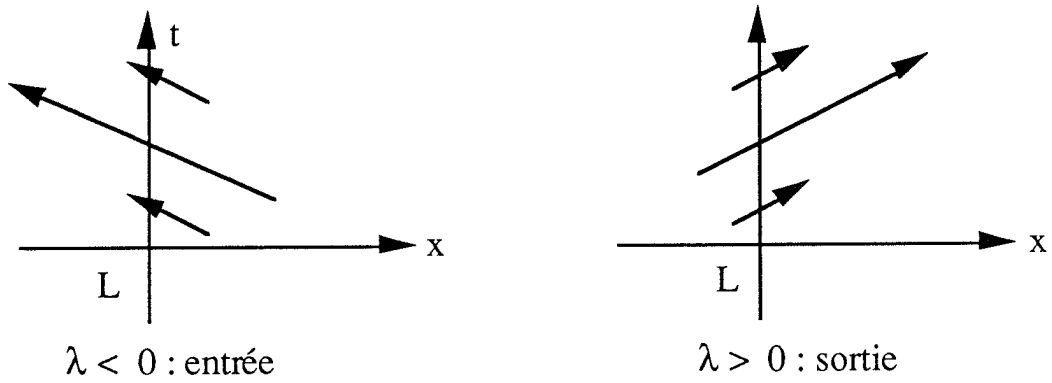


Figure 1
 Deux types de comportement de la
 frontière $x=L$ du domaine $\{x < L\}$

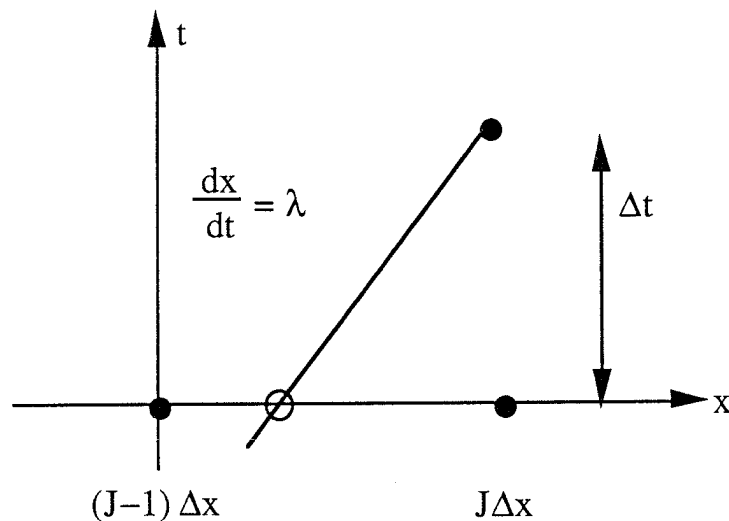


Figure 2
 Interpolation caractéristique en sortie ($\lambda > 0$)

- Si $\lambda > 0$, la frontière $x=L$ ($j=J$ pour le schéma numérique) est une sortie et aucune donnée extérieure à l'équation (6) et aux conditions "initiales" à $t=n\Delta t$, c'est à dire aux états w_{J-1}^n et w_J^n n'est à prendre en compte. Le traitement par caractéristiques consiste à chercher le pied en $t=n\Delta t$ de la caractéristique $\frac{dx}{dt} = \lambda$ passant par le point de grille $(t, x) = ((n+1)\Delta t, J\Delta x)$, à écrire qu'une

solution de l'advection (6) est constante le long d'une telle caractéristique et qu'au temps $t=n\Delta t$ on interpole linéairement les données dans l'intervalle $[(J-1)\Delta x, J\Delta x]$. Il vient alors simplement :

$$(9) \quad w_J^{n+1} = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} w_{J-1}^n + \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x}\right) w_J^n \quad (\lambda > 0).$$

La relation (9) peut aussi s'interpréter comme un schéma décentré d'ordre un en espace et en temps pour l'évolution de la valeur frontière w_J^n .

L'approche proposée à la relation (9) est stable si et seulement si les coefficients de w_{J-1}^n et w_J^n sont positifs, c'est à dire si λ est positif et si :

$$(10) \quad \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

ce qui constitue une version très classique de la condition de stabilité CFL.

- Si $\lambda < 0$, la frontière $x=L$ est une entrée pour le domaine $x \leq L$. Il importe donc de donner explicitement une valeur à l'instant $t=(n+1)\Delta t$ et au point $x=J\Delta x$. La frontière $x=L$ est non réfléchissante si et seulement si la donnée w_J^n n'est pas perturbée par une autre donnée numérique. On écrit donc :

$$(11) \quad w_J^{n+1} = w_J^n \quad (\lambda < 0)$$

- Le traitement pour l'équation d'advection (6) est bien entendu analogue en $j=0$. Seul le signe de λ change pour séparer les cas d'entrée et de sortie du domaine $x \geq 0$:

$$(12) \quad w_0^{n+1} = w_0^n \quad (\lambda > 0)$$

$$(13) \quad w_0^{n+1} = \left(1 + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) w_0^n - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} w_1^n \quad (\lambda < 0).$$

- Le cas d'un système hyperbolique linéaire de lois de conservation se déduit très simplement du cas de l'équation d'advection et de la décomposition d'un vecteur arbitraire W de \mathbb{R}^m sur la base $r(\lambda)$ des vecteurs propres, λ appartenant au spectre $\sigma(A)$ de la matrice A (voir la relation (2)) :

$$(14) \quad W = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \varphi(\lambda, W) r(\lambda).$$

Les coefficients caractéristiques $\varphi(\lambda, W)$ sont des formes linéaires continues du champ $W : \mathbb{R}^m \ni W \rightarrow \varphi(\lambda, W) \in \mathbb{R}$, pour $\lambda \in \sigma(A)$ et l'écriture de la loi de conservation (1) (5) à l'aide de ces coefficients est particulièrement simple. Compte-tenu de la relation (2), on a en effet :

$$(15) \quad \frac{\partial \varphi(\lambda, W)}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \varphi(\lambda, W)}{\partial x} = 0, \quad \lambda \in \sigma(A)$$

et pour chaque valeur propre λ , le champ scalaire $\varphi(\lambda, \bullet)$ suit une équation d'advection.

La condition limite non réfléchissante en $j=J$ est alors une simple réécriture des relations (9) et (11) compte-tenu de la représentation (14) :

$$(16) \quad \varphi(\lambda, W_J^{n+1}) = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \varphi(\lambda, W_{J-1}^n) + \left(1 - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \varphi(\lambda, W_J^n), \quad \lambda > 0$$

$$(17) \quad \varphi(\lambda, W_J^{n+1}) = \varphi(\lambda, W_J^n), \quad \lambda < 0$$

qui peut se synthétiser sous la forme :

$$(18) \quad W_J^{n+1} = W_J^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda > 0} \lambda \left[\varphi(\lambda, W_J^n) - \varphi(\lambda, W_{J-1}^n) \right] r(\lambda).$$

Dans le cas de la frontière $j=0$, seules les relations algébriques changent et l'on a :

$$(19) \quad \varphi(\lambda, W_0^{n+1}) = \varphi(\lambda, W_0^n), \quad \lambda > 0$$

$$(20) \quad \varphi(\lambda, W_0^{n+1}) = \left(1 + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \varphi(\lambda, W_0^n) - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} \varphi(\lambda, W_1^n), \quad \lambda < 0$$

$$(21) \quad W_0^{n+1} = W_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} \lambda \left[\varphi(\lambda, W_1^n) - \varphi(\lambda, W_0^n) \right] r(\lambda).$$

- Il peut être utile en vue des applications à l'aérodynamique de préciser la forme particulière des relations (18) et (21) dans le cas où l'on résout les équations d'Euler de la dynamique des gaz linéarisées autour d'un état \tilde{W} . On part d'une forme non conservative de la loi de bilan (1)

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ c^2 / \rho & u & p_s \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ s \end{pmatrix} = 0 .$$

L'état $W = {}^t(\rho, u, s)$ introduit la masse volumique ρ , la vitesse u , l'entropie spécifique s et la matrice $B(W)$ de la relation (22) utilise également la vitesse du son c et la dérivée p_s de la pression par rapport à l'entropie spécifique à masse volumique supposée constante :

$$(23) \quad dp = c^2 d\rho + p_s ds .$$

La linéarisation de la loi de la dynamique (22) consiste à figer la matrice $B(W)$ autour d'une valeur $B(\tilde{W})$, à considérer l'incrément $W' = W - \tilde{W} = {}^t(\rho', u', s')$ puis à enlever tous les "prime", ce qui conduit à transformer la relation (23) en :

$$(24) \quad p = \tilde{c}^2 \rho + \tilde{p}_s s .$$

Les valeurs propres λ de la matrice $B(\tilde{W})$ ont une expression classique :

$$(25) \quad \lambda = \tilde{u} - \tilde{c}, \tilde{u}, \tilde{u} + \tilde{c}$$

et les vecteurs propres $r(\lambda)$ se calculent sans difficulté, en suivant l'ordre croissant proposé en (25) :

$$(26) \quad r(\lambda) = \frac{1}{2 \tilde{\rho} \tilde{c}^2} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ -\tilde{c} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\tilde{c}^2} \begin{pmatrix} -\tilde{p}_s \\ 0 \\ \tilde{c}^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2 \tilde{\rho} \tilde{c}^2} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{c} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

La représentation (14) de l'incrément W s'écrit alors :

$$(27) \quad W = (p - \tilde{\rho} \tilde{c} u) r(\tilde{u} - \tilde{c}) + s r(\tilde{u}) + (p + \tilde{\rho} \tilde{c} u) r(\tilde{u} + \tilde{c})$$

ce qui explicite complètement les "ainsi appelées" variables caractéristiques :

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi_1(W) = p - \tilde{\rho} \tilde{c} u \\ \varphi_2(W) = s \\ \varphi_3(W) = p + \tilde{\rho} \tilde{c} u . \end{cases}$$

- Dans le cas d'un écoulement monodimensionnel de fluide parfait non visqueux allant de gauche à droite ($\tilde{u} > 0$) et subsonique ($\tilde{u} < \tilde{c}$), "l'entrée" $x=0$ comporte deux valeurs propres associées à des caractéristiques entrantes ($\tilde{u} > 0, \tilde{u} + \tilde{c} > 0$) et une caractéristique sortante ($\tilde{u} - \tilde{c} < 0$) alors que la "sortie" $x=L$ comporte une valeur propre entrante ($\tilde{u} - \tilde{c} < 0$) et deux valeurs propres sortantes ($\tilde{u} > 0, \tilde{u} + \tilde{c} > 0$) comme l'illustre la figure 3. La relation (21) prend alors la forme :

$$(29) \quad W_0^{n+1} = W_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{u} - \tilde{c}) \left[(p_1^n - \tilde{\rho} \tilde{c} u_1^n) - (p_0^n - \tilde{\rho} \tilde{c} u_0^n) \right] r(\tilde{u} - \tilde{c}) .$$

avec des notations évidentes, alors que la relation (18) se réécrit en :

$$(30) \quad \begin{cases} W_J^{n+1} = W_J^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{u} [s_J^n - s_{J-1}^n] r(\tilde{u}) \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{u} + \tilde{c}) \left[(p_J^n + \tilde{\rho} \tilde{c} u_J^n) - (p_{J-1}^n + \tilde{\rho} \tilde{c} u_{J-1}^n) \right] r(\tilde{u} + \tilde{c}) . \end{cases}$$

- Dans un écoulement monodimensionnel linéarisé allant de gauche à droite mais supersonique, il y a trois caractéristiques entrantes à "l'entrée" $x=0$ puisque $\tilde{u} - \tilde{c} > 0$ et trois caractéristiques sortantes en $x=L$. La condition limite non réfléchissante linéarisée s'écrit alors :

$$(31) \quad W_0^{n+1} = W_0^n$$

$$(32) \quad W_J^{n+1} = W_J^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} B(\tilde{W}) \cdot (W_J^n - W_{J-1}^n)$$

et cette intuition est confortée par l'examen de la figure 4.

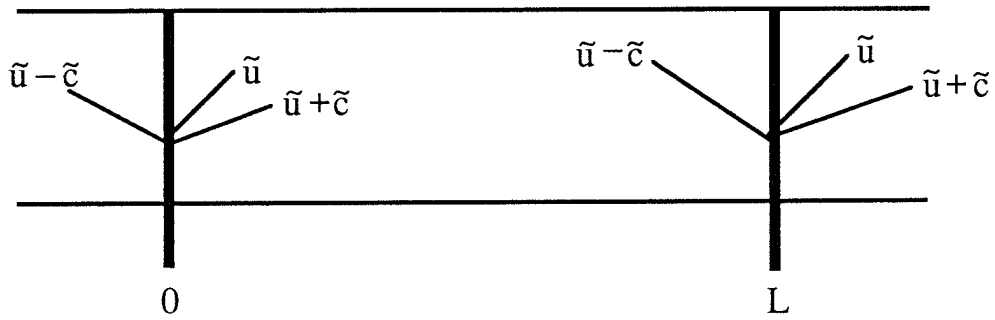


Figure 3

Entrée subsonique en $x=0$ (deux caractéristiques entrantes et une sortante) et sortie subsonique en $x=L$ (une caractéristique entrante et deux sortantes)

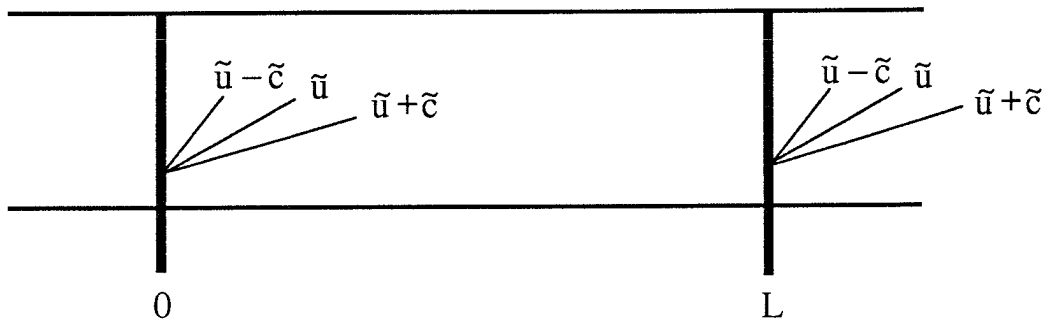


Figure 4

Entrée supersonique en $x=0$ (trois directions caractéristiques entrantes) et sortie supersonique en $x=L$ (trois caractéristiques sortantes)

III. CONDITION NON RÉFLÉCHISSANTE NON LINÉAIRE

- Nous nous proposons maintenant d'étendre les relations (18) et (21) qui caractérisent une condition limite non réfléchissante dans le cas linéaire au cas non linéaire. Bien entendu, lorsque le cas non linéaire dégénère en un système hyperbolique linéaire, nous devons retrouver le traitement par caractéristiques comme un cas particulier.

- Nous adoptons dans un premier temps une démarche très naïve qui consiste à utiliser l'information disponible. Il s'agit d'une part de l'état au bord W_B au temps $n\Delta t$ et au point $J\Delta x$, d'autre part l'état W_A au point $(J-1)\Delta x$ intérieur au maillage le plus immédiat du bord à l'instant $n\Delta t$ et enfin de la loi de conservation (1). Nous cherchons un état W^* au point $J\Delta x$ et à l'instant $(n+1)\Delta t$. Nous notons K le triangle constitué par les trois points précédents de l'espace-temps :

$$K = (((J-1)\Delta x, n\Delta t), (J\Delta x, n\Delta t), (J\Delta x, (n+1)\Delta t)),$$

nous supposons le champ W affine sur le bord ∂K du triangle ainsi que le flux $f(W)$ sur ce bord, ce qui constitue une approximation d'autant plus légitime que les états W_A , W_B et W^* sont voisins.

Nous intégrons la loi de conservation (1) dans le triangle K et utilisons la relation d'intégration par parties. Nous obtenons :

$$(33) \quad \int_{\partial K} \{W n_t + f(W) n_x\} d\gamma = 0.$$

L'explicitation des termes de cette intégrale de contour demande un peu de soin pour le calcul de la normale le long du côté ③ (voir les notations introduites

figure 5). Comme on a $\int_{\partial K} n d\gamma = 0$, il vient simplement :

$$(34) \quad \begin{cases} \int_{\textcircled{3}} n_x d\gamma = - \int_{\textcircled{2}} n_x d\gamma = - \Delta t \\ \int_{\textcircled{3}} n_t d\gamma = - \int_{\textcircled{1}} n_t d\gamma = + \Delta x \end{cases}$$

avec des notations explicitées sur la figure 5. De plus, l'intégrale d'une fonction affine sur un segment s'évalue directement à l'aide d'une quadrature de type formule des trapèzes. L'explicitation de la relation (33) conduit donc à :

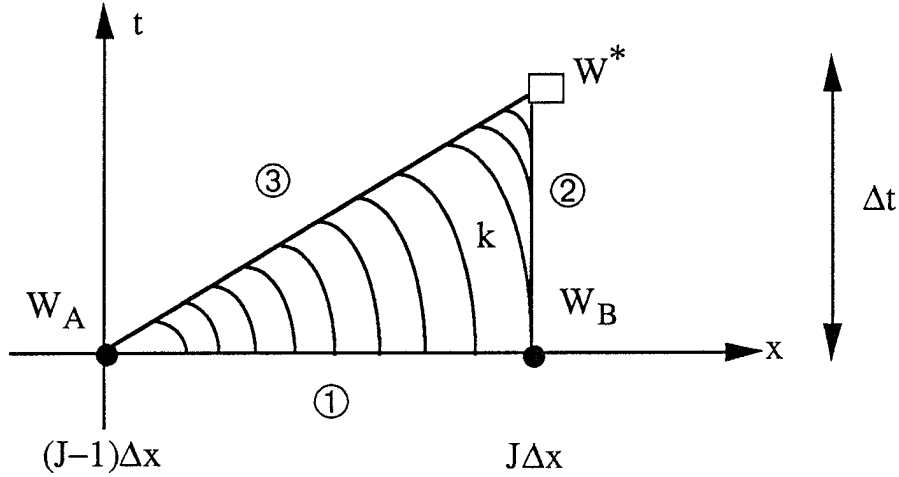


Figure 5
Cellule de contrôle pour intégrer la loi de conservation (1)
au bord du domaine $x=L$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} (W_A + W_B) \Delta x + \frac{1}{2} (f(W_B) + f(W^*)) \Delta t \\
 & + \frac{1}{2} (W^* + W_A) \Delta x - \frac{1}{2} (f(W^*) + f(W_A)) \Delta t = 0 ,
 \end{aligned}$$

soit après simplification, à la relation :

$$(35) \quad \frac{W^* - W_B}{\Delta t} + \frac{f(W_B) - f(W_A)}{\Delta x} = 0 .$$

L'intégration de la loi de conservation (1) dans le triangle K de la figure 5 définit un premier candidat W^* comme valeur au bord du domaine de calcul à l'instant $(n+1)\Delta t$. On remarque qu'il s'agit tout simplement du schéma décentré à gauche pour la frontière $x=J\Delta x$.

Dans le cas de l'autre bord $x=0$, on dispose de l'état de bord W_A en $x=0$ et $t=n\Delta t$, de l'état W_B dans la première maille intérieure $x=\Delta x$ et $t=n\Delta t$, et on cherche W^* au bord mais à l'instant discret directement immédiat $(n+1)\Delta t$. Une intégration de la loi de conservation dans le triangle d'espace-temps représenté figure 6 conduit au schéma suivant pour le calcul de W^* :

$$(36) \quad \frac{W^* - W_A}{\Delta t} + \frac{f(W_B) - f(W_A)}{\Delta x} = 0 .$$

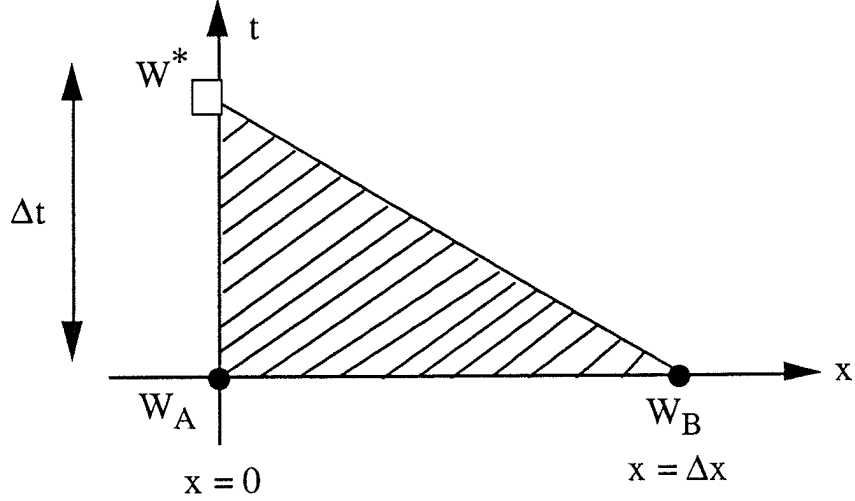


Figure 6
Cellule d'intégration de la loi de conservation (1)
au bord $x=0$ du domaine $[0, L]$.

- Critiquons maintenant le résultat obtenu, en comparant dans le cas linéaire les expressions (18) et (35) d'une part, (21) et (36) d'autre part (et en tenant compte du changement de notation). On peut réécrire la relation (18) sous la forme :

$$(37) \quad \begin{cases} W_J^{n+1} = W_B - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f(W_B) - f(W_A)) + \\ \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} \lambda [\varphi(\lambda, W_B) - \varphi(\lambda, W_A)] r(\lambda) \end{cases}$$

et compte tenu de la relation (35), nous avons aussi :

$$(38) \quad W_J^{n+1} = W^* + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} \lambda [\varphi(\lambda, W_B) - \varphi(\lambda, W_A)] r(\lambda).$$

Nous pouvons expliciter le terme complémentaire du membre de droite de la relation (38) à l'aide des états W^* et W_B uniquement, puisque l'on a :

$$(39) \quad \varphi(\lambda, W^*) = \varphi(\lambda, W_B) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda [\varphi(\lambda, W_B) - \varphi(\lambda, W_A)], \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

Il vient donc :

$$(40) \quad W_J^{n+1} = W^* + \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} \{ (\varphi(\lambda, W_B) - \varphi(\lambda, W^*)) \} r(\lambda).$$

De même en $j=0$, on peut introduire petit à petit l'état W^* au sein de la relation (21). Nous avons dans un premier temps :

$$(41) \quad \begin{cases} W_0^{n+1} = W_A - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(W_B) - f(W_A)] \\ \quad + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda > 0} \lambda [\varphi(\lambda, W_B) - \varphi(\lambda, W_A)] r(\lambda) \end{cases}$$

et une réécriture via les variables caractéristiques $\varphi(\lambda, \bullet)$ de la relation (36) :

$$(42) \quad \varphi(\lambda, W^*) = \varphi(\lambda, W_A) - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x} [\varphi(\lambda, W_B) - \varphi(\lambda, W_A)], \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

qui conduisent à :

$$(43) \quad W_0^{n+1} = W^* - \sum_{\lambda \in \sigma(A), \lambda < 0} [\varphi(\lambda, W^*) - \varphi(\lambda, W_A)] r(\lambda).$$

• Les relations entre le couple (W^*, W_B) et l'état W_J^{n+1} d'une part, entre le couple (W_A, W^*) et l'état W_0^{n+1} d'autre part sont de même type puisque dans le premier cas W_J^{n+1} est l'état stationnaire $(\frac{x}{t} = 0)$ du problème de Riemann $R(W^*, W_B)$ et dans le second cas, W_0^{n+1} est l'état stationnaire du problème de Riemann $R(W_A, W^*)$.

Rappelons que le problème de Riemann $R(W_g, W_d)$ est le problème de Cauchy pour la loi de conservation (1) associé à la donnée initiale discontinue

$$(44) \quad W(0, x) = \begin{cases} W_g & x < 0 \\ W_d & x > 0. \end{cases}$$

La résolution fait apparaître un champ auto semblable $U(\frac{x}{t}; W_g, W_d)$ dont le calcul est bien classique (voir Courant-Friedrichs [CF], Landau-Lifchitz [LL], Godunov et al [GZIKP] ou nos notes de cours [CDV]). On peut donc réécrire les relations (40) et (43) sous la forme :

$$(45) \quad \begin{cases} W^* = W_J^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(W_J^n) - f(W_{J-1}^n)] \\ W_J^{n+1} = U(0; W^*, W_J^n) \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} W^* = W_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(W_1^n) - f(W_0^n)] \\ W_0^{n+1} = U(0 ; W_0^n, W^*) \end{cases}$$

et cette écriture oublie complètement le caractère initialement linéaire du problème posé, au bénéfice d'une part d'un calcul non linéaire (mais très simple) d'un état W^* candidat à la valeur au bord et d'autre part de la résolution $U(\xi ; \bullet, \bullet)$ du problème de Riemann (1) (44) pour la loi non linéaire $f(\bullet)$, exercice délicat mais classique.

- A la frontière, il faut résoudre un problème de Riemann. Cette remarque, clairement présente aux relations (45) et (46), n'est pas nouvelle. Elle a été proposée pour un schéma numérique par Godunov et al [GZIKP], nous l'avons reprise dans le cas continu avec P. Le Floch [DLF] et étendue pour des conditions limites incomplètes des équations d'Euler pour les schémas de volumes finis ([D88], [CDV] par exemple).

- Nous rappelons la procédure heuristique pour le calcul de la condition non réfléchissante non linéaire. On prédit d'abord une valeur intérieure W^* à l'instant ultérieur $(n+1)\Delta t$ à l'aide du schéma décentré imposé par la géométrie de la configuration puis on résout un problème de Riemann à la frontière dont la valeur intérieure est W^* et la valeur extérieure l'état frontière au pas de temps antérieur $n\Delta t$.

IV. APPLICATION À L'ÉQUATION DE BURGERS

• Nous étudions maintenant ce que deviennent les relations (46) dans le cas très simple de l'équation de Burgers :

$$(47) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (w^2) = 0$$

modèle non linéaire où tous les calculs s'explicitent facilement. Nous adoptons les notations de la figure 6, imposons une condition de type CFL :

$$(48) \quad |w_A| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad , \quad |w_B| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

et rappelons que la solution $U(0; w_g, w_d)$ du problème de Riemann $R(w_g, w_d)$ pour l'équation de Burgers est donnée par les relations suivantes, illustrées figure 7 :

$$(49) \quad U(0; w_g, w_d) = \begin{cases} w_g, & w_d > 0, \quad w_g + w_d > 0 \\ w_d & w_d < 0, \quad w_g + w_d < 0 \\ 0 & w_g < 0, \quad w_d > 0. \end{cases}$$

L'état de gauche est w_A et l'état de droite w^* , que l'on tire de la relation (46) :

$$(50) \quad w^* = w_A - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (w_B^2 - w_A^2).$$

Pour w_A satisfaisant à la condition (48), l'évaluation de la relation (46) à l'aide de (49) et (50) conduit au calcul suivant de la condition limite non réfléchissante :

$$(51) \quad w_0^{n+1} = \begin{cases} w^* = w_0^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((w_1^n)^2 - (w_0^n)^2 \right) & \text{si} \\ w_0^n \leq \tilde{w}_A \equiv \sqrt{4 \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 - (w_1^n)^2} - 2 \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ w_0^n & \text{si} \quad w_0^n > \tilde{w}_A. \end{cases}$$

La valeur intermédiaire \tilde{w}_A est solution de l'équation $w^*(\tilde{w}_A) + \tilde{w}_A = 0$ et sépare le champ où la frontière $x=0$ se comporte comme une sortie supersonique ($w_0^n = w^*$ si $w_0^n \leq \tilde{w}_A$) de celui où elle se comporte comme une entrée supersonique ($w_0^{n+1} = w_0^n$ si $w_0^n \geq \tilde{w}_A$). On retrouve là un comportement que nous avons déjà analysé par ailleurs (voir [DLF]).

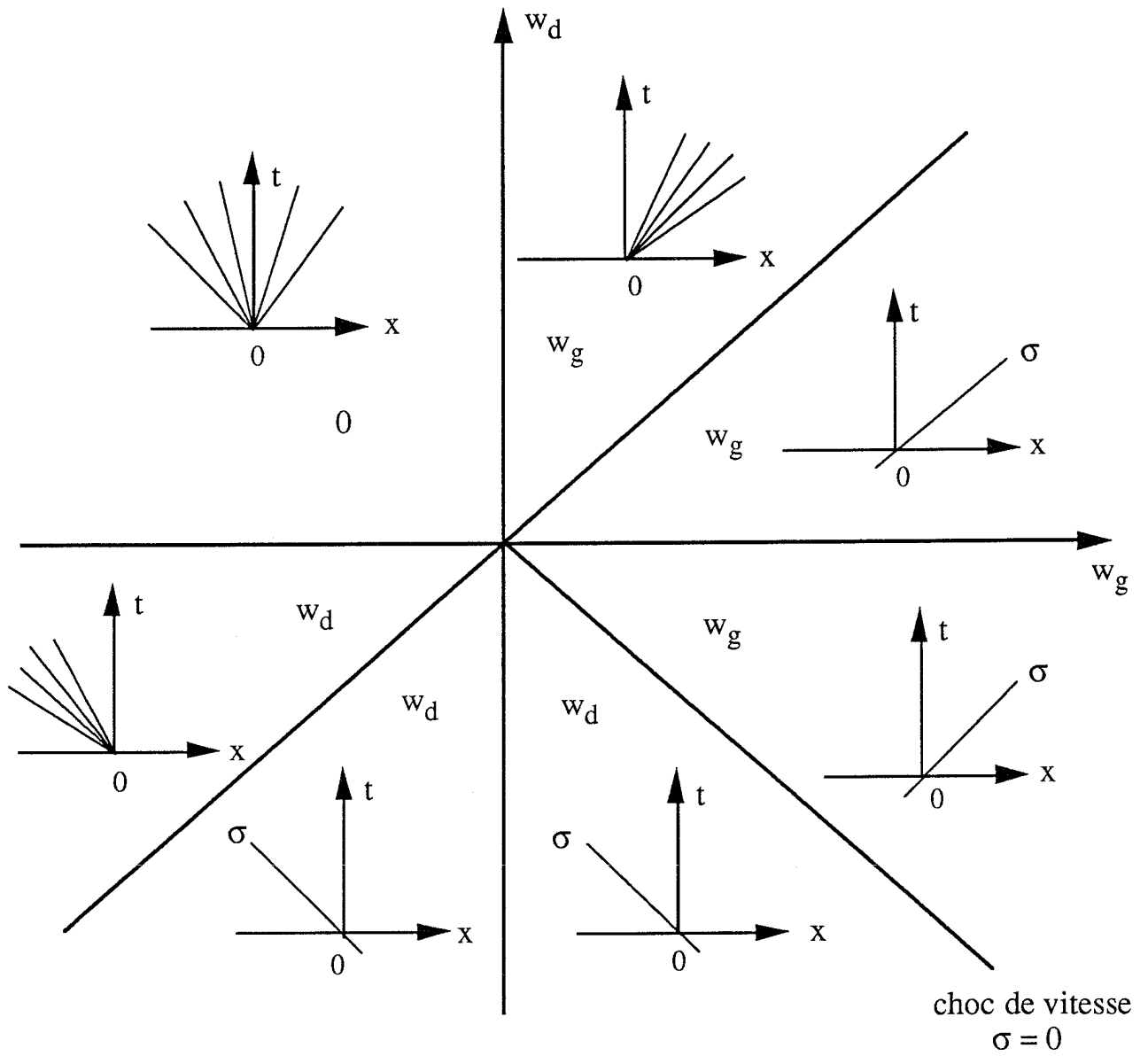


Figure 7
 Valeur stationnaire $U(0 ; w_g, w_d)$ du problème
 de Riemann pour l'équation de Burgers (47)

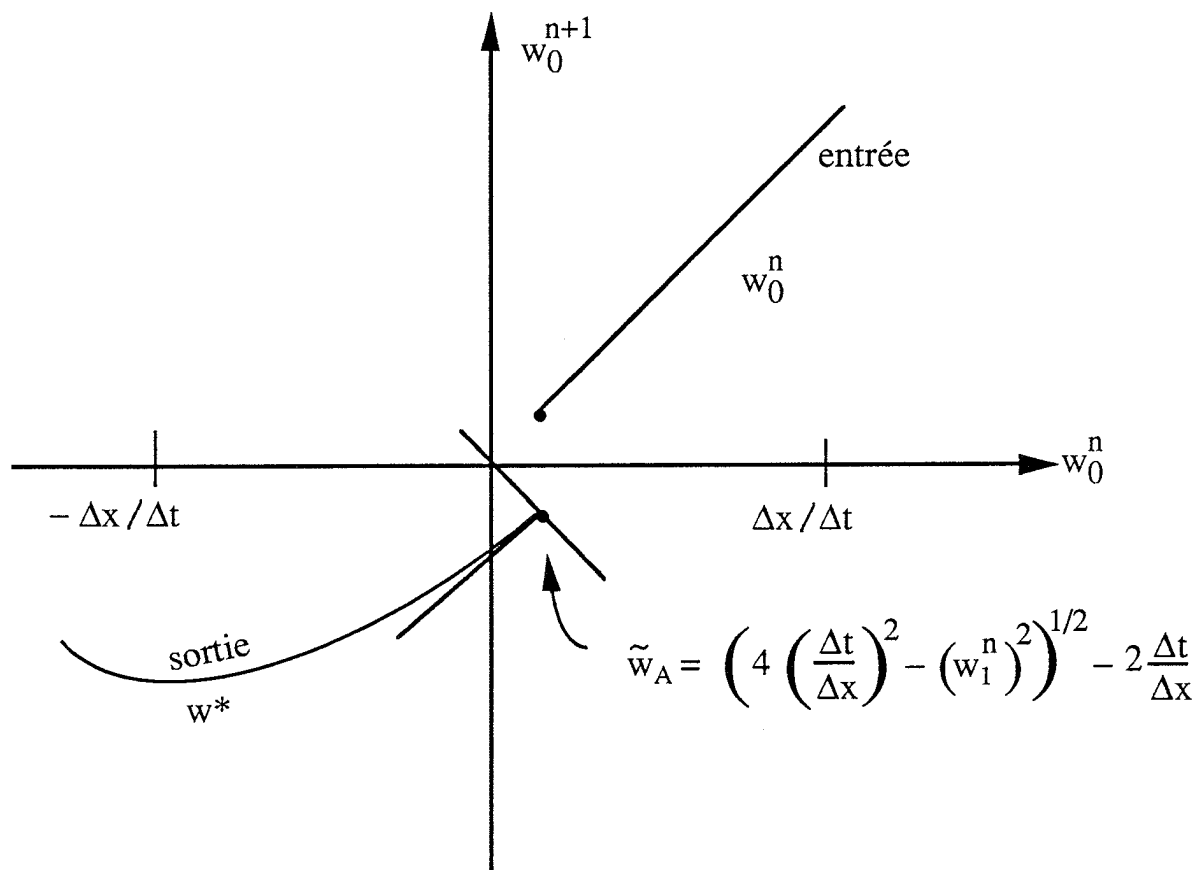


Figure 8
Condition limite non réfléchissante non linéaire
pour l'équation de Burgers en $x=0$.

V. APPLICATION À LA DYNAMIQUE DES GAZ

- Dans le cas de la dynamique des gaz, les relations (45) et (46) sont explicites et le cas non linéaire n'est qu'une variation sur le problème de Riemann que nous n'explicitons pas davantage. Par contre, il peut être utile dans les applications de se contenter d'une approche faiblement non linéaire, ce qui évite d'acquérir un savoir faire parfois lourd pour le problème de Riemann. En effet, on peut se contenter de donner du problème de Riemann une solution approchée grâce à une linéarisation astucieuse.

En effet, la relation (30) par exemple utilise un état \tilde{W} pour linéariser l'équation qui est traditionnellement W_{J-1}^n (voir Msallam [MS97] par exemple). Ce choix n'est visiblement pas le meilleur et il semble raisonnable d'utiliser au contraire l'état de Roe [R81], moyenne non linéaire de W_{J-1}^n et W_J^n (ou W_A et W_B dans les autres notations).

$$(52) \quad \tilde{W} = \text{Roe} (W_{J-1}^n, W_J^n) .$$

Dans le cas du gaz parfait polytropique paramétré par $\gamma > 1$, l'état de Roe \tilde{W} est défini par sa vitesse \tilde{u} et l'enthalpie totale \tilde{H} :

$$(53) \quad \tilde{H} = \frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{c}^2}{\gamma-1}$$

avec :

$$(54) \quad \tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_A} u_A + \sqrt{\rho_B} u_B}{\sqrt{\rho_A} + \sqrt{\rho_B}}$$

$$(55) \quad \tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_A} H_A + \sqrt{\rho_B} H_B}{\sqrt{\rho_A} + \sqrt{\rho_B}}$$

et ces seuls paramètres permettent de recalculer une matrice $A(\tilde{W})$, en prenant garde à travailler en variables conservatives... Nous renvoyons le lecteur à la thèse de Mechlmann [M91] pour les détails de mise en oeuvre de la méthode de Roe.

Le détail des calculs algébriques peut être conduit comme suit. Les variables conservatives W des équations d'Euler s'écrivent :

$$(56) \quad W = {}^t \left(\rho, \rho u, \rho E \equiv \rho e + \rho \frac{u^2}{2} \right)$$

et la pression s'exprime simplement par la relation :

$$(57) \quad p = (\gamma-1) \rho e = (\gamma-1) \left[\rho E - \frac{1}{\rho} (\rho u)^2 \right].$$

Il en résulte que la jacobienne $df(\tilde{W})$ a pour expression algébrique :

$$(58) \quad A(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2} \tilde{u}^2 & (3-\gamma) \tilde{u} & (\gamma-1) \\ \frac{\gamma-1}{2} \tilde{u}^2 - \tilde{u} \tilde{H} & \tilde{H} - (\gamma-1) \tilde{u}^2 & \gamma \tilde{u} \end{pmatrix}$$

et que lorsqu'on choisit pour état \tilde{W} la moyenne de Roe définie aux relations (54) (55), on a l'identité remarquable :

$$(59) \quad f(W_d) - f(W_g) = A(\tilde{W}) \bullet (W_d - W_g).$$

Les valeurs propres de $A(\tilde{W})$ sont bien entendu notées λ , avec $\lambda \in \{\tilde{u}-\tilde{c}, \tilde{u}, \tilde{u}+\tilde{c}\}$ et \tilde{c} défini par la relation (53). Les vecteurs propres associés sont, dans l'ordre précédent :

$$(60) \quad r(\lambda, \tilde{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \\ \tilde{H} - \tilde{u} \tilde{c} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \frac{1}{2} \tilde{u}^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \\ \tilde{H} + \tilde{u} \tilde{c} \end{pmatrix}.$$

Le calcul des variables caractéristiques $\varphi(\lambda ; W_g, W_d)$ définies par :

$$(61) \quad W_d - W_g = \sum_{\lambda \in \sigma(A(\tilde{W}))} \varphi(\lambda ; W_g, W_d) r(\lambda, \tilde{W})$$

est facilité si, dans la troisième relation de (61) (pour l'équation de l'énergie) on utilise la seconde relation de (59) :

$$(62) \quad \frac{\gamma-3}{2} \tilde{u}^2 (\rho_d - \rho_g) + (3-\gamma) \tilde{u} (\rho_d u_d - \rho_g u_g) \\ + (\gamma-1) (\rho_d E_d - \rho_g E_g) = (\rho_d u_d^2 + p_d) - (\rho_g u_g^2 + p_g).$$

Il vient alors après quelque ligne de calcul :

$$(63) \quad \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \rho_d - \rho_g \\ \tilde{c} (\varphi_3 - \varphi_1) = \sqrt{\rho_g \rho_d} (u_d - u_g) \\ \tilde{c}^2 (\varphi_3 - \varphi_1) = p_d - p_g \end{cases}$$

et quitte à poser :

$$(64) \quad \tilde{\rho} = \sqrt{\rho_g \rho_d}$$

on déduit de (63) les relations suivantes :

$$(65) \quad \begin{cases} \varphi(\tilde{u}-\tilde{c} ; W_g, W_d) = \frac{1}{2\tilde{u}^2} [(p_d - \tilde{\rho} \tilde{c} u_d) - (p_g - \tilde{\rho} \tilde{c} u_g)] \\ \varphi(\tilde{u} ; W_g, W_d) = \frac{1}{2\tilde{c}^2} [(p_d - \tilde{c}^2 \rho_d) - (p_g - \tilde{c}^2 \rho_g)] \\ \varphi(\tilde{u}+\tilde{c} ; W_g, W_d) = \frac{1}{2\tilde{c}^2} [(p_d + \tilde{\rho} \tilde{c} u_d) + (p_g - \tilde{\rho} \tilde{c} u_g)] \end{cases}$$

qui sont très analogues aux relations (28).

- Lorsque la matrice de Roe a des valeurs propres telles que :

$$(66) \quad \tilde{u}-\tilde{c} < 0 < \tilde{u} < \tilde{u}+\tilde{c}$$

le point $j=J$ constitue une sortie subsonique pour le domaine $]0, L[$ et l'état W_J^{n+1} calculé grâce à la relation (45) prend la forme approchée :

$$(67) \quad W_J^{n+1} = W^* + \varphi(\tilde{u}-\tilde{c}, W^*, W_J^n) r(\tilde{u}-\tilde{c}, \tilde{W})$$

où la moyenne de Roe \tilde{W} est à prendre entre les états W^* et W_J^n , W^* étant calculé à la première ligne de la relation (45).

Dans des conditions analogues à (66) mais pour le point $j=0$ qui est une entrée subsonique du domaine $]0, L[$, on calcule d'abord un état W^* à l'aide de la première relation de (46), puis on évalue la moyenne de Roe entre $W_g = W_0^n$ et $W_d = W^*$ et on corrige W^* de la façon suivante pour calculer W_0^{n+1} :

$$(68) \quad \begin{cases} W_0^{n+1} = W^* - \varphi(\tilde{u} ; W_0^n, W^*) r(\tilde{u}, \tilde{W}) \\ \quad \quad \quad - \varphi(\tilde{u}+\tilde{c} ; W_0^n, W^*) r(\tilde{u}+\tilde{c}, \tilde{W}). \end{cases}$$

VI - RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUES

- BS J.S. Bramley, D.M. Sloan - A comparison of boundary methods for the numerical solution of hyperbolic systems of equation.
J. of Eng. Math, vol 11, n°3, pp 227-239, 1977.
- CDV D. Chargy, F. Dubois, J.P. Vila - Méthodes numériques pour le calcul d'écoulements compressibles. Applications industrielles.
Cours IPSI, septembre 1992.
- CF R. Courant, K.O. Friedrichs - Supersonic flow and shock waves.
Interscience, New York 1948.
- CFL R. Courant, K.O. Friedrichs, H. Lewy - On the partial difference equations of mathematical physics.
IMB. J. Res. Deveop., vol 11, pp 215-234, 1967, traduction anglaise de l'article original en allemand de 1927.
- D88 F. Dubois - Conditions aux limites fortement non linéaires pour les équations d'Euler.
Cours CEA-EDF-INRIA "méthodes de différences finies et équations hyperboliques", novembre 1988.
- DLF F. Dubois, P. Le Floch - Boundary condition for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws.
J. Diff. Equations, vol 71, n°1, pp 93-122, 1988.
- GKS B. Gustafsson, H.O. Keiss, A. Sundström - Stability theory of difference approximation for mixed initial boundary value problems II.
Math of Comp., vol 26, pp 649-686, 1972.
- GT M. Goldberg, E. Tadmor - Convenient stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial boundary value problems II.
Math of Comp., vol 48, n° 178, pp 503-520, 1987.
- GZIKP S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, G. Prokopov - Résolution des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz.
Edition Mir, Moscou, 1979.
- HLVL A. Harten, P. D. Lax, B. Van Leer - On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws.
SIAM Review, vol 25, n° 1, pp 35-61, 1983.

- K70 H.O. Kreiss. n° 178, pp 503-520, 1987 - Initial boundary value problems for hyperbolic problems.
Comm. Pure Appl. Math, vol 23, pp 277-298, 1970.
- LL L. Landau, E. Lifchitz - Mécanique des fluides.
Mir, Moscou, 1971.
- MS97 R. Msallam - Thèse de doctorat, 1997.
- M91 G. Mehlman - Étude de quelques problèmes liés aux écoulements en déséquilibre chimique et thermique.
Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1991.
- VV H. Viviand, J.P. Veuillot - Méthodes pseudo-instationnaires pour le calcul d'écoulements transsoniques.
Publication ONERA n° 1978-4, 1978.

Merci à Pierrette Foulon pour la frappe dactylographiée de ce document.