

BRÈVE INFORMATION

CONCAVITÉ DE L'ENTROPIE THERMOSTATIQUE ET CONVEXITÉ DE L'ENTROPIE MATHÉMATIQUE AU SENS DE LAX, par F. DUBOIS (*).

CONCAVITY OF THE THERMOSTATIC ENTROPY AND CONVEXITY OF THE LAX'S MATHEMATICAL ENTROPY.

I. INTRODUCTION

La dynamique des gaz est fondée sur les lois de conservation de la physique et une hypothèse d'équilibre thermostatique local (voir par exemple Germain [5]) qui conduisent aux équations d'Euler dans le cas où la viscosité et la conduction de chaleur sont négligés. Ces équations entrent dans la catégorie générale des systèmes hyperboliques non linéaires pour lesquels Lax a proposé dans [4, 10] une notion générale d'entropie mathématique. Dans le cas du gaz parfait polytropique, il est bien connu, [7, 8, 11] que cette notion peut s'interpréter grâce à la notion thermostatique usuelle d'entropie. Dans cette note, nous montrons que pour un gaz réel quelconque à l'équilibre chimique, la convexité proposée par Lax est équivalente à la concavité de l'entropie, considérée comme potentiel thermodynamique. Le plan est le suivant : dans les deux premières parties, nous rappelons les fondements de la thermostatique et de la dynamique des gaz (afin de fixer le cadre mathématique de notre étude) et nous étudions dans la troisième partie les relations entre l'entropie thermostatique et celle de Lax.

II. — ÉQUILIBRE THERMOSTATIQUE

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques propriétés essentielles des gaz réels à l'équilibre thermochimique. Ces dernières sont établies dans les ouvrages classiques de Landau-Lifchitz [9], Callen [1] ou Germain [5] par exemple.

Les propriétés thermodynamiques d'une masse de gaz M , enfermée dans un volume V et possédant une énergie interne E sont entièrement déterminées par ces trois paramètres (M, V, E) . En effet, l'entropie thermostatique S est une fonction du triplet (M, V, E) :

$$S = \Sigma(M, V, E). \quad (1)$$

Nous supposons Σ dérivable; ses dérivées premières (et secondes lorsqu'elles sont définies) permettent de calculer toutes les propriétés thermodynamiques du gaz.

Nous rappelons les deux propriétés fondamentales de l'entropie Σ :

HYPOTHÈSE 1 : La fonction Σ est homogène de degré 1 (l'entropie est une variable extensive) :

$$\Sigma(\lambda M, \lambda V, \lambda E) = \lambda \Sigma(M, V, E), \quad \forall \lambda > 0. \quad (2)$$

HYPOTHÈSE 2 : La fonction Σ est sur-additive :

$$\Sigma(M + M', V + V', E + E') \geq \Sigma(M, V, E) + \Sigma(M', V', E'). \quad (3)$$

Cette dernière propriété exprime le second principe de la thermodynamique : lorsqu'on mélange deux masses de gaz, l'entropie du système ainsi obtenu est toujours supérieure ou égale à la somme des entropies des constituants. Nous en déduisons facilement le résultat suivant :

Proposition 1 : La fonction

$$]0, +\infty[\ni (M, V, E) \rightarrow \Sigma(M, V, E)$$

est concave.

Nous remarquons que la température T est l'inverse de la dérivée de l'entropie par rapport à l'énergie interne :

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E}(M, V, E). \quad (4)$$

III. — DYNAMIQUE DES GAZ

Les équations d'Euler de la dynamique des gaz expriment la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie. Elles prennent la forme d'un système

(*) Aérospatiale, Division Systèmes Stratégiques et Spatiaux, Département de Mathématiques Appliquées, BP2, F-78133, Les Mureaux Cedex.

hyperbolique non linéaire de lois de conservation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} f(U) = 0. \quad (5)$$

Dans la suite, afin d'alléger les notations, nous nous restreignons au cas d'une seule variable d'espace x , mais l'extension multidimensionnelle est immédiate. Les variables conservatives U et le flux $f(U)$ ont les expressions suivantes (par exemple Germain [5]) :

$$U = {}^t \left(\rho, q \equiv \rho u, \varepsilon \equiv \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad (6)$$

$$f(U) = {}^t (\rho u, \rho u^2 + p, \varepsilon u + pu). \quad (7)$$

La pression p introduite dans l'expression du flux (7) est dans le cas d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes de rapport γ (gaz polytropique), définie grâce à la relation $p = (\gamma - 1) \rho e$. Pour un gaz réel, nous avons le résultat général suivant :

Proposition 2 : *La pression p et l'entropie spécifique $s \equiv \Sigma/M$ sont définis comme fonctions des seules variables conservatives U .*

Preuve : La seconde identité de (6) permet de définir l'énergie interne spécifique e comme fonction de U :

$$e = \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{q^2}{2\rho}. \quad (8)$$

Par ailleurs, compte tenu de l'homogénéité de Σ , l'entropie spécifique s n'est fonction que de la densité et de l'énergie interne spécifique :

$$s = \sigma(\rho, e) \equiv \Sigma \left(1, \frac{1}{\rho}, e \right) = \frac{1}{M} \Sigma \left(M, \frac{M}{\rho}, Me \right). \quad (9)$$

Nous définissons ensuite la pression à l'aide des propriétés habituelles de thermostatique :

$$p = T \frac{\partial \Sigma}{\partial V} \left(1, \frac{1}{\rho}, e \right). \quad (10)$$

On peut évaluer cette dernière expression à l'aide de la seule fonction σ et des variables conservatives grâce à la relation suivante :

$$p = -\rho^2 \frac{\partial \sigma / \partial \rho(\rho, e)}{\partial \sigma / \partial e(\rho, e)}. \quad (11)$$

IV. — ENTROPIE MATHÉMATIQUE

Dans [4, 10], P. Lax a proposé une notion d'entropie mathématique pour un système hyperbolique de

lois de conservation (5) quelconque. Il s'agit d'une fonction $\eta(U)$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \text{il existe un flux d'entropie } \xi(U) \text{ de sorte que} \\ d\xi(U) = d\eta(U) \cdot df(U), \text{ pour tout } U. \end{array} \right\} \quad (12)$$

$$U \rightarrow \eta(U) \text{ est convexe.} \quad (13)$$

Pour un système hyperbolique quelconque de lois de conservation (1), rien n'assure a priori l'existence ni l'unicité d'une entropie mathématique η satisfaisant aux relations (12) et (13).

Dans le cas de la dynamique des gaz, une fonction $\eta(U)$ satisfaisant les conditions (12), (13) et non-affine est de la forme

$$\eta(U) = -\rho s(U) \quad (14)$$

ainsi qu'il est suggéré par **Friedrichs-Lax** dans [4], où $s(U)$ a été définie en (8) et (9). Nous l'appelons dans la suite « entropie de Lax ».

La propriété (12) résulte de la loi de conservation supplémentaire

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s(U)) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho us(U)) = 0 \quad (15)$$

satisfaite pour les solutions régulières de (5), comme **Godunov** l'avait remarqué dans [6].

La convexité de l'entropie de **Lax** (14) a été largement étudiée (par exemple **Harten** [7], **Hughes-Franca-Mallet** [8] ou **Tadmor** [11]) dans le cas du gaz parfait polytropique, pour lequel la fonction Σ a la forme particulière suivante :

$$\begin{aligned} \Sigma(M, V, E) \\ = MC_v \left(\log \frac{EM_0}{E_0 M} + (\gamma - 1) \log \frac{VM_0}{V_0 M} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Dans le cas d'un gaz réel quelconque, **Wagner** a montré [12] que cette propriété équivaut à celle de la convexité de l'opposé de l'entropie spécifique ($-s$) par rapport aux variables $(1/\rho, u, e + u^2/2)$ de la dynamique des gaz lagrangienne. Mais, à notre connaissance, la convexité de l'entropie de **Lax** ne semble pas avoir été établie en toute généralité à partir d'hypothèses physiques ad hoc. Lorsqu'on suppose l'équilibre thermochimique atteint, nous avons la propriété suivante :

Proposition 3 : *La convexité de la fonction $\eta(U)$ définie en (14) équivaut à la concavité de la fonction $\Sigma(M, V, E)$ et à la positivité de la température.*

Preuve de la proposition 3 : Nous supposons d'abord Σ concave et T positive, c'est-à-dire $\Sigma(M, V, \cdot)$ croissante. Nous calculons l'entropie de

Lax (14), en tenant compte de (9) puis (2). Il vient :

$$\eta(U) = -\rho s(U) = -\rho \Sigma\left(1, \frac{1}{\rho}, e\right)$$

$$\eta(U) = -\Sigma(\rho, 1, \rho e). \quad (17)$$

Nous fixons deux états U_1, U_2 et nous étudions $\eta((1-t)U_1 + tU_2)$, $0 \leq t \leq 1$. Avec les notations introduites en (6), l'énergie interne $\rho e(t)$ associée à l'état $(1-t)U_1 + tU_2$ vaut, compte tenu de (8) :

$$\rho e(t) = (1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \frac{((1-t)q_1 + tq_2)^2}{(1-t)\rho_1 + t\rho_2} \quad (18)$$

et si l'on remarque que l'application $]0, +\infty[\times \mathbb{R} \ni (\rho, q) \rightarrow q^2/\rho \in \mathbb{R}$ est convexe, nous en déduisons

$$\rho e(t) \geq (1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \left((1-t) \frac{q_1^2}{\rho_1} + t \frac{q_2^2}{\rho_2} \right). \quad (19)$$

La fonction Σ étant croissante par rapport au troisième argument, nous déduisons de (19) l'inégalité

$$\eta\left((1-t)U_1 + tU_2\right) \leq -\Sigma\left((1-t)\rho_1 + t\rho_2, 1, (1-t)\left(\varepsilon_1 - \frac{q_1^2}{2\rho_1}\right) + t\left(\varepsilon_2 - \frac{q_2^2}{2\rho_2}\right)\right) \quad (20)$$

qui, compte tenu de la concavité de Σ et de (17) établit la convexité de l'entropie de Lax.

Nous supposons maintenant η convexe. Nous montrons d'abord la concavité de Σ .

Nous choisissons deux états U_1 et U_2 d'impulsion nulle :

$$q_1 = q_2 = 0. \quad (21)$$

Les inégalités (19) et (20) sont alors des égalités, et nous déduisons de la convexité de η l'estimation suivante :

$$\Sigma((1-t)\rho_1 + t\rho_2, 1, (1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2) \geq (1-t)\Sigma(\rho_1, 1, \varepsilon_1) + t\Sigma(\rho_2, 1, \varepsilon_2) \quad (22)$$

qui, compte tenu de l'homogénéité de Σ établit l'inégalité demandée, grâce à un calcul élémentaire que nous détaillons ci-dessous :

$$\Sigma((1-t)M_1 + tM_2, (1-t)V_1 + tV_2, (1-t)E_1 + tE_2) = ((1-t)V_1 + tV_2) \Sigma\left(\frac{(1-t)V_1}{(1-t)V_1 + tV_2}, \frac{M_1}{V_1}, 1, \frac{tV_2}{(1-t)V_1 + tV_2}, \frac{M_2}{V_2}, 1, \frac{(1-t)V_1}{(1-t)V_1 + tV_2}, \frac{E_1}{V_1} + \frac{tV_2}{(1-t)V_1 + tV_2}, \frac{E_2}{V_2}\right)$$

$$\geq ((1-t)V_1 + tV_2) \left[\frac{(1-t)V_1}{(1-t)V_1 + tV_2} \Sigma\left(\frac{M_1}{V_1}, 1, \frac{E_1}{V_1}\right) + \frac{tV_2}{(1-t)V_1 + tV_2} \Sigma\left(\frac{M_2}{V_2}, 1, \frac{E_2}{V_2}\right) \right] = (1-t)\Sigma(M_1, V_1, E_1) + t\Sigma(M_2, V_2, E_2).$$

Nous montrons maintenant que la température est positive, c'est-à-dire que $\Sigma(M, V, \cdot)$ est une fonction croissante. Pour cela, nous introduisons $\Delta E > 0$ et nous fixons deux états U_1 et U_2 de la façon suivante :

$$\rho_1 = \rho, \quad q_1 = \sqrt{8\rho\Delta E}, \quad \varepsilon_1 = E + 4\Delta E$$

$$\rho_2 = \rho, \quad q_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = E. \quad (23)$$

L'état $(1-t)U_1 + tU_2$ a une énergie interne volumique calculée grâce à la relation (18), c'est-à-dire :

$$\rho e(t) = E + 4t(1-t)\Delta E. \quad (24)$$

Par ailleurs, compte tenu de (17) et (23), nous avons :

$$(1-t)\eta(U_1) + t\eta(U_2) = -\Sigma(\rho, 1, E), \quad \forall t \in [0, 1] \quad (25)$$

La convexité de η , écrite en prenant $t = 1/2$ entraîne donc l'inégalité :

$$\Sigma(\rho, 1, E + \Delta E) \geq \Sigma(\rho, 1, E) \quad (26)$$

qui, compte de l'homogénéité (2) établit la propriété demandée.

Remarque : Nous avons démontré dans [2] le résultat moins général suivant : si la température est positive et si l'énergie interne spécifique e est une fonction régulière (de classe C^2 , ce qui exclut toute transition de phase) du couple (entropie spécifique s , volume spécifique $\tau \equiv 1/\rho$), la convexité de la fonction $(s, \tau) \rightarrow e(s, \tau)$ est équivalente à celle de l'entropie de Lax. La propriété de positivité de la température pour les gaz à l'équilibre chimique est classique. Pour un établissement de cette propriété fondée sur des arguments purement physiques, nous renvoyons par exemple à Landau-Lifchitz [9]. Cette dernière propriété a été également utilisée par Friedrichs-Lax dans [4]. La convexité de l'entropie de Lax devait être déjà connue de Godunov, qui a introduit dans [6] les variables entropiques φ , c'est-à-dire le gradient de (14) par rapport aux variables conservatives (la bijectivité de l'application $U \rightarrow \varphi$ résulte immédiatement de la stricte convexité de η). Pour une extension de l'étude présente au mélange de deux gaz sans interaction mutuelle, nous renvoyons à [3].

Manuscrit remis le 12 février 1990.

RÉFÉRENCES

- [1] CALLEN H. B. — Thermodynamics, J. Wiley & Sons, New York, (1966).
- [2] DUBOIS F. — *Quelques problèmes liés au calcul d'écoulements de fluides parfaits dans les tuyères*, Thèse de l'Université Paris-6, (1988).
- [3] DUBOIS F. — *Concavité de l'entropie thermodynamique et convexité de l'entropie mathématique de deux gaz quelconques sans interaction mutuelle*, Note interne Aérospatiale Les Mureaux, (1989).
- [4] FRIEDRICHS K. O. et LAX P. D. — *Systems of conservation equations with a convex extension*, Proc. Acad. Sci. USA, vol. 68, (1971), p. 1686-1688.
- [5] GERMAIN P., Cours de mécanique des milieux continus, théorie générale, Masson, Paris, (1973).
- [6] GODUNOV S. K. — *An interesting class of quasilinear systems*. Dok. Akad. Nauk SSSR, vol. 139, p. 521-523, et Soviet Math., vol. 2, (1961), p. 947-949.
- [7] HARTEN H. — *On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy*, J. Comp. Phys., vol. 49, (1983), p. 151-169.
- [8] HUGHES T., FRANCA L. et MALLET M. — *A new finite element formulation for computational fluid dynamics: I. Symmetric form of the compressible Euler and Navier-Stokes Equations and the second law of thermodynamics*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 54, (1986), p. 223-234.
- [9] LANDAU L. et LIFCHITZ E. — Physique statistique, Éditions de Moscou, (1967).
- [10] LAX P. D. — *Shock Waves and Entropy*, in Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Zarantonello Ed., Academic Press, (1971), p. 603-634.
- [11] TADMOR E. — *Skew-selfadjoint form for systems of conservation Laws*. J. Math. Anal. Appl., vol. 103, (1984), p. 428-442.
- [12] WAGNER D. H. — *Equivalence of the Euler and Lagrange equations of gas dynamics for weak solutions*. J. Diff. Equ., vol. 68, (1987), p. 118-136.