Schéma saute-mouton.
On considère l'équation d'advection

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; 0\,, \qquad t > 0\,,\; x \in \mathbb{R}\,,$$

avec la condition initiale supposée harmonique dans les six premières questions de cet exercice :

(2) $$u(x,\,0) \;=\; u^0(x) \;=\; \widehat{u}^0 \exp(i\,k\,x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Le réel k est appelé le nombre d'onde et la longueur d'onde λ vaut alors $\lambda = \frac{2\,\pi}{k}$. On introduit le schéma "saute-mouton", paramétré par un pas de temps $\Delta t > 0$ et un pas d'espace $\Delta x > 0$:

(3) $$\frac{1}{2\,\Delta t}\big(u_j^{n+1} - u_j^{n-1}\big) \;+\; \frac{a}{2\,\Delta x}\,\big(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\big) \;=\; 0\,.$$

1) Quel est l'ordre du schéma (3) ?

• On sait que le problème (1)(2) admet une unique solution : $u(x,\,t) = \widehat{u}^0 \exp[i(\,k\,x \,-\, \omega\,t)]$, avec la relation de dispersion $\omega = a\,k$ qui définit la vitesse de phase $\frac{\omega}{k}$. On dispose aussi de la vitesse de groupe Ω qui décrit la vitesse de propagation d'un "paquet d'ondes", définie par $\Omega(k) \;\equiv\; \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \;=\; a$. Il est naturel de se demander ce que deviennent ces relations pour le schéma (3).

2) On suppose que pour $j \in \mathbb{Z}$, on a pour les deux premiers pas de temps $u_j^0 = U^0\, \exp(i\,k\,j\,\Delta x)$ et $u_j^1 = U^1\, \exp(i\,k\,j\,\Delta x)$. Montrer qu'alors le schéma (3) admet une solution de la forme

(4) $$u_j^n \;=\; U^n\, \exp(i\,k\,j\,\Delta x)\,, \quad j \in \mathbb{Z}$$

avec $U^n \;=\; \alpha\,(\lambda^+)^n \,+\, \beta\,(\lambda^-)^n$, $\lambda^\pm$ solutions d'une équation qu'on précisera, et α et β ne dépendant que de $\sigma \equiv a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\xi \;\equiv\; k\,\Delta x$, U^0 et U^1.

3) En déduire que si $\sigma \leq 1$, il existe $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}$ réel tel que

(5) $$u_j^n \;=\; \alpha\, \exp\,[i(k\,j\,\Delta x \,-\, \widetilde{\omega}\,n\,\Delta t)] \;+\; (-1)^n\,\beta\, \exp\,[i(k\,j\,\Delta x \,+\, \widetilde{\omega}\,n\,\Delta t)]\,.$$

4) Montrer que pour $k\,\Delta x$ assez petit, la relation (5) exprime que la solution approchée à l'aide du schéma saute-mouton est somme d'une onde approchant l'onde "exacte" solution de l'équation (1) et d'une "onde parasite".

5) On suppose que pour le premier pas de temps où la relation (3) n'est pas définie, on utilise un schéma décentré amont pour exprimer u_j^1 en fonction des u_k^0. Calculer α et β dans ce cas et montrer que l'onde parasite est de module petit devant celui de l'onde principale lorsque $\xi \;\equiv\; k\,\Delta x << 1$. On pourra supposer $a > 0$.

6) Calculer la vitesse de phase $\dfrac{\widetilde{\omega}}{k}$ et la vitesse de groupe $\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{\omega}}{\mathrm{d}k}$ du schéma (3).

7) On suppose $a = 1$ et on effectue l'expérience numérique suivante. On se place sur l'intervalle $[0,\, 3]$ avec $\Delta x = \frac{1}{160}$ et une condition initiale continue

$$u^0(x) \,=\, \sin(k\,x)\, \exp\big(-16\,(x-\tfrac{1}{2})^2\big)\,, \tag{6}$$

avec le nombre d'onde k choisi de sorte qu'on utilise 8 points par longueur d'onde : $\xi \,=\, k\,\Delta x \,=\, \frac{2\,\pi}{8}$. On utilise un nombre de Courant $\sigma = 0,4$. Au temps $t = 2$, le signal numérique u_j est très proche de la fonction suivante :

$$u(x,\, 2) \,\simeq\, \sin(k\,x)\, \exp\big(-16\,(x-1,98)^2\big)\,, \tag{7}$$

Quel commentaire pouvez-vous faire ?

Laurence Halpern, 1995, FD, juillet 2003.

Schéma saute-mouton.
Proposition de corrigé.

1) Le schéma est d'ordre deux en espace et en temps.

2) On cherche une solution du schéma (3) sous une forme proposée à la relation (4). Avec cette hypothèse, et en posant $\xi = k\,\Delta x$, la relation (3) s'écrit

$$U^{n+1} \;=\; U^{n-1} \,-\, \sigma \left(\mathrm{e}^{i\,\xi} \,-\, \mathrm{e}^{-i\,\xi} \right) U^n \;,$$

qui prend aussi la forme d'une relation de récurrence entre deux vecteurs :

$$(S1) \qquad \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{pmatrix} \;=\; A \begin{pmatrix} U^n \\ U^{n-1} \end{pmatrix} \;, \qquad \text{avec} \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} -2\,i\,\sigma\,\sin\xi & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$(S2) \qquad \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{pmatrix} \;=\; A^n \begin{pmatrix} U^1 \\ U^0 \end{pmatrix}$$

et si on développe le vecteur du membre de droite de la relation (S2) sur les vecteurs propres V^+ et V^- de la matrice A, de valeurs propres associées λ^+ et λ^-, il vient

$$(S3) \qquad \begin{pmatrix} U^{n+1} \\ U^n \end{pmatrix} \;=\; a\,(\lambda^+)^n\; V^+ \;+\; b\,(\lambda^-)^n\; V^- \,,$$

ce qui répond à la question posée.

3) Les valeurs propres λ^+ et λ^- sont solution de l'équation du second degré suivante :

$$\lambda^2 \,-\, 2\,i\,\sigma\,\sin\xi \,-\, 1 \;=\; 0$$

dont les solutions $\lambda^{\pm} \;=\; -i\,\sigma\,\sin\,\xi \,\pm\, \sqrt{1-\sigma^2\,\sin^2\xi}$ sont de module unité et peuvent s'écrire $\lambda^+ \;=\; \mathrm{e}^{-i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}$ et $\lambda^- \;=\; -\frac{1}{\lambda^+} \;=\; -\mathrm{e}^{i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}$, avec la relation de dispersion suivante :

$$(S5) \qquad \mathrm{e}^{-i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t} \;=\; \sqrt{1-\sigma^2\,\sin^2\xi} \,-\, i\,\sigma\,\sin\,\xi\,.$$

4) La relation (5) exprime que l'onde numérique u_j^n est somme d'une onde se déplaçant à la vitesse $\widetilde{\omega}$ (celle avec le coefficient α) et d'une qui change de signe à chaque pas de temps et se déplaçant à la vitesse $-\widetilde{\omega}$. Il suffit de faire le développement limité de la relation (S5) pour ξ assez petit. Or $\sin(\widetilde{\omega}\,\Delta t) = \sigma\,\sin\,\xi$, donc

$$\widetilde{\omega} \;= \sigma\,\frac{\xi}{\Delta t} \,+\, \mathrm{O}(\xi^2) \;=\; a\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\,\frac{k\,\Delta x}{\Delta t} \,+\, \mathrm{O}(\xi^2) \;=\; k\,a \,+\, \mathrm{O}(\xi^2)$$

ce qui établit le résultat proposé.

5) On a en plus des relations précédentes la condition de démarrage $u_j^1 = u_j^0 - \sigma \left(1 - \mathrm{e}^{-i\,\xi}\right) u_j^0$ soit avec la représentation harmonique $u_j^0 = \widehat{u}^0 \exp(i\,k\,j\,\Delta x)$ de la condition initiale :

$$(S5) \qquad U^1 \;=\; \left[\, 1 \,-\, \sigma \left(1 - \mathrm{e}^{-i\,\xi}\right)\,\right] \widehat{u}^0 \,.$$

On déduit de (5) avec $n = 1$ et de (S5) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{e}^{-i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}\,\alpha \,-\, \mathrm{e}^{i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}\,\beta & = & \left[\,1 \,-\, \sigma\left(1 - \mathrm{e}^{-i\,\xi}\,\right)\right] \widehat{u}^0 \\ \alpha \quad + \quad \beta & = & \widehat{u}^0 \,. \end{array} \right.$$

On en déduit sans difficulté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \;=\; \dfrac{\widehat{u}^0}{2\,\cos\left(\widetilde{\omega}\,\Delta t\right)} \left[\,1 \,-\, \sigma\left(1 - \mathrm{e}^{-i\,\xi}\,\right) \,+\, \mathrm{e}^{i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}\,\right] \\ \beta \;=\; \dfrac{\widehat{u}^0}{2\,\cos\left(\widetilde{\omega}\,\Delta t\right)} \left[\,-\,1 \,+\, \sigma\left(1 - \mathrm{e}^{-i\,\xi}\,\right) \,+\, \mathrm{e}^{-i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}\,\right] \end{array} \right.$$

et pour ξ infiniment petit, on a

$$\alpha \,\simeq\, \widehat{u}^0\,, \qquad \beta \,\simeq\, \frac{\sigma\,(1-\sigma)}{2}\,\xi^2\,\widehat{u}^0$$

ce qui indique que l'onde qui "remonte" l'écoulement est effectivement amortie, au moins pour les basses fréquences.

6) La vitesse de phase vaut $\widetilde{\omega}/k$ soit environ a pour $\xi << 1$. La vitesse de groupe $v_g = \frac{\mathrm{d}\widetilde{\omega}}{\mathrm{d}k}$ s'obtient en dérivant la relation (S5) par rapport à k. on a :

$$\mathrm{e}^{-i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t}\left(-\,i\,\Delta t\,\frac{\mathrm{d}\widetilde{\omega}}{\mathrm{d}\xi}\right) \;=\; -\frac{\sigma^2\,\sin\xi\,\cos\xi}{\sqrt{1-\sigma^2\,\sin^2\,\xi}} \,-\, i\,\sigma\,\cos\xi$$

$$=\; -\frac{i\,\sigma\,\cos\xi}{\sqrt{1-\sigma^2\,\sin^2\,\xi}}\,\mathrm{e}^{-i\,\widetilde{\omega}\,\Delta t} \quad \text{donc} \quad v_g \;=\; \frac{\mathrm{d}\widetilde{\omega}}{\mathrm{d}\xi}\,\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}k} \;=\; \Delta x\,\frac{1}{\Delta t}\,\sigma\,\frac{\cos\xi}{\sqrt{1-\sigma^2\,\sin^2\,\xi}}$$

et

$$(S6) \qquad v_g \;=\; a\,\frac{\cos\xi}{\sqrt{1-\sigma^2\,\sin^2\,\xi}}\,.$$

7) On évalue la vitesse de groupe du schéma dans ce cas où $\xi = \frac{2\,\pi}{8}$, donc $\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin^2\xi = \frac{1}{2}$. Par ailleurs $\sigma = 0,4$ ainsi que précisé dans l'énoncé. On en déduit :

$$v_g \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\,(0,4)^2}} \;\simeq\; 0,737.$$

En se reportant à l'expérience numérique, la vitesse du paquet d'ondes vaut $\frac{1{,}98-0{,}5}{2} = \frac{1{,}48}{2} = 0,74$. Ces deux résultats coïncident aux erreurs de mesure près et le paquet d'ondes décrit à la relation (6) avance à la vitesse de groupe du schéma, et non pas à celle de l'équation ! Le paquet d'ondes prend du retard à cause d'une discrétisation un peu trop grossière.

Laurence Halpern, 1995. FD, juillet 2003.