Problème de Riemann pour le p-système.

• Dans tout l'exercice, on désigne par $P(\bullet)$ une fonction donnée

(1) $\quad]0,\, +\infty[\, \ni \theta \longmapsto P(\theta) \in\,]0,\, +\infty[$

de classe $\mathcal{C}^2$, strictement décroissante et convexe :

(2) $\quad P'(\theta) < 0\,, \quad P''(\theta) > 0\,.$

Le p-système de la dynamique des gaz est défini par les équations

(3) $$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(4) $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(P(v)) = 0$$

avec des variables $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ et deux fonctions inconnues $v(x,\, t)$ et $u(x,\, t)$ telles que la fonction $v(x,\, t)$ vérifie $v(x,\, t) > 0$. On note $\pi(v)$ une primitive de la fonction $P(\bullet)$ $\left(\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}v} = P\right)$ et $W \equiv (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ un état arbitraire.

1) Montrer que le système (3)(4) est obtenu à partir des équations d'Euler de la dynamique des gaz sous l'hypothèse d'isentropie et à une dimension d'espace. On rappellera les hypothèses de la modélisation, le choix des fonctions inconnues pour les deux modèles et la transformation de l'espace-temps qui permet de passer d'un modèle à l'autre.

2) Montrer que le système (3)(4) est strictement hyperbolique, avec des valeurs propres et des vecteurs propres que l'on précisera.

• Pour un état $W_g = (v_g,\, u_g)^{\mathrm{t}}$ donné, on cherche $W = (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ relié à W_g par une onde de choc.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $W(x,\, t)$ définie par

(5) $$W(x,\, t) = \begin{cases} W_g & \text{si } x < \sigma\, t \\ W_d & \text{si } x > \sigma\, t \end{cases}$$

soit une solution faible du système (3)(4).

• On introduit le couple $(\eta,\, \xi)$ suivant :

(6) $$\eta(W) = \frac{1}{2}\, u^2 - \pi(v)\,, \qquad \xi(W) = u\, P(v)\,.$$

4) Montrer que le couple (η, ξ) définit une entropie mathématique η et son flux associé ξ pour le p-système.

5) On suppose que la fonction W définie en (5) est solution faible du système (3)(4). On pose

(7) $\qquad [\psi] \equiv \psi_d - \psi_g \qquad$ pour tout champ ψ,

et

(8) $\qquad \sigma\,[\eta] - [\xi] \,=\, [u]\,\varphi(W_g, W_d)\,.$

Montrer que

(9) $\qquad \varphi(W_g, W_d) \,=\, \left(\dfrac{[\pi]}{[v]} - \dfrac{1}{2} \big(P(v_g) + P(v_d) \big) \right)$

et que φ est une fonction toujours négative ou nulle ; en déduire que le choc décrit en (5) est entropique si et seulement si

(10) $\qquad u_d \,\leq\, u_g\,.$

6) Montrer que les états $W \,=\, (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ qui peuvent être reliés à l'état donné W_g par une onde de choc entropique sont définis par

(11) $\qquad u \,=\, U(v) \,\equiv u_g - \sqrt{\big(P(v) - P(v_g)\big)\,(v_g - v)}\,.$

Etudier la fonction $U(\bullet)$ et tracer la courbe $u \,=\, U(v)$ dans le plan $(v,\, u)$.

7) Déterminer un 1-invariant de Riemann $z_1(W)$ pour le système (3)(4) tel que $\frac{\partial z_1}{\partial u} \,=\, 1$. Reprendre la question pour un 2-invariant de Riemann.

8) Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un état W_d puisse être relié à un état donné W_g par une 1-onde de détente. Reprendre la question avec une 2-onde de détente.

9) Utiliser les informations précédentes pour proposer un algorithme de résolution du problème de Riemann $R(W_l,\, W_r)$ défini par le système (3)(4) et la condition initiale $\mathbb{R} \ni x \longmapsto W^0(x)$ suivante :

(12) $\qquad W^0(x) \,=\, \begin{cases} W_l & \text{si } x < 0 \\ W_r & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$

FD, février 2002, juillet 2002.