Méthode de relaxation.

• On désigne par n un entier supérieur ou égal à 1, a un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$, B et C deux matrices carrées réelles d'ordre n. On note $(\bullet, \bullet)$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ et $\|\bullet\|$ la norme euclidienne associée. On pose

$$(1) \qquad J(v) \;=\; (a\,,\,v) + \frac{1}{2}\,\|\,B\,v\,\|^2 + \frac{1}{3}\,\|\,C\,v\,\|^3 \;.$$

Pour $v \equiv (v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$ on note $\frac{\partial J}{\partial v_j}(v)$ la dérivée partielle de la fonctionnelle $J(\bullet)$ par rapport à la j^{o} variable scalaire.

1) Montrer que la fonctionnelle $J(\bullet)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^n$. Calculer les nombres $(J'(v), h)$ et $(J''(v)\,h\,,\,h)$ pour v, et h vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que la fonctionnelle $J(\bullet)$ est convexe.

• On suppose à partir de maintenant que la matrice B est inversible.

2) Montrer que $J(\bullet)$ est $\alpha-$elliptique (on précisera la valeur du réel α) et qu'il existe un unique vecteur u de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$(2) \qquad J(u) \;\leq\; J(v)\,, \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n\,.$$

• Pour calculer effectivement la solution $u \in \mathbb{R}^n$ du problème (2) pour la fonctionnelle $J(\bullet)$ introduite à la relation (1), on utilise une méthode de relaxation. Cette approche consiste à introduire une succession de problèmes de minimisation à une seule variable réelle. Pour u^k vecteur donné dans $\mathbb{R}^n$, on définit d'abord la suite $\big(v_j^{k+1/2}\big)_{0\leq j\leq n}$ de la manière suivante :

$$(3) \qquad v_0^{k+1/2} \;=\; u^k\;, \qquad v_j^{k+1/2} \;=\; v_{j-1}^{k+1/2} + x_j\,e_j\;, \qquad 1 \leq j \leq n\,,$$

$$(4) \qquad J(v_j^{k+1/2}) \;\leq\; J(v_{j-1}^{k+1/2} + y\,e_j)\;, \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}\,,$$

où $e_j \;=\; (0, \cdots, 0,\, 1,\, 0,\, \cdots, 0)$ (avec l'élément non nul en j^{o} position) est le j^{o} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3) Montrer que $v_j^{k+1/2}$ est défini de manière unique et expliciter l'équation scalaire à résoudre à chaque itération en fonction de e_j, $v_{j-1}^{k+1/2}$, a, B et C.

• L'algorithme de relaxation est alors défini par :

$$(5) \qquad u^0 \in \mathbb{R}^n \text{ donné}\,, \qquad u^{k+1} \;=\; v_n^{k+1/2}\,,$$

avec la suite auxiliaire $\big(v_j^{k+1/2}\big)_{0\leq j\leq n}$ définie aux relations (3) et (4). On se propose de démontrer que la suite $\big(u^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution u du problème (2).

4) Montrer que $|| \, u^{k+1} - u^k \, ||$ tend vers 0 si k tend vers l'infini et qu'il en est de même pour $|| \, \underset{j}{v}^{k+1/2} - u^{k+1} \, ||$ pour tout j compris entre 1 et n.

5) Etablir l'estimation

$$\alpha \, || \, u^{k+1} - u \, || \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial J}{\partial v_j}(u^{k+1}) \; - \; \frac{\partial J}{\partial v_j}(\underset{j}{v}^{k+1/2}) \right| . \tag{6}$$

6) En déduire que la méthode de relaxation converge vers la solution u du problème (2).

FD, avril 2001, juillet 2002.

Méthode de relaxation.
Proposition de corrigé.

1) Le seul problème de dérivabilité de la fonctionnelle $J(\bullet)$ se pose pour le terme $\frac{1}{3} \| C\, v \|^3$ en $v = 0$. Mais, jointe au fait que $J(\bullet)$ est dérivable partout sauf peut être à l'origine, l'estimation

$$\| C\, v \|^3 \leq \| C \|^3 \| v \|^3$$

montre que la fonction $\mathbb{R}^n \ni v \longmapsto \| C\, v \|^3 \in \mathbb{R}$ est deux fois dérivable en 0 et que les deux premières dérivées sont nulles.

• Le calcul des dérivées $(J'(v)\,,\, h)$ et $(J''(v)\, h\,,\, h)$ est simple si on utilise la formule de Taylor :

$$\text{(S1)} \qquad J(v+h) \;=\; J(v) \,+\, (J'(v)\,,\, h) \,+\, \frac{1}{2}\,(J''(v)\, h\,,\, h) \,+\, o(\| h \|^2)\,.$$

Or on a ici $\quad J(v+h) \;=\; (a,\, v+h) + \dfrac{1}{2} \,\| B\,(v+h) \|^2 \,+ \dfrac{1}{3} \,\| C\,(v+h) \|^3 \quad$ avec

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \,\| C\,(v+h) \|^3 \;&=\; \frac{1}{3} \,\| C\, v \|^3 \;\left(1 \,+\, 2\, \frac{(C\, v,\, C\, h)}{\| C\, v \|^2} \,+\, \frac{\| C\, h \|^2}{\| C\, v \|^2} \right)^{3/2} \\
&=\; \frac{1}{3} \,\| C\, v \|^3 \;\left(1 + 3\, \frac{(C\, v,\, C\, h)}{\| C\, v \|^2} + \frac{3}{2}\, \frac{\| C\, h \|^2}{\| C\, v \|^2} + \frac{3}{8}\, 4\, \frac{(C\, v,\, C\, h)^2}{\| C\, v \|^4} + \mathrm{O}(\| h \|^3) \right) \\
&=\; \frac{1}{3} \,\| C\, v \|^3 \,+\, \| C\, v \| \;(C\, v,\, C\, h) \,+\, \frac{1}{2}\; \| C\, v \| \,\| C\, h \|^2 \,+ \\
&\qquad\qquad +\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{\| C\, v \|}\, (C\, v,\, C\, h)^2 \,+\, \mathrm{O}(\| h \|^3)\;,
\end{aligned}$$

donc

$$\text{(S2)} \quad \begin{cases} \; J(v+h) \,-\, J(v) \;=\; (a,\, h) \,+\, (B\, v,\, B\, h) +\, \| C\, v \| \;(C\, v,\, C\, h) + \\ + \dfrac{1}{2} \left(\| B\, h \|^2 \,+\, \| C\, v \| \,\| C\, h \|^2 \,+ \dfrac{1}{\| C\, v \|}\, (C\, v,\, C\, h)^2 \right) \,+\, \mathrm{O}(\| h \|^3) \end{cases}$$

et le rapprochement de (S1) et (S2) fournit les expressions

$$\text{(S3)} \qquad (J'(v)\,,\, h) \;=\; (a,\, h) \,+\, (B\, v,\, B\, h) +\, \| C\, v \| \;(C\, v,\, C\, h)$$

$$\text{(S4)} \qquad (J''(v)\, h\,,\, h) \;= \| B\, h \|^2 \,+\, \| C\, v \| \,\| C\, h \|^2 \,+ \frac{1}{\| C\, v \|}\, (C\, v,\, C\, h)^2\,.$$

• De la relation (S4), on tire $(J''(v)\, h\,,\, h) \;\geq\; 0$ pour tout h, donc $J(\bullet)$ est convexe.

2) Si B est une matrice inversible, notons $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ la norme de la matrice B^{-1} :

$$\text{(S5)} \qquad \| B^{-1}\, \xi \| \leq \; \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \;\| \xi \|\,, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

On a alors $\| B\, h \|^2 \geq \alpha \; \| h \|^2$ pour tout h de $\mathbb{R}^n$ et on tire de la relation (S4) $(J''(v)\, h\,,\, h) \;\geq\; \alpha \;\; \| \; h \; \|^2$, ce qui établit la propriété demandée. Le problème (2) a alors une solution unique, ainsi qu'il a été vu en cours.

3) Soit $D_{j-1/2}^{k+1/2}$ la droite affine passant par $v_{j-1}^{k+1/2}$ et de vecteur directeur e_j. Le problème (4) peut s'écrire

(S6) $\qquad v_j^{k+1/2} \;\in\; D_{j-1/2}^{k+1/2}$

(S7) $\qquad J(v_j^{k+1/2}) \;\leq\; J(v) \;, \qquad \forall\, v \in D_{j-1/2}^{k+1/2} \,.$

Comme la fonctionnelle $J(\bullet)$ est $\alpha-$elliptique et que la droite $D_{j-1/2}^{k+1/2}$ est un ensemble convexe fermé non vide, le problème (S6)(S7) a une solution unique $v_j^{k+1/2}$. Celle-ci est donnée par l'inéquation d'Euler

(S8) $\qquad \big(J'(v_j^{k+1/2})\,,\, v \,-\, v_j^{k+1/2} \big) \;\geq\; 0 \;, \qquad \forall\, v \in D_{j-1/2}^{k+1/2}$

qui, compte tenu de (3) et du fait que la droite $D_{j-1/2}^{k+1/2}$ est un espace affine, s'écrit aussi

(S9) $\qquad \big(J'(v_j^{k+1/2})\,,\, e_j \big) \;=\; 0 \;.$

• La relation (S9) est l'équation demandée dans l'énoncé. On peut en expliciter l'algèbre, avec $w \equiv v_{j-1}^{k+1/2}$ et $x \equiv x_j$ pour alléger les notations. On a

$$\big(J'(w + x\, e_j)\,,\, e_j \big) \;=\; (a,\, e_j) \,+\, (B(w + x\, e_j),\, B\, e_j) \,+ \\ + \, \| \, C(w + x\, e_j) \, \| \;\, (C(w + x\, e_j),\, C\, e_j) \,,$$

et l'équation (S9) d'inconnue x s'écrit donc en fonction des sonnées :

(S10) $$\sqrt{\| \, C\, w \, \|^2 \, + 2\, x \, (C\, w,\, C\, e_j) \,+\, x^2 \;\, \| \, C\, e_j \, \|^2} \, \Big((C\, w,\, C\, e_j) \,+\, x \;\, \| \, C\, e_j \, \|^2 \Big) \\ + \, (a,\, e_j) \,+\, (B\, w,\, B\, e_j) \,+ x \;\, \| \, B\, e_j \, \|^2 \;\;=\; 0 \,.$$

On constate que ce n'est **pas** une équation polynomiale ; elle a cependant une solution réelle unique compte tenu de ce qui a été dit plus haut. Le lecteur construira lui même une preuve élémentaire de ce dernier fait.

4) On a

$$J(u^k) - J(u^{k+1}) \;=\; J\big(v_0^{k+1/2}\big) \,-\, J\big(v_n^{k+1/2}\big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \Big[\, J\big(v_{j-1}^{k+1/2}\big) \,-\, J\big(v_j^{k+1/2}\big) \Big] \,.$$

Or

$$J\big(v_{j-1}^{k+1/2}\big) \;\geq\; J\big(v_j^{k+1/2}\big) \,+\, \big(J'\big(v_j^{k+1/2}\big)\,,\, \big(v_{j-1}^{k+1/2} - v_j^{k+1/2}\big)\big) \,+ \\ + \, \frac{\alpha}{2} \;\, \| \, v_{j-1}^{k+1/2} - v_j^{k+1/2} \, \|^2$$

car $J(\bullet)$ est α-elliptique. On remarque que $\big(J'\big(v_{j}^{k+1/2}\big)\,,\,\big(v_{j-1}^{k+1/2}-v_{j}^{k+1/2}\big)\big) \equiv -\frac{\partial J}{\partial v_j}\big(v_{j}^{k+1/2}\big)\,x_j$ est nul car $v_{j}^{k+1/2}$ est solution de l'équation (S9). On en déduit donc

$$J(u^k) - J(u^{k+1}) \;\geq\; \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{n} \mid\mid v_{j-1}^{k+1/2} - v_{j}^{k+1/2} \mid\mid^2 \;=\; \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{n} \mid u_j^k - u_j^{k+1} \mid^2$$

c'est à dire

$$\text{(S11)} \qquad J(u^k) - J(u^{k+1}) \;\geq\; \frac{\alpha}{2} \mid\mid u^k - u^{k+1} \mid\mid^2 \;.$$

• La suite $J(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante par construction, minorée car $J(\bullet)$ est α-elliptique, donc converge. Par suite $J(u^k) - J(u^{k+1})$ tend vers zéro et la relation (S11) entraîne alors clairement que la différence $\mid\mid u^k - u^{k+1} \mid\mid$ tend vers 0 si k tend vers $+\infty$. On a ensuite $\mid\mid v_j^{k+1/2} - u^{k+1} \mid\mid^2 \leq \sum_{l=j+1}^{n} \mid u_l^k - u_l^{k+1} \mid^2 \leq \mid\mid u^k - u^{k+1} \mid\mid^2$ donc la propriété précédente montre que pour tout j entre 1 et n, $\mid\mid v_j^{k+1/2} - u^{k+1} \mid\mid$ tend vers 0 également.

5) La propriété d'α-ellipticité de $J(\bullet)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\alpha \;\mid\mid u^{k+1} - u \mid\mid^2 &\leq \big(\big(J'(u^{k+1}) - J'(u)\big)\,,\,(u^{k+1}-u)\big) \\
&\leq \big(J'(u^{k+1})\,,\,(u^{k+1}-u)\big) \quad \text{compte tenu de l'équation d'Euler associée à (2)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial J}{\partial v_j}(u^{k+1})\,(u_j^{k+1} - u_j) \quad \leq \quad \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial J}{\partial v_j}(u^{k+1}) \right| \mid u_j^{k+1} - u_j \mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial J}{\partial v_j}(u^{k+1}) - \frac{\partial J}{\partial v_j}(v_j^{k+1/2}) \right| \mid u_j^{k+1} - u_j \mid \quad \text{car } \frac{\partial J}{\partial v_j}(v_j^{k+1/2}) \text{ est nul.}
\end{aligned}$$

La relation (6) s'en déduit aisément.

6) La fonction $J(\bullet)$ est $\alpha-$elliptique, donc elle est minorée sur $\mathbb{R}^n$ et elle tend vers $+\infty$ si $\mid\mid v \mid\mid$ tend vers $+\infty$. Par suite, l'image réciproque de tout borné de $\mathbb{R}$ est un borné de $\mathbb{R}^n$. Comme les suites $J(v_j^{k+1/2})_{k\geq 0}$ sont décroissantes par construction, la (double) suite $(v_j^{k+1/2})_{0\leq j\leq n,\; k\geq 0}$ est bornée. La fonctionnelle $J(\bullet)$ est deux fois dérivable, les dérivées partielles $\frac{\partial J}{\partial v_j}(\bullet)$ sont uniformément continues sur tout compact, donc le membre de droite de l'inégalité (6) est arbitrairement petit si $\mid\mid u^{k+1} - v_j^{k+1/2} \mid\mid$ est assez petit. Or cette propriété est réalisée pour k assez grand compte tenu de la quatrième question. La méthode de relaxation est donc convergente.

Grégoire Allaire et FD, mai 2001, juillet 2002.