Ecriture rapide des équations adjointes.

• On étudie un système dynamique où le vecteur d'état $y(t\,;\,v(\bullet))$ dépend du temps t et est commandé par un ensemble de variables $v(t)$ grâce à une équation différentielle ordinaire :

(1) $$\frac{{\rm d}y}{{\rm d}t} \;=\; f(y(t),\,v(t),\,t)$$

à laquelle on joint une condition initiale

(2) $$y(t_0\,;\,v(\bullet)) = x\,.$$

On cherche une solution optimale associée au contrôle optimal $t \longmapsto u(t)$ de façon à minimiser la fonction coût J suivante :

(3) $$J(v(\bullet)) \;\equiv\; \lambda(y(T)) \;+\; \int_{t_0}^{T} L(y(t),\,v(t),\,t)\,{\rm d}t \;,$$

où $L(\bullet,\,\bullet,\,\bullet)$ et $\lambda(\bullet)$ sont des fonctions réelles fixées.

• Montrer que le système des équations adjointes s'écrit sous la forme

(4) $$\frac{{\rm d}p}{{\rm d}t} + p\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y} \;=\; 0$$

avec une condition finale

(5) $$p(T) \;=\; \frac{\partial \lambda}{\partial y}(y(T))\,.$$

Jean-Bernard Renard, 1975,
FD, décembre 1991, novembre 1993, avril 1995, août 2002.

Ecriture rapide des équations adjointes.
Proposition de corrigé.

• L'idée est de considérer l'équation différentielle (1) qui décrit l'évolution de l'état $y(t)$ comme une **contrainte** que doit satisfaire la variable liée y et de la traiter comme telle dans un Lagrangien. On introduit donc un multiplicateur de Lagrange p associé à cette contrainte et ce dernier est, compte tenu de la nature de la contrainte (1), un vecteur ligne fonction du temps : $p = p(t)$. On pose

$$\mathcal{L}(y,\, v,\, p) \;\equiv\; \lambda(y(T)) \;+\; \int_{t_0}^{T} L(y,\, v,\, t)\,\mathrm{d}t \;-\; \int_{t_0}^{T} p\,\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - f(y,\, v,\, t)\Big)\,\mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

• L'équation satisfaite par le multiplicateur est obtenue en écrivant de façon très générale la différentielle de $\mathcal{L}(y,\, v,\, p)$ et en éliminant les termes dus aux variations des dérivées temporelles de y par intégration par parties. Il vient, en notant δy, δv et δp les variations de y, v, et p respectivement:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} \;=\; & \frac{\partial\lambda}{\partial y}(y(T))\,\delta y(T) \;+\; \int_{t_0}^{T} \Big[\, \frac{\partial L}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial L}{\partial v}\,\delta v \,\Big]\,\mathrm{d}t \\
& -\; \int_{t_0}^{T} p\,\Big(\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial f}{\partial y}\delta y - \frac{\partial f}{\partial v}\delta v\Big)\,\mathrm{d}t \;-\; \int_{t_0}^{T} \delta p\,\Big(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - f(y,\, v,\, t)\Big)\,\mathrm{d}t \\
=\; & \frac{\partial\lambda}{\partial y}(y(T))\,\delta y(T) \;+\; \int_{t_0}^{T} \Big[\, \frac{\partial L}{\partial y} + p\,\frac{\partial f}{\partial y} \,\Big]\,\delta y\,\mathrm{d}t \;+\; \int_{t_0}^{T} \Big[\, \frac{\partial L}{\partial v} + p\,\frac{\partial f}{\partial v} \,\Big]\,\delta v\,\mathrm{d}t \\
& -\; \Big[\, p\,\delta y \,\Big]_{t_0}^{T} \;+\; \int_{t_0}^{T} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\,\delta y\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

$$\delta\mathcal{L} \;=\; \left\{ \begin{array}{l} \Big(\dfrac{\partial\lambda}{\partial y}(y(T)) - p(T)\Big)\,\delta y(T) \;+\; \displaystyle\int_{t_0}^{T} \Big[\, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + p\,\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y} \,\Big]\,\delta y\ \mathrm{d}t \\ \qquad\qquad\qquad +\; \displaystyle\int_{t_0}^{T} \Big[\, \frac{\partial L}{\partial v} + p\,\frac{\partial f}{\partial v} \,\Big]\,\delta v\ \mathrm{d}t \end{array} \right. \tag{7}$$

car $\delta y(t_0) = 0$ compte tenu de la condition initiale (2).

• En annulant les deux premiers termes du membre de droite de la relation (7), on trouve l'équation adjointe (4) qui donne l'évolution du multiplicateur de Lagrange ainsi que la condition finale (5) associée. Le troisième terme permet de calculer la variation de la fonctionnelle $J(\bullet)$ dans une variation δv de la commande.

Jean-Bernard Renard, 1975,
FD, décembre 1991, novembre 1993, avril 1995, août 2002.