

Exercices pour la séance numéro 14

Exercice 1) Fonctions de transfert de quelques filtres

Soit $a > 0$. On note τ_a l'opérateur de translation dans le temps défini pour un signal discret $x \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na} \in X_a$ par la relation $(\tau_a x)_n = x_{n-1}$. Calculer la fonction de transfert $H_a(z)$ de ce filtre. Même question pour les filtres $x \mapsto y$ et $x \mapsto z$ définis par $y_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$ et $z_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$.

Exercice 2) Inversion de transformées en z

Soit r un nombre réel non nul et $H(z)$ la fonction de la variable complexe z définie par $H(z) = \frac{z}{z-r}$. Trouver deux signaux discrets h_1 et h_2 de sorte que $H(z)$ soit la transformée en z des signaux h_1 et h_2 . L'un de ces signaux est causal et l'autre non causal. Reprendre la question avec la fonction $\tilde{H} = \frac{1}{z(z^2+1)}$.

Exercice 3) Stabilité

Soit $H(z) = \frac{z}{z-r}$ la fonction de transfert des deux filtres $T_1 x = h_1 * x$ et $T_2 x = h_2 * x$ proposés à l'exercice précédent. Étudier la stabilité ℓ^∞ de ces filtres.

Exercice 4) Filtre RC discret

On se donne R , C et a strictement positifs. Pour un signal causal x on définit un signal causal y par $\frac{RC}{a}(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$. Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre obtenu. Montrer à l'aide du critère de placement de pôle que ce filtre est stable.