

Exercices pour la séance numéro 05

Exercice 1) Intégrale simple et intégrale double

La plupart des propriétés de l'intégrale double ont leur équivalent pour l'intégrale simple. A partir des notes de cours, énoncer en regard de chaque propriété de l'intégrale double la propriété équivalente de l'intégrale simple.

Exercice 2) Utilisation du théorème de Tonelli

Soit D le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer sa surface en utilisant les deux façons de faire que suggère le théorème de Tonelli.

Exercice 3) Utilisation du théorème de Fubini

Soit T le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$. Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_T (x + y - \frac{1}{2}) dx dy$. Calculer cette intégrale de deux façons différentes.

Exercice 4) Convolution dans l'espace L^1

On se donne f et g deux fonctions intégrables c'est à dire telles que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \equiv \|f\|_1$ et $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \equiv \|g\|_1$ sont finies. On note cette propriété $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors le produit de convolution $f * g$ appartient aussi à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ et qu'on a l'inégalité $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exercice 5) Changement de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f bornée sur $]0, 1[$. Ecrire l'intégrale double $\int_0^1 dy \left[\int_y^{\sqrt{y}} dx f(x, y) \right]$ à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_0^1 F(x) dx$, où F est une fonction qu'on précisera. Acheter le calcul pour $f(x, y) \equiv 1$.

Exercice 6) Intégrale de Gauss

On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$. Après avoir montré que cette intégrale définit bien un nombre, relier sa valeur à celle de l'intégrale double $I = \int_{]0, \infty[\times]0, \infty[} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy$. Calculer ensuite I en passant en coordonnées polaires. En déduire la valeur de G .

Exercice 7) Aire contenue par une ellipse

On se donne $a > 0$, $b > 0$ et on note E le disque elliptique bordé par l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Grâce au changement de variables $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$, calculer l'aire de E .