Algorithme de Arrow-Hurwicz.

• Soit n un entier positif. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne notée $|\bullet|_n$ et du produit scalaire correspondant noté $(\bullet, \bullet)$. L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ est muni de la norme $\| \mathrm{B} \|$ définie par $\| \mathrm{B} \| \equiv \max \left\{ \frac{|Bx|_n}{|x|_n}, \, x \in \mathbb{R}^n, \, x \neq 0 \right\}$. Soient A une matrice carrée $n \times n$ symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note J l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

(1) $\quad J(v) = \dfrac{1}{2}(Av, v) - (b, v)\,.$

Soit m un entier et C une matrice $m \times n$. On pose $U = \{v \in \mathbb{R}^n / Cv = 0\}$. On considère le problème suivant : trouver $u \in U$ tel que

(2) $\quad J(u) = \inf\limits_{v \in U} J(v)\,.$

1) Montrer que ce problème admet une solution unique et écrire les conditions d'optimalité de Kuhn et Tucker. On notera λ le multiplicateur de Lagrange.

2) Pour résoudre ce problème, on définit la méthode itérative suivante

(3) $\quad u^{k+1} = u^k - \rho_1(Au^k - b + C^{\mathrm{t}}\lambda^k)\,, \quad \lambda^{k+1} = \lambda^k + \rho_1\,\rho_2\,C\,u^{k+1}$

où $\rho_1,\, \rho_2 > 0$ sont des paramètres et (u^0, λ^0) sont donnés dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Montrer que si $\rho_1 > 0$ est suffisamment petit, on a

(4) $\quad \| I - \rho_1 A \| < 1$

où I est la matrice identité. Dans la suite, on choisit ρ_1 tel que cette inégalité soit vérifiée et on pose $\beta \equiv \| I - \rho_1 A \| < 1$.

3) Montrer que l'on a:

(5) $$\left\{ \begin{aligned} | \lambda^{k+1} - \lambda |_m^2 \,\leq\, & | \lambda^k - \lambda |_m^2 + (\rho_1\rho_2)^2 \, \| C^{\mathrm{t}}\, C \| \, | u^{k+1} - u |_n^2 \\ & + 2\,\rho_1\,\rho_2 \left(C^{\mathrm{t}}(\lambda^k - \lambda),\, u^{k+1} - u \right). \end{aligned} \right.$$

En déduire que pour ρ_2 assez petit, on a :

(6) $$\left\{ \begin{aligned} \gamma \, | u^{k+1} - u |_n^2 \,\leq\, & \left(\frac{| \lambda^k - \lambda |_m^2}{\rho_2} + \beta \, | u^k - u |_n^2 \right) \\ & - \left(\frac{| \lambda^{k+1} - \lambda |_m^2}{\rho_2} + \beta \, | u^{k+1} - u |_n^2 \right) \end{aligned} \right.$$

où $\gamma = (-\rho_1^2 \rho_2 \, \| C^{\mathrm{t}}\, C \| + 2 - 2\beta)$ est choisi strictement positif.

4) En déduire que l'on a $\lim_{k \to \infty} u^k = u$.

5) Que peut on dire de la suite $(\lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ lorsque la matrice C est de rang m ?

6) La méthode ci-dessus s'appelle la méthode d'Arrow-Hurwicz. Quel avantage la méthode d'Arrow-Hurwicz présente-t-elle par rapport à celle de Uzawa ?

Frédéric Nataf et FD, juillet 2003.

Algorithme de Arrow-Hurwicz.
Proposition de corrigé.

1) La fonction $J(\bullet)$ est alpha-convexe et l'ensemble U est une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^n$. Donc le problème (2) admet une solution unique. Les contraintes sont qualifiées et le théorème de Kuhn et Tucker assure l'existence d'un point selle pour le Lagrangien $\mathcal{L}(v,\,\mu) \equiv J(v) + (\mu,\,C\,v)$. Les conditions correspondantes dans le cas de contraintes "égalité" s'écrivent :

$(S1) \qquad C\,u \,=\, 0\,, \quad (\lambda,\,C\,u) \,=\, 0\,, \quad A\,u \,-\, b \,+\, C^{\rm t}\,\lambda \,=\, 0\,.$

2) Si λ_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice A, il suffit de choisir ρ_1 de sorte que $0 < \rho_1 < \frac{1}{\lambda_n}$.

3) On a l'égalité "évidente" $\lambda \,=\, \lambda \,+\, \rho_1\,\rho_2\,C\,u$ qu'on retranche de la seconde égalité du système (3). Il vient :

$(S2) \qquad \lambda^{k+1} - \lambda \,=\, \lambda^k - \lambda \,+\, \rho_1\,\rho_2\,C\,(u^{k+1} - u)\,.$

On élève cette égalité au carré et on a la majoration

$\mid C\,(u^{k+1} - u)\,\mid_n^2 \;\leq\; ||\,C^{\rm t}\,C\,||\,|\,u^{k+1} - u\,|_n^2$

qui établit l'inégalité (5). On tire par ailleurs de la première relation du système (3) et de la relation (S1) :

$(S3) \qquad u^{k+1} - u \,=\, ({\rm I} - \rho_1\,A)\,(u^k - u) \,-\, \rho_1\,C^{\rm t}\,(\lambda^k - \lambda)\,.$

On multiplie scalairement la relation (S3) par $2\,(u^{k+1} - u)$ et on ajoute le résultat obtenu à la relation (5) divisée par ρ_2. Il vient :

$$2\,\mid u^{k+1} - u\,\mid_n^2 \,+\, \frac{1}{\rho_2}\,\mid \lambda^{k+1} - \lambda\,\mid_m^2 \,-\rho_1^2\,\rho_2\,\,||\,C^{\rm t}C\,||\,\mid u^{k+1} - u\,\mid_n^2 \qquad \leq$$

$$\leq\; 2\,\beta\,\mid u^{k+1} - u\,\mid_n\,\mid u^k - u\,\mid_n \,+\, \frac{1}{\rho_2}\,\mid \lambda^k - \lambda\,\mid_m^2$$

$$\leq\; \beta\,\mid u^{k+1} - u\,\mid_n^2 \,+\, \beta\,\mid u^k - u\,\mid_n^2 \,+\, \frac{1}{\rho_2}\,\mid \lambda^k - \lambda\,\mid_m^2$$

et la relation (6) s'en déduit facilement.

4) Comme $\gamma > 0$, on déduit de la relation (6) que la suite de terme géneral $\beta\,\mid u^k - u\,\mid_n^2 + \dfrac{1}{\rho_2}\,\mid \lambda^k - \lambda\,\mid_m^2$ est décroissante et minorée, donc converge. Donc la différence de deux termes consécutifs tend vers zéro, et la relation (6) montre que la différence $\mid u^k - u\,\mid_n^2$ est majorée par une expression qui tend vers zéro, ce qui établit le résultat demandé.

5) Vu le résultat précédent et la relation (S3), la suite $C^{\rm t}\,(\lambda^k - \lambda)$ tend vers zéro. Si la matrice C est de rang m, la matrice $C^{\rm t}$ a son noyau réduit au vecteur nul et la suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$ des multiplicateurs converge vers le multiplicateur λ du théorème de Kuhn et Tucker.

6) L'algorithme de Uzawa est la méthode du gradient (projeté) pour le problème dual. On peut l'écrire dans ce cas

$$(S4) \qquad \lambda^{k+1} \;=\; \lambda^k \,+\, \rho\, C\, u^k \,,$$

$$(S5) \qquad A\, u^{k+1} \;=\; b \,+\, C^{\mathrm{t}}\, \lambda^{k+1} \,.$$

L'algorithme de Arrow-Hurwicz évite de résoudre le système linéaire à l'étape (S5) de l'algorithme de Uzawa. Mais il comporte deux paramètres à régler au lieu d'un seul.

FD, juillet 2003.