Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen du 22 juin 2012 (2 heures)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Dans ce problème, on étudie un système hyperbolique de deux équations à deux inconnues u et v :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial u^3}{\partial x} = 0 \,. \end{array} \right.$$

1) Ecrire le système (1) sous la forme

$$(2) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + A \, \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \,,$$

où W est le vecteur des inconnues (u, v) et A une matrice que l'on précisera.

2) Montrer que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A s'écrivent

$$(3) \qquad \lambda_1 \equiv -u \sqrt{3}, \quad \lambda_2 \equiv u \sqrt{3}.$$

3) Calculer une valeur possible pour chacun des vecteurs propres correspondants r_1 et r_2.

4) Chercher un invariant de Riemann β_1 relatif à la première valeur propre λ_1 sous la forme

$$(4) \qquad \beta_1 = v - \psi(u) \,.$$

Préciser une valeur possible pour la fonction ψ. Reprendre cette question en cherchant un invariant de Riemann β_2 pour la seconde valeur propre λ_2.

- On se donne un état (u_0, v_0) avec

$$(5) \qquad u_0 > 0 \,, \quad v_0 > 0$$

pour fixer les idées. On cherche à résoudre un problème de Cauchy pour le système (1) avec une condition initiale de la forme

$$W_0(x) \,=\, \begin{cases} (u_g,\, v_g)\,, & x<0 \\ (u_d,\, v_d)\,, & x>0\,. \end{cases} \tag{6}$$

5) On suppose que l'état de gauche $(u_g,\, v_g)$ est l'état $(u_0,\, v_0)$. Tracer dans le plan $(u,\, v)$ l'ensemble des états $(u_1,\, v_1)$ qui peuvent être joints à $(u_0,\, v_0)$ par une 1-onde de détente.

6) Reprendre la question précédente avec une 2-onde de détente en supposant maintenant que l'état de droite $(u_d,\, v_d)$ de la condition initiale (6) est égal à l'état de référence $(u_0,\, v_0)$.

7) Montrer que la fonction

$$\eta(u,\, v) \,=\, \frac{u^4}{4} + \frac{v^2}{2} \tag{7}$$

est une entropie mathématique pour le système (1) et préciser le flux d'entropie $\zeta(u,\, v)$ associé.

8) On relie l'état de référence donné en (5) "à gauche" d'un état $(u,\, v)$ "à droite" par une discontinuité de vitesse σ. Montrer que si l'on construit ainsi une solution faible du système (1), on a

$$v - v_0 \,=\, \varepsilon\,(u-u_0)\,\sqrt{u^2 + u\,u_0 + u_0^2} \tag{8}$$

avec $\varepsilon^2 = 1$.

9) Dans les mêmes conditions que pour la question précédente, montrer que la discontinuité satisfait une condition d'entropie si l'on a

$$(v-v_0)\,(u+u_0)\,(u-u_0)^2 \,\leq\, 0\,. \tag{9}$$

10) On suppose que l'état de gauche $(u_g,\, v_g)$ est l'état $(u_0,\, v_0)$. Tracer dans le plan $(u,\, v)$ l'ensemble des états $(u_1,\, v_1)$ qui peuvent être joints à $(u_0,\, v_0)$ par une 1-onde de choc entropique.

11) Reprendre la question précédente avec une 2-onde de choc entropique en supposant que l'état de droite $(u_d,\, v_d)$ de la condition initiale (6) est égal à l'état de référence $(u_0,\, v_0)$.

12) Si $(u_g,\, v_g) \,=\, (1,\, 1)$ et $(u_d,\, v_d) \,=\, (2,\, 1)$, préciser quelles ondes sont présentes dans la résolution du problème de Riemann correspondant à la condition initiale (6).

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs “Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique”
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Proposition de corrigé de l’examen du 22 juin 2012.

1) La matrice A s’explicite sans difficulté :

(C1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3\,u^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Les valeurs propres de la matrice A satisfont à la relation

(C2) $$\lambda^2 - 3\,u^2 = 0$$

ce qui montre la propriété proposée.

3) On a par exemple

(C3) $$r_1 = (1,\, -u\,\sqrt{3})^{\mathrm{t}}\,, \qquad r_2 = (1,\, u\,\sqrt{3})^{\mathrm{t}}.$$

4) Un invariant de Riemann est stationnaire le long d’un vecteur propre, c’est à dire $\mathrm{d}\beta \bullet r \equiv 0$. Pour la valeur propre λ_1, cette condition s’écrit

(C4) $$\frac{\partial \beta_1}{\partial u} - u\sqrt{3}\,\frac{\partial \beta_1}{\partial v} = 0\,.$$

Avec β_1 de la forme $v - \psi(u)$, la condition (C4) s’écrit $-\psi'(u) + u\sqrt{3} = 0$. D’où une valeur possible $\psi(u) = u^2\,\sqrt{3}/2$ et un invariant de Riemann β_1 qui s’écrit finalement

(C5) $$\beta_1 = v - \frac{u^2\,\sqrt{3}}{2}\,.$$

Pour la valeur propre λ_2, on change le signe de la fonction ψ et on a

(C6) $$\beta_2 = v + \frac{u^2\,\sqrt{3}}{2}\,.$$

5) L’invariant de Riemann β_1 est constant le long d’une 1-onde de détente. Donc

(C7) $$v_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_1^2 = v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_0^2\,.$$

De plus, la condition de croissance de la valeur propre le long d’une onde de détente impose $\lambda_1(W_0) \leq \lambda_1(W_1)$ donc

(C8) $$u_1 \leq u_0.$$

6) On change juste un signe par rapport à la relation (C7) :

(C9) $$v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_1^2 = v_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,u_0^2\,.$$

La condition de croissance de la valeur propre et le changement de la gauche pour la droite impliquent que la condition (C8) est encore satisfaite.

7) D'une part, la fonction η définie à la relation (7) est strictement convexe et d'autre part pour une solution régulière, on a

$$\text{(C10)} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(v\,u^3\big) \;=\; 0\,.$$

On en déduit le résultat proposé et le flux d'entropie $\zeta(u,\,v)$ vaut $v\,u^3$.

8) On écrit les relations de Rankine et Hugoniot :

$$\text{(C11)} \qquad [v] = \sigma\,[u]\,, \quad [u^3] = \sigma\,[v]$$

et on élimine σ en faisant le rapport entre ces deux relations. On en déduit alors la relation (8) sans difficulté.

9) La dissipation d'entropie $\mathcal{D} \equiv [\zeta] - \sigma\,[\eta]$ doit être négative. Or on a le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &= v\,u^3 - v_0\,u_0^3 - \frac{1}{4}\,\sigma\,[u^4] - \frac{1}{2}\,\sigma\,[v^2] \\
&= v\,\big(u^3 - u_0^3\big) + (v - v_0)\,u_0^3 - \frac{1}{4}\,[v]\,(u+u_0)\,\big(u^2 + u_0^2\big) - \frac{1}{2}\,[u^3]\,(v+v_0) \\
&= \Big(v - \frac{v+v_0}{2}\Big)\,[u^3] - \frac{1}{4}\,[v]\,\big(u^3 + u_0\,u^2 + u_0^2\,u - 3\,u_0^3\big) \\
&= \frac{1}{4}\,[u]\,[v]\,\Big(2\,\big(u^2 + u_0\,u + u_0^2\big) - \big(u^2 + u_0\,u + u_0^2 + u_0\,(u+u_0) + u_0^2\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\,[u]^2\,[v]\,(u+u_0) \qquad \text{et la condition (9) s'en déduit sans difficulté.}
\end{aligned}$$

10) Compte tenu de (8), on a la relation

$$\text{(C12)} \qquad v - v_0 \;=\; -\,(u - u_0)\,\sqrt{u^2 + u\,u_0 + u_0^2}$$

et l'inégalité d'entropie (9) impose pour u voisin de $u_0 > 0$:

$$\text{(C13)} \qquad v - v_0 \leq 0\,.$$

11) On change juste un signe dans la relation (C12) :

$$\text{(C14)} \qquad v - v_0 \;=\; (u - u_0)\,\sqrt{u^2 + u\,u_0 + u_0^2}$$

et on échange les rôles de la gauche et de la droite dans l'inégalité d'entropie (9). On en déduit :

$$\text{(C15)} \qquad v - v_0 \geq 0\,.$$

12) Une 1-onde de détente et une 2-onde de choc.

Juin 2012.

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Question de cours du 22 juin 2012 (1 heure)

Les notes de cours sont interdites. Il sera tenu compte de façon essentielle de la précision des définitions et des résultats proposés.

1) Soit f une fonction régulière de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Quand dit-on que le système d'équations

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big[f(W)\big] = 0 \tag{1}$$

est hyperbolique ?

2) Montrer que la notion de système hyperbolique ne dépend pas des inconnues choisies, c'est à dire peut être mise en évidence lors de tout changement régulier et bijectif de fonction inconnue.

3) Que signifie qu'une valeur propre du système hyperbolique (1) est linéairement dégénérée ?

4) Si f est linéaire, c'est à dire s'il existe une matrice carrée A de sorte que $f(W) \equiv A \bullet W$ et que le système associé (1) est hyperbolique, quelles valeurs propres sont dégénérées ?

5) Montrer que pour le système des équations de Saint Venant étudié en cours, l'une des trois valeurs propres est linéairement dégénérée. On précisera laquelle.

FD, juin 2012.