Université Paris Nord
Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen partiel du 5 mars 2010 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Le contrôle est composé de trois exercices indépendants.

1) Méthode des caractéristiques

Soient a et b deux nombres réels et $\mathbb{R}^2 \ni (x,\, y) \longmapsto u_0(x,\, y) \in \mathbb{R}$ une fonction continuement différentiable. On cherche une fonction $u(\bullet) \,:\, \mathbb{R}^2 \times [0,\, \infty[\ni (x,\, y,\, t) \longmapsto u(x,\, y,\, t) \in \mathbb{R}$ continuement différentiable solution du problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\,\dfrac{\partial u}{\partial y} \,=\, 0\,, & (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, t > 0 \\ u(x,\, y,\, 0) \,=\, u_0(x,\, y)\,, & (x,\, y) \in \mathbb{R}^2\,. \end{cases}$$

a) Soit $(x,\, y) \,=\, \big(X(t),\, Y(t)\big)$ une courbe qui satisfait au système différentiel

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \,=\, a\,, \qquad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} \,=\, b\,.$$

Que dire de la fonction $[0,\, \infty[\ni t \longmapsto v(t) \equiv u\big(X(t),\, Y(t), t\big) \in \mathbb{R}$?

b) Montrer que si le système (1) admet une solution régulière, celle-ci est nécessairement donnée par une formule explicite qu'on précisera.

c) Vérifier que le système (1) admet une unique solution régulière qu'on précisera.

2) Caractéristiques courbes

a) Pour y donné dans $\mathbb{R}$, expliciter la solution du problème

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,=\, x(t)\,, \qquad x(0) \,=\, y\,.$$

On distinguera trois cas : $y < 0$, $y = 0$ et $y > 0$ si besoin est.

b) Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction de variable réelle continuement dérivable. On cherche une fonction $u \in \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R} \times [0,\, \infty[\big)$ solution du problème de Cauchy

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + x\,\dfrac{\partial u}{\partial x} \,=\, 0\,, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,\, 0) \,=\, u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

A l'aide de la question précédente, proposer une valeur nécessaire pour la valeur $u(x,\, t)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$.

c) Achever la résolution du problème (4).

3) Relation de Rankine et Hugoniot

a) Soit $\mathbb{R} \times [0,\, \infty[\, \ni (x,\, t) \longmapsto u(x,\, t) \in \mathbb{R}$ une solution de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de l'équation

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{u^3}{3}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^4}{4}\Big) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R},\; t > 0\,.$$

Ecrire la relation de Rankine et Hugoniot associée si la fonction $u(\bullet)$ subit une discontinuité $(u_g,\, u_d)$ à travers une courbe Γ telle que

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(t)\,.$$

b) Montrer que dans les zones où elle est régulière et non nulle, toute solution de (5) est solution de l'équation de Burgers

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u^2}{2}\Big) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R},\; t > 0\,.$$

c) Proposer une solution faible pour le problème de Cauchy formé de l'équation (5) et de la condition initiale

$$(8) \qquad u(x,\, 0) = \begin{cases} 2\,, & x < 0 \\ 1\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

d) Quelle est la solution faible entropique du problème de Cauchy formé de l'équation de Burgers (7) et de la condition initiale (8)?

e) Avez-vous des commentaires ?

FD, janvier 2004, édition février 2010.