Université Paris Nord
Institut Galilée
Ingénieurs “Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique”
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen partiel du 11 mars 2011 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Pour ce contrôle des connaissances, on se propose d'étudier une équation hyperbolique avec un terme source. On se donne $\alpha > 0$ et une fonction régulière $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On cherche une fonction $u(x, t)$ à valeurs scalaires solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u)\big) + \alpha\, u = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0.$$

On se donne aussi une fonction $u^0(\bullet)$ dont on précisera les qualités plus loin. La condition initiale pour la fonction u s'écrit sous la forme

$$(2) \qquad u(x, 0) = u^0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) On suppose dans cette question que la condition initiale $u^0(\bullet)$ ne dépend pas de x. Proposer une solution du système (1)(2).

2) On suppose la fonction $u^0(\bullet)$ régulière et $f(u) \equiv a\,u$ où a est un nombre réel fixé. En introduisant les courbes caractéristiques solution de l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\,,$$

proposer une solution $u(x, t)$ solution du système de Cauchy (1)(2) dans ce cas.

3) On suppose la condition initiale $u^0(\bullet)$ régulière et strictement croissante. On choisit pour $f(\bullet)$ la dynamique de Burgers, c'est à dire $f(u) \equiv \frac{u^2}{2}$. On suppose que $u(x, t)$ est solution régulière de l'équation (1) et on introduit la courbe caractéristique solution de

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \,=\, u\big(x(t),\, t\big)\,.$$

• On pose $v(t) \,\equiv\, u(x(t),\, t)$. Montrer que la fonction v est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

• En déduire que $u(x,\, t)$ s'obtient par résolution d'une équation d'inconnue y qui s'écrit

$$(5) \qquad y \,+\, \frac{1-\exp(-\alpha\, t)}{\alpha}\, u^0(y) \,=\, x\,.$$

• Calculer $u(x,\, t)$ en fonction de x, t, $u^0(\bullet)$ et y solution de l'équation (5).

4) Montrer que si $u(\bullet,\, \bullet)$ est solution régulière de (1)(2), on a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \int_{\mathbb{R}\times]0,\,+\infty[} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, u \,+\, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, f(u) \,-\, \alpha\, \varphi\, u \Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \,+ \\ \displaystyle \qquad +\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\, 0)\, u^0(x)\, \mathrm{d}x \,=\, 0\,, \qquad\qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1\big(\mathbb{R}\times [0,\, +\infty[\big)\,. \end{array} \right.$$

5) Une solution faible du problème (1)(2) suppose que l'on a choisi la condition initiale $u^0(\bullet)$ de sorte que $u^0 \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ et que l'on cherche une solution $u \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R} \times [0,\, +\infty[)$ telle que la relation (6) a lieu.

• Montrer que si la fonction u est également de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux avec une discontinuité $(u_g,\, u_d)$ à travers une courbe régulière Σ, on a la relation (1) en tout point $(x,\, t)$ où la fonction u est régulière.

• Dans les mêmes conditions, montrer que si l'on introduit la vitesse $\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ de la discontinuité Σ, on a la relation de Rankine et Hugoniot

$$(7) \qquad f(u_d) - f(u_g) \,=\, \sigma\, \big(u_d - u_g\big)$$

le long de cette discontinuité.

• Compte tenu de vos connaissances, quel commentaire pouvez-vous faire ?

FD, janvier 2003, édition mars 2011.