

# Traitement du Signal

## Leçon 08

### Filtres miroirs en quadrature

- Algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson
- Tendances et fluctuations
- Étude théorique de filtres miroirs en quadrature
- Exemples de filtres miroirs en quadrature
- Tendances et fluctuations revisités par Mallat
- Ondelettes et filtres miroirs en quadrature
- Ondelettes de Daubechies

François Dubois

Paris, 1997

## Filtres miroirs en quadrature

### 1) algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson.

• Dans le contexte du traitement d'images, Burt et Adelson [1983] se posent le problème de l'échantillonnage de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  sur des grilles multiples  $\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$  emboîtées les unes dans les autres:

$$(1) \quad \Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z} \subset 2^{-(j+1)}\mathbb{Z} = \Gamma_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

on construit donc un opérateur  $R_j$  de restriction de  $f$  aux points de coordonnées multiples de  $1/2^j$

$$(2) \quad R_j: L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f_j = R_j f \in \ell^2(\Gamma_j), \quad j \in \mathbb{Z}$$

Rappelons que  $f_j \in \ell^2(\Gamma_j)$  signifie que  $f_j$  est définie pour les points de la forme  $k2^{-j}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$(3) \quad \ell^2(\Gamma_j) \ni f_j = \{f_j(k2^{-j}), k \in \mathbb{Z}\}$$

avec  $f_j(2^{-j}k) \in \mathbb{C}$  et  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_j(k2^{-j})|^2 < \infty$ .

Scan  
décembre 2016

• Disposant de la collection  $f_j$  de signaux discrets ( $f_j$  est définie sur la grille  $\Gamma_j$  de "pas"  $2^{-j}$ ) la question est de savoir si les images échantillonnées peuvent être reliées entre elles par une relation simple. En particulier, peut-on calculer  $f_{j-1}$  sur la grille plus grossière  $\Gamma_{j-1}$  à partir de  $f_j$  seulement, c'est à dire à partir du signal sur la grille plus fine  $\Gamma_j$ , sans revenir au signal continu  $f$ ? Si tel est le cas, notons  $S_j$  l' (hypothétique) opérateur permettant de passer de  $f_j$  à  $f_{j-1}$ :

$$(4) \quad \ell^2(\Gamma_j) \ni f_j \mapsto S_j(f_j) = f_{j-1} \in \ell^2(\Gamma_{j-1})$$

Cette relation (4) doit être vraie pour toute fonction  $f_j$  issue du lissage de  $f$  par l'opérateur  $R_j$  de la relation (2). Quand on injecte  $f_j = R_j f$  dans la relation (4), il vient la représentation

$$(5) \quad R_{j-1} = S_j R_j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Or, entendu, cette relation ne permet pas de calculer  $S_j$  car l'opérateur de lissage  $R_j: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\Gamma_j)$  n'a pas d'inverse: on ne peut pas revenir au signal continu à partir du seul signal discret sans hypothèse supplémentaire!

π même conti une mar

- avant d'aller plus loin, explicitons la construction de l'opérateur de restriction - lissage de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en  $f_j$  défini sur la grille  $\Gamma_j$ . Pour  $f \in L^2(\mathbb{R})^*$  qui n'a pas une transformée de Fourier  $\hat{f}$  dont le support est inclus dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$  (où  $h > 0$  est un pas d'échantillonnage fixé), on sait que

l'échantillonnage  $f(kh)$  (interpolation sur une grille  $h\mathbb{Z}$ ) est pollué par les hautes fréquences, ainsi que le suggère le théorème de Shannon - Nyquist.

- on doit donc d'abord filtrer le signal  $f$  pour représenter sur une grille  $h\mathbb{Z}$  une fonction à bande coupée dans  $[-\pi/h, \pi/h]$ . on introduit pour cela un filtre passe-bas  $g$  ( $\hat{g} \equiv 0$  hors de l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ ) et on convolue d'abord  $f$  par  $g^h$ , avec  $g^h(x) = \frac{1}{h} g(\frac{x}{h})$  avant de considérer l'interpolé de cette fonction aux points  $kh$  de la grille  $h\mathbb{Z}$ :

$$(6) (R^h f)_k = (g^h * f)(kh) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} g(k - \frac{x}{h}) f(x) dx$$

Comme  $\widehat{g^h}(\omega) = \widehat{g}(h\omega)$ ,  $g^h$  ne contient pas de fréquence supérieure à  $\frac{\pi}{h}$  et il en est de même pour  $f * g^h$ . La représentation (6) permet de

reconstruit complètement  $g^h * f$  à partir de  $(R^h f)_k$  et  $k \in \mathbb{Z}$ . 4

• Il est utile de changer les notations et d'écrire la convolution (6) comme un produit scalaire hermitien. on pose  $\varphi(x) = \overline{g(-x)}$  et  $\varphi^h(x) = \frac{1}{h} \varphi\left(\frac{x}{h}\right)$ . alors la représentation (6) prend la forme :

$$(7) \quad (R^h f)_k = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi^h(x - kh)} dx = (f, \varphi^h(\cdot - kh))$$

Comme  $g$  est à bande comprise dans  $[-\pi, \pi]$ , il en est de même pour  $\varphi$  et quitte à multiplier  $\varphi$  par un complexe de module 1, on a

$$(8) \quad \hat{\varphi}(0) = 1, \quad \hat{\varphi}(2\ell\pi) = 0 \quad \ell \in \mathbb{Z}, \ell \neq 0.$$

• Pour  $j \in \mathbb{Z}$  fixé, l'opérateur  $R_j$  de lissage-itération sur la grille  $\Gamma_j$  est défini par la relation (7) avec  $h = 2^{-j}$ ; il suffit donc de connaître la seule fonction  $\varphi$  (satisfaisant aux conditions (8)) pour définir complètement les  $R_j$ . Il n'importe d'écrire la relation (5) pour déterminer l'opérateur  $S_j: l^2(\Gamma_j) \rightarrow l^2(\Gamma_{j-1})$  en fonction de  $\varphi$ . L'idée de Burt et Adelson consiste à prendre le problème à l'envers et de construire  $\varphi$  à partir de  $S_0: l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(2\mathbb{Z})!$

- Considérons un opérateur  $S_0 : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  qu'on peut toujours écrire sous la forme

$$(9) \quad S_0 = DF_0$$

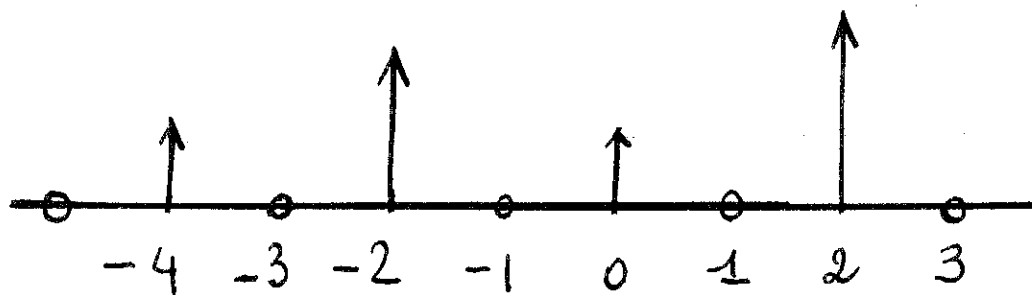
avec  $F_0 : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  filtre discret défini par la convolution avec une suite  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ .

$$(10) \quad (F_0 u)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-k} u_k, \quad k \in \mathbb{Z}, u \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

et  $D$  opérateur dit "de décimation" qui consiste à ne garder que les valeurs d'indices pairs à partir d'une suite  $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$  donnée :

$$(11) \quad \begin{cases} D : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z}) \\ (Dv)_{2k} = v_{2k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Comme  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ,  $\ell^2(2\mathbb{Z})$  est inclus dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  et on peut aussi poser  $(Dv)_{2k+1} = 0$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).



opérateur  $D$  de décimation :  
on ne garde que les indices pairs

Moyennant les hypothèses (9) à (11), on a

6

$$(12) \quad (S_0 u)_{2k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} u_l$$

Nous traduisons la relation (5) écrite pour  $j=0$ , c'est à dire  $R_{-1} = S_0 R_0$  lorsque les opérateurs de discrétisation  $R_j$  sont paramétrés par une fonction  $\varphi$  (relation (7)). On a, pour  $f \in L^2(\mathbb{R})$  arbitraire :

$$(13) \quad (R_0 f)_k = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi(x-k)} dx,$$

et de même (cf (7)) :

$$(14) \quad (R_{-1} f)_{2k} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi\left(\frac{x}{2} - k\right)} dx.$$

Quand on applique le filtre  $S_0$  à la relation (13) à l'aide de la relation (12), on doit retrouver (14), ce pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On l'écrit :

$$\begin{aligned} (S_0 R_0 f)_{2k} &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{2k-l} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi(x-l)} dx \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi(x-2k+j)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \overline{\varphi(x+j-2k)} dx. \end{aligned}$$

En identifiant cette dernière expression avec le second membre de la relation (14), il vient (prendre  $k=0$ , changer  $x$  en  $2x$  et conjuguer les complexes) :

$$(15) \quad \varphi(x) = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_j} \varphi(2x+j) \quad , x \in \mathbb{R} .$$

On peut écrire cette relation plus simplement, en introduisant la transformée de Fourier  $\hat{\varphi}$  de  $\varphi$  et une fonction  $m_0$  obtenue simplement à partir de la fonction de transfert du filtre  $F_0$ ,

$$(16) \quad m_0(\omega) = \overline{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-i\omega j}} \quad :$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_j} \int_{\mathbb{R}} \varphi(2x+j) e^{-i\omega x} dx \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_j} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-i\omega \left(\frac{y}{2} - \frac{j}{2}\right)} dy \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\alpha_j} e^{i\omega \frac{j}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$(17) \quad \hat{\varphi}(\omega) = m_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad , \omega \in \mathbb{R} ,$$

soit par itération de la relation précédente :

$$(18) \quad \hat{\varphi}(\omega) = \prod_{l=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\omega}{2^l}\right) .$$



La relation (17) est la traduction avec des fonctions ( $\varphi$  qui caractérise le filtre de lissage  $R_j$  et  $m_0$  qui est la fonction de transfert de l'opérateur discret  $T_j$  avant échantillonnage) la relation (5) écrite entre opérateurs.

- on déduit de la périodicité de la fonction  $m_0(\cdot)$  (cf relation (17):  $m_0$  est périodique de période  $2\pi$ ) que la gaussienne, c'est à dire le choix

$$(19) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

ne permet pas de construire un opérateur  $T_j$  de  $L^2(\Gamma_j)$  sur  $L^2(\Gamma_{j+1})$ . En effet, si  $T_j$  existe, la fonction  $m_0$  qui lui est associée vérifie nécessairement (relation (17))

$$m_0(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} = \frac{e^{-(2\omega)^2/2}}{e^{-\omega^2/2}} = e^{-\frac{3}{2}\omega^2}$$

fonction qui n'est pas périodique.

- on a la même "bonne propriété" d'existence pour le filtre défini par convolution avec le chapeau chinois

$$(20) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

et on voit bien en conséquence que l'existence d'opérateurs de transition  $S_j$  est exceptionnelle

## • Splines

On part, comme pour la base de Haar vue au chapitre précédent, de la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$(21) \quad \chi(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et on pose

$$(22) \quad \varphi(x) = \chi * \dots * \chi \quad (\chi \text{ itérativement } m \text{ fois})$$

on a alors  $\hat{\varphi}(\omega) = (\hat{\chi})^m$  et comme

$$(23) \quad \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega})$$

on en déduit  $\hat{\varphi}(\omega) = \left( \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^m$  et

$$m_0(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)} = \left\{ \frac{1 - e^{-2i\omega}}{2(1 - e^{-i\omega})} \right\}^m = \left( \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^m$$

ce qui montre que dans ce cas, il existe un opérateur de transition entre deux échelles consécutives. Dans le cas où  $m=1$ , on retrouve l'ondelette de Haar, où l'opérateur de transition est simplement donné par la relation (50) du chapitre précédent; nous y reviendrons.

- on peut aussi supposer que l'opérateur de transition est donné, donc que la fonction  $m_0(\omega)$  est connue, et d'en déduire l'outil de convolution  $\varphi(\cdot)$ .

\* Si tous les  $\alpha_j$  valent 0 sauf pour  $j=0$  et qu'alors il vaut 1,  $m_0(\omega)$  est identiquement égale à 1, et le produit infini (18) montre qu'alors il en est de même pour  $\hat{\varphi}(\omega)$ .

Par suite,  $\varphi(x) = \delta(x)$  et le filtrage  $R_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\Gamma_j)$  n'est plus défini! { la masse de Dirac ne peut pas prendre de valeur contre  $f \in L^2(\mathbb{R})$  arbitraire mais contre  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

\* on suppose que les  $\alpha_j$  vérifient

$$(24) \quad \alpha_1 = \alpha_{-1} = \frac{1}{2} ; \quad \alpha_j = 0 \text{ si } j \neq \pm 1.$$

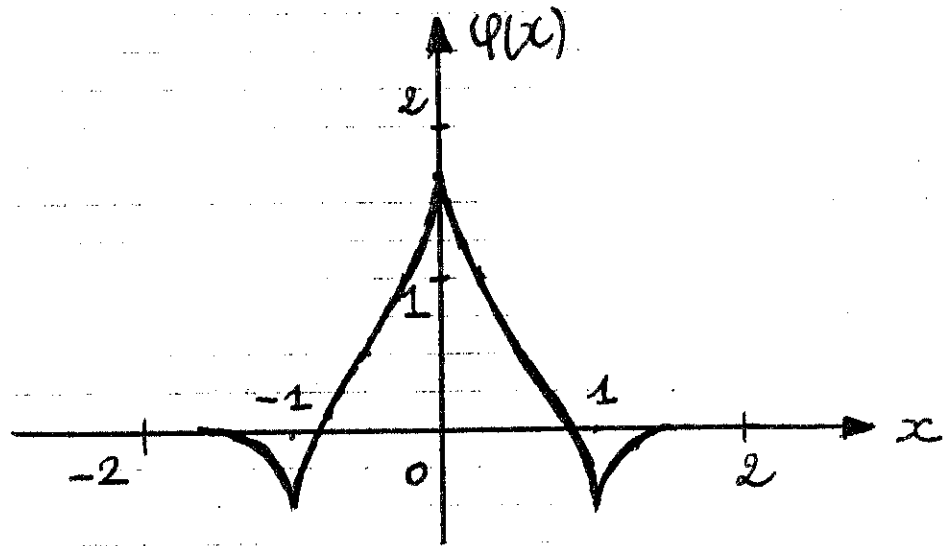
Alors  $m_0(\omega) = \cos \omega$  et on peut montrer qu'alors

$$(25) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \text{ si } x \in [-1, 1], \quad \varphi(x) = 0 \text{ sinon.}$$

\* Le dernier exemple est dû à Burt et Adelson (article aux IEEE américains en 1983), avec

$$(26) \quad \alpha_0 = 0,6 ; \quad \alpha_{\pm 1} = 0,25 ; \quad \alpha_{\pm 2} = -0,05 ; \quad \alpha_k = 0 \text{ si } |k| > 2$$

alors  $\text{supp } \varphi$  est niché dans l'intervalle  $[-2, 2]$  et cette fonction "ressemble" à  $\exp(-c|x|)$ .



masque de Burt et Adelson

## 2) Tendance et fluctuation

- L'opérateur  $S_0$  permet d'isoler, au sein d'un signal discret défini sur  $\mathbb{Z}$ , l'information plus grossière définie sur  $2\mathbb{Z}$ :

$$(27) \quad \ell^2(\mathbb{Z}) \ni f \mapsto S_0 f \in \ell^2(2\mathbb{Z})$$

Pour définir un opérateur qui permette de ne pas changer d'espace, il est naturel d'introduire l'adjoint  $S_0^*$  de  $S_0$ :

$$(28) \quad \ell^2(2\mathbb{Z}) \ni g \mapsto S_0^* g \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

et de composer ces deux opérateurs;  $T_0^* T_0$  envoie  $\ell^2(\mathbb{Z})$  dans lui-même

$$(29) \quad \ell^2(\mathbb{Z}) \ni f \mapsto S_0^* S_0 f \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

définition. On appelle tendance du signal  $f$  ( $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ) relativement au filtre  $S_0$  le signal  $S_0^* S_0 f$ .

Notons que  $S_0$  est l'analogie discret d'une restriction et  $S_0^*$  d'un prolongement. On parle de tendance car pour  $f$  restriction à  $\mathbb{Z}$  d'une fonction régulière (disons  $f_j = p_j$ ,  $p$  polynôme de degré  $\leq N$ ), la tendance de  $f$  redonne  $f$  elle-même

$$(30) \quad S_0^* S_0 p = p \quad \forall p \text{ polynôme, } d^0 p \leq N.$$

on peut écrire la condition (30) avec la fonction  $m_0(\cdot)$  de la relation (16) : elle doit s'annuler, ainsi que ses dérivées d'ordre  $\leq N$  en  $\omega = \pi$  et à l'origine, on a :

$$(31) \quad |m_0(\omega)|^2 = 1 + O(|\omega|^{N+1}),$$

qui traduit que la transformée de Fourier  $m_0(\cdot)$  est "égale" à 1 au voisinage de  $\omega = 0$ , à l'ordre  $|\omega|^{N+1}$  près.

on peut également montrer qu'alors le filtre  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  qui définit  $S_0$  a une longueur (l'ensemble des indices  $j$  où  $\alpha_j \neq 0$ ) est proportionnel à  $N$ .

- Définition : on appelle fluctuation du signal  $f$  ( $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ) relativement au filtre de restriction  $S_0: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  le signal

$$f_1 = f - S_0^* S_0 f.$$

- Dans le cas où l'on part d'un signal sur la grille  $\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$  à l'échelle  $2^{-j}$   $f \in \ell^2(\Gamma_j)$ , la tendance est définie par

$$(32) \quad f_{j+1} = S_j^* S_j f$$

et la fluctuation  $r_{j+1}$  par

$$(33) \quad r_{j+1} = f - f_{j+1} = f - T_j^* T_j f.$$

on a donc la décomposition en "tendance - fluctuation"

$$(34) \quad L^2(\Gamma_j) \ni f \mapsto (f_{j+1}, r_{j+1}) \in L^2(\Gamma_j) \times L^2(\Gamma_{j+1})$$

du signal  $f \in L^2(\Gamma_j)$ . L'idée suivante naturelle est d'itérer l'idée précédente, ce que font Burt et Adelson.

Soit  $f_0$  un signal défini sur la grille  $\Gamma_m = 2^{-m}$ . La tendance  $S_m^* S_m f_0$  est complètement définie par  $f_1$  définie sur la grille  $\Gamma_{m-1}$  par

$$(35) \quad f_1 = S_m f_0 \in L^2(\Gamma_{m-1})$$

L'avantage bien sûr est que le signal  $f_{m-1}$ , étant défini sur une grille plus grossière, on peut le stocker avec deux fois moins d'information que l'information qui est nécessaire pour stocker  $f_m$ . Il reste à stocker la fluctuation  $r_m$  définie comme à la relation (33):

$$(36) \quad L^2(\Gamma_m) \ni r_1 = f_0 - S_m^* f_1$$

Partant d'un signal  $f_0 \in L^2(\Gamma_m)$ , on a construit un couple  $(f_1, r_1)$  qui diffère quelque peu de la relation (34) puisque  $f_1$  n'est pas égal à la tendance, mais est codé pour "moins cher".

Et en recommençant car  $f_1 \in L^2(\Gamma_{m-1})$ , on construit  $f_2 = S_{m-1} f_1$  et  $r_2 = f_1 - S_{m-1}^* f_2$ , et ainsi

de suite. A chaque étape, la fluctuation  $r_j \in \mathcal{L}^2(\Gamma_{m+1-j})$  est codée sur une grille comportant  $2^{j-1}$  fois moins de points que la grille initiale et le signal  $f_j \in \mathcal{L}^2(\Gamma_{m-j})$  est défini sur une grille qui demande  $2^j$  fois moins de points que la grille initiale  $\Gamma_m$ . Le décompte de la place nécessaire pour stocker  $f_0$  par la suite  $(f_1, r_1), (f_2, r_2), \dots$  est donc le suivant; si  $f_0$  demande une place (mémoire) de  $N$  mots,  $f_1$  en demande  $\frac{N}{2}$  et  $r_1$  encore  $N$ . Et on recommence pour  $f_1$ :  $\frac{N}{2}$  pour  $f_2$  et  $\frac{N}{2}$  pour  $r_2$ . La place totale requise est donc:

$$N + \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} N = 2N.$$

soit un stockage double de celui initialement nécessaire pour stocker  $f_0$ !

- Dans le cas des images, il faut raisonner avec des grilles grossières qui sont en fait quatre fois plus économiques. Mais le décompte de la place demandée par la décomposition "tendance plus fluctuation" reste trop coûteux:  $f_0 \rightarrow (f_1, r_1)$ . si  $f_0$  est codée avec  $N^2$  places en mémoire, alors  $f_1$  en demande  $(\frac{N}{2})^2 = \frac{N^2}{4}$ , mais  $r_1$  toujours  $N^2$ . En itérant, on aboutit à un stockage nécessaire de



$$N^2 + \frac{N^2}{4} + \frac{N^2}{16} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} N^2 = \frac{4}{3} N^2,$$

ce qui reste excessif.

Dans cet algorithme, la fluctuation n'est pas stockée efficacement; grâce aux filtres miroirs en quadrature, elle l'est et au lieu de la stocker sur autant de bits que le signal initial, on réussit là encore à gagner un facteur deux (pour les signaux mono-dimensionnels).

### 3) Etude théorique des filtres univariés en quadrature.

On reprend <sup>quarante</sup> les notations des paragraphes précédents; un filtre  $T_0: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  est défini à l'aide de la relation (9), avec l'opérateur de décimation  $D: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  et un filtre  $F_0: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  associé à la suite  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  par la relation de convolution (10). On a tout d'abord la

Proposition opérateur linéaire  $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$

Si  $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , i.e.

$$(37) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| < \infty$$

alors  $F_0$  défini par la relation (10) est bien un opérateur linéaire continu de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ .

Il suffit de vérifier que pour  $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , la suite  $(F_0 u)_k = (\alpha * u)_k$  est de carré sommable, c'est à dire que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_0 u)_k^2 < \infty$  et est même majoré

par une constante fois la norme (au carré)  $\sum_k |u_k|^2$  de  $u$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Or on a:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |F_0 u|_k^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-l} u_l \right)^2$$

La convexité de la fonction  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  entraîne que pour toute suite  $\theta_j \geq 0$  de somme 1

( $\sum_j \theta_j = 1$ ), on a:

$$(38) \quad \left( \sum_j \theta_j x_j \right)^2 \leq \sum_j \theta_j x_j^2$$

on applique cette relation avec  $\theta_l = \frac{|\alpha_{k-l}|}{\sum_m |\alpha_{k-m}|}$ :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-l} u_l \right)^2 &\leq \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\alpha_{k-l}| |u_l| \right)^2 \\ &\leq \left[ \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| \right) \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_{k-l}|}{\sum_j |\alpha_{k-j}|} |u_l| \right) \right]^2 \\ &\leq \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| \right)^2 \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{|\alpha_{k-l}|}{\sum_j |\alpha_j|} |u_l|^2 \right) \\ &\leq \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| \right) \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\alpha_{k-l}| |u_l|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{k \in \mathbb{Z}} (F_0 u)_k^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} \alpha_{k-l} u_l \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| \right)^2 \left( \sum_{l \in \mathbb{Z}} |u_l|^2 \right) \end{aligned}$$

soit

$$(39) \quad \| \alpha * u \|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \leq \| \alpha \|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \| u \|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

ce qui établit la propriété. ■

## Définition Filtres miroirs en quadrature 19

Soit  $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$  et  $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ,  $F_0$  défini par la convolution par  $\alpha$  (relation (10)) et de façon analogue  $F_1$  défini par la convolution par  $\beta$ . ou pose, comme à la relation (9):

$$(40) \quad T_0 = DF_0, \quad T_1 = DF_1$$

où  $D: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  est l'opérateur de décomposition (relation (4)). on dit que  $F_0$  et  $F_1$  sont des filtres miroirs en quadrature si pour tout signal  $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , on a

$$(41) \quad \|f\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 = \|T_0 f\|_{\ell^2(2\mathbb{Z})}^2 + \|T_1 f\|_{\ell^2(2\mathbb{Z})}^2.$$

Le résultat important (et relativement difficile!) de ce paragraphe est le suivant:

### Théorème Caractérisation des filtres miroirs en quadrature

Soient  $F_0$  et  $F_1$  deux filtres miroirs en quadrature. alors  $T_0^*$  et  $T_1^*: \ell^2(2\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  sont des isométries partielles (sur  $\ell^2(2\mathbb{Z})$ ):

$$(42) \quad T_0 T_0^* = T_1 T_1^* = I(\ell^2(2\mathbb{Z})),$$

les images de ces deux opérateurs sont orthogonales dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

$$(43) \quad T_1 T_0^* = T_0 T_1^* = 0$$

et  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est somme directe de ces deux images. on a de plus

$$(44) \quad I = T_0^* T_0 + T_1^* T_1$$

Si  $q_0(\theta)$  et  $q_1(\theta)$  sont les fonctions de transfert des deux filtres  $F_0$  et  $F_1$ :

$$(45) \quad q_0(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\theta} \quad ; \quad q_1(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k e^{-ik\theta} \quad ,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que  $F_0$  et  $F_1$  soient deux filtres miroirs en quadrature est que pour presque tout  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , la matrice  $U(\theta)$  définie par

$$(46) \quad U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} q_0(\theta) & q_1(\theta) \\ q_0(\theta+\pi) & q_1(\theta+\pi) \end{pmatrix}$$

soit unitaire.

□ on remarque que si  $q_0$  est fixé de sorte que

$$(47) \quad |q_0(\theta)|^2 + |q_0(\theta+\pi)|^2 = 2 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

il suffit de choisir  $q_1$  de sorte que

$$(48) \quad q_1(\theta) = e^{i\theta} \overline{q_0(\theta+\pi)}$$

pour garantir a priori l'unitarité de la matrice  $U(\theta)$  définie en (46).

Avant d'entamer la preuve, au regard de l'action, 21  
 de Fourier, de l'opérateur de décimation  $D$ ,  
 on a besoin pour cela de la proposition suivante

Proposition      Formule sommatoire de Poisson.

$$(49) \quad \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{iT\theta \ell} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\theta - \frac{2k\pi}{T}\right)$$

La preuve est immédiate compte tenu de la connaissance (vue plus haut dans le cours) de la transformée de Fourier du peigne de Dirac:

$$(50) \quad \text{Si } S_T(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\theta - kT), \text{ alors } \widehat{S_T}(\xi) = \frac{2\pi}{T} S_{\frac{2\pi}{T}}(\xi).$$

on a donc par un simple calcul formel de  $\widehat{S_T}$ ,

$$\widehat{S_T}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\theta) e^{-i\xi\theta} d\theta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-i\xi kT} =$$

le résultat (49), après changement de  $\ell$  en  $-\ell$  dans le membre de gauche. ■

Proposition      Décimation dans l'espace de Fourier.

Soit  $D: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  l'opérateur de décimation défini en (11) par  $(D\varphi)_{2k} = \varphi_{2k}$  et défini comme opérateur à valeurs dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  avec la relation supplémentaire  $(D\varphi)_{2k+1} = 0$ . On a

$$(51) \quad \widehat{D\varphi} = \frac{1}{2} [\widehat{\varphi}(\theta) + \widehat{\varphi}(\theta + \pi)] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

pour tout  $\varphi \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et  $\hat{\varphi}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k e^{-ik\theta}$ . 2.

La preuve de cette proposition est un "simple" calcul formel qui utilise la formule sommatoire de Poisson. On a :

$$\widehat{D\varphi}(\theta) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \varphi_{2\ell} e^{-2i\ell\theta} \quad \text{qui est}$$

qui est donc une fonction périodique de période  $\pi$  (alors que  $\hat{\varphi}(\theta)$  est périodique de période  $2\pi$ !).

$$\begin{aligned} \widehat{D\varphi}(\theta) &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi) e^{2i\ell\xi} d\xi \right) e^{-2i\ell\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \varphi(\xi) \left\{ \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} e^{2i\ell(\xi - \theta)} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \hat{\varphi}(\xi) \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(\xi - \theta - k\pi) \end{aligned}$$

en prenant  $T=2$  dans la relation (49). Donc

$$\widehat{D\varphi}(\theta) = \frac{1}{2} (\hat{\varphi}(\theta) + \hat{\varphi}(\theta + \pi)) \quad \text{pour } \theta \in [0, \pi]$$

et le résultat (51) en résulte vu la périodicité. ■

on a par ailleurs le résultat suivant :

Proposition. La conservation de la norme entraîne la conservation du produit scalaire.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La relation (41) entraîne} \\ (52) \quad (f, g) = (T_0 f, T_0 g) + (T_1 f, T_1 g) \quad \forall f, g \in \ell^2(\mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

La preuve, dans le cas des espaces de Hilbert réels, résulte de l'identité

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2$$

laquelle ne suffit pas car il est nécessaire de se situer dans le champ complexe pour utiliser sans complexe la transformation de Fourier. Mais on a:

$$(53) \quad (f, g) = \frac{1}{4} \left\{ \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i \|f+ig\|^2 - i \|f-ig\|^2 \right\}$$

relation qui s'obtient facilement à l'aide des quatre identités suivantes

$\ f+g\ ^2 = \ f\ ^2 + (f, g) + \overline{(f, g)} + \ g\ ^2$	1
$\ f+ig\ ^2 = \ f\ ^2 + (-i)(f, g) + i \overline{(f, g)} + \ g\ ^2$	$i$
$\ f-ig\ ^2 = \ f\ ^2 + i(f, g) - i \overline{(f, g)} + \ g\ ^2$	$-i$
$\ f-g\ ^2 = \ f\ ^2 - (f, g) - \overline{(f, g)} + \ g\ ^2$	$-1$

auxquelles on affecte les coefficients mis en évidence dans la colonne de droite.

La relation (52) résulte alors facilement de (53) et de (41) écrite successivement pour  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f+ig$  et  $f-ig$ . ■



## Preuve du théorème

26

- on établit d'abord la relation (44); elle résulte immédiatement de la relation (52) et du passage aux adjoints:

$$(f, g) = (T_0^* T_0 f, g) + (T_1^* T_1 f, g) \quad \forall f, g.$$

- Les relations (42) (43) et l'unitarité de la matrice  $U(\theta)$  introduite en (46) s'obtiennent en introduisant la transformée de Fourier et en utilisant la transformée de Fourier de  $D\varphi$  donnée à la relation (51). Il vient:

$$\begin{aligned} \widehat{T_0 f}(\theta) &= \widehat{D(F_0 f)}(\theta) = \frac{1}{2} (\widehat{F_0 f}(\theta) + \widehat{F_0 f}(\theta + \pi)) \\ &= \frac{1}{2} (q_0(\theta) \widehat{f}(\theta) + q_0(\theta + \pi) \widehat{f}(\theta + \pi)) \end{aligned}$$

qui est périodique de période  $\pi$ .

On a par ailleurs:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_k |f_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{f}(\theta)|^2 d\theta \\ (54) \quad \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (|\widehat{f}(\theta)|^2 + |\widehat{f}(\theta + \pi)|^2) d\theta \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\|T_0 f\|^2 + \|T_1 f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|\widehat{T_0 f}(\theta)|^2 + |\widehat{T_1 f}(\theta)|^2) d\theta \quad 25 \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} (q_0(\theta) \widehat{f}(\theta) + q_0(\theta+\pi) \widehat{f}(\theta+\pi)) \right|^2 d\theta \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} (q_1(\theta) \widehat{f}(\theta) + q_1(\theta+\pi) \widehat{f}(\theta+\pi)) \right|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} (|q_0(\theta)|^2 + |q_1(\theta)|^2) |\widehat{f}(\theta)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (|q_0(\theta+\pi)|^2 + |q_1(\theta+\pi)|^2) |\widehat{f}(\theta+\pi)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (q_0(\theta) \overline{q_0(\theta+\pi)} + q_1(\theta) \overline{q_1(\theta+\pi)}) \widehat{f}(\theta) \overline{\widehat{f}(\theta+\pi)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\overline{q_0(\theta)} q_0(\theta+\pi) + \overline{q_1(\theta)} q_1(\theta+\pi)) \widehat{f}(\theta+\pi) \overline{\widehat{f}(\theta)} \right\} d\theta
\end{aligned}$$

Compte tenu de la définition de filtres miroirs en quadrature et de la relation (41) en particulier on identifie les quatre termes de cette somme avec les termes analogues de la relation (54). Ceci est justifié en prenant dans un premier temps  $f$  à support dans  $]0, \pi[$  ( $\widehat{f}$  est périodique de période  $2\pi$  alors que  $T_0 f$  et  $T_1 f$  sont périodiques mais de période  $\pi$  seulement) puis  $\widehat{f}$  à support dans  $]\pi, 2\pi[$ , qui donnent

$$(55) \quad \frac{1}{2} (|q_0(\theta)|^2 + |q_1(\theta)|^2) = 1 \quad \theta \in ]0, \pi[$$

$$(56) \quad \frac{1}{2} (|q_0(\theta+\pi)|^2 + |q_1(\theta+\pi)|^2) = 1 \quad \theta \in ]0, \pi[$$

et ces relations expriment que les lignes de  $U(\theta)$  sont des vecteurs de norme unitaire.

Dans une seconde étape, les relations (55) et (56) étant connues, le choix  $\hat{f}(\theta+\pi) = \hat{f}(\theta)$  pour  $\theta \in ]0, \pi[$  entraîne que

$$\operatorname{Re} \{ q_0(\theta) \overline{q_0(\theta+\pi)} + q_1(\theta) \overline{q_1(\theta+\pi)} \} = 0$$

alors que le choix d'une transformée de Fourier  $\hat{f}$  telle que  $\hat{f}(\theta+\pi) = i \hat{f}(\theta)$  pour  $\theta \in ]0, \pi[$  a pour conséquence que

$$\operatorname{Im} \{ q_0(\theta) \overline{q_0(\theta+\pi)} + q_1(\theta) \overline{q_1(\theta+\pi)} \} = 0,$$

et jointe à la relation précédente, on en déduit

$$(57) \quad q_0(\theta) \overline{q_0(\theta+\pi)} + q_1(\theta) \overline{q_1(\theta+\pi)} = 0$$

qui exprime que les deux lignes de  $U(\theta)$  sont orthogonales. Il résulte de (55)(56)(57) que la matrice  $U(\theta)$  est unitaire.

- Mentionnons la relation (42) pour  $T_0$ , ie  $T_0 T_0^* = I$ . Notons que  $T_0^*$  opère de  $\ell^2(2\mathbb{Z})$  dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  et  $T_0$  opère de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  dans  $\ell^2(2\mathbb{Z})$ , donc  $T_0 T_0^*$  opère de  $\ell^2(2\mathbb{Z})$  dans lui-même. On remarque dans un premier temps qu'on a:

$$(58) \quad T_0^* f = \overline{q_0(\theta)} \hat{f}(\theta).$$

En effet, pour  $g \in \ell^2(\mathbb{Z})$  arbitraire, on a d'une part:

$$\begin{aligned}
(F_0^* f, g) &= (f, F_0 g) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(\theta) \overline{\widehat{F_0 g}(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(\theta) \overline{q_0(\theta) \widehat{g}(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{q_0(\theta)} \widehat{f}(\theta) \widehat{g}(\theta) d\theta
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$(F_0^* f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{F_0^* f}(\theta) \overline{\widehat{g}(\theta)} d\theta$$

ce qui établit la relation (58)

Dans un second temps  $D^*: l^2(2\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$   
 est tel que pour  $f \in l^2(2\mathbb{Z})$  arbitraire,  $\widehat{D^* f}$   
 est périodique de période  $\pi$ , car

$$(59) \quad \widehat{D^* f}(\theta) = \widehat{f}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-2ik\theta}$$

On peut maintenant calculer  $(T_0 T_0^* f, g)$   
 pour  $f$  et  $g$  arbitraires dans l'espace  $l^2(2\mathbb{Z})$ .

Il vient

$$\begin{aligned}
(T_0 T_0^* f, g) &= (T_0^* f, T_0^* g) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{q_0(\theta)} \widehat{D^* f}(\theta) q_0(\theta) \overline{\widehat{D^* g}(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \underbrace{(|q_0(\theta)|^2 + |q_0(\theta+\pi)|^2)}_2 \widehat{D^* f}(\theta) \overline{\widehat{D^* g}(\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{D^* f}(\theta) \overline{\widehat{D^* g}(\theta)} d\theta \quad \text{car la première colonne de } U(\theta) \text{ est de norme un.} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(\theta) \overline{\widehat{g}(\theta)} d\theta
\end{aligned}$$

qui établit que

$$(60) \quad (T_0 T_0^* f, g) = (f, g) \quad \forall f, g \in \ell^2(2\mathbb{Z})$$

et montre la propriété dans ce cas. La seconde relation de (42) résulte d'un calcul analogue et de

la norme unitaire de la seconde colonne de  $U(\theta)$

La relation (43) s'établit avec les mêmes techniques; on le fait explicitement à titre d'exercice:

$$\begin{aligned} (T_1 T_0^* f, g) &= (T_0^* f, T_1^* g) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{q_0(\theta)} \widehat{D^* f}(\theta) q_1(\theta) \widehat{D^* g}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\overline{q_0(\theta)} q_1(\theta) + \overline{q_0(\theta+\pi)} q_1(\theta+\pi)] \widehat{D^* f}(\theta) \widehat{D^* g}(\theta) d\theta \end{aligned}$$

car  $\widehat{D^* f}$  et  $\widehat{D^* g}$  sont périodiques de période  $\pi$

Comme la matrice  $U(\theta)$  est unitaire, ses deux colonnes sont orthogonales et le crochet de l'unité qui précède est nul. Donc  $T_1 T_0^* = 0$ .

- Les images de  $T_0^*$  et  $T_1^*$  sont orthogonales dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$  puisque la relation (43) entraîne

$$(61) \quad (T_0^* f, T_1^* g) = 0 \quad \forall f, g \in \ell^2(2\mathbb{Z}).$$

L'espace  $\ell^2(\mathbb{Z})$  est somme directe de ces deux images. Compte tenu de la relation (44), ces deux images forment bien une décomposition de  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

$$f = \underbrace{T_0^*(T_0 f)}_{\in \text{Im } T_0^*} + \underbrace{T_1^*(T_1 f)}_{\in \text{Im } T_1^*}$$

$\in \ell^2(\mathbb{Z})$

et cette décomposition est une somme directe car les deux images sont orthogonales. Tous les sous directs (quaternaires?) sont donc établis.

- Il reste la réciproque: si la matrice  $U(\theta)$  de la relation (46) est orthogonale, les filtres  $F_0$  et  $F_1$  sont des filtres miroirs en quadrature. Mais si  $U(\theta)$  est unitaire, les relations (55)(56) et (57) sont vraies car ses lignes forment une base orthonormée pour presque tout  $\theta$  appartenant à  $]0, \pi[$ . Par suite, le calcul de la somme des carrés des normes  $\|T_0 f\|^2 + \|T_1 f\|^2$  proposé à la page 25 se simplifie et redonne identiquement  $\|f\|^2$ , ce qui établit la relation (41), c'est à dire que les deux filtres sont miroirs en quadrature. Le théorème est établi. ■

#### 4) Exemples de filtres miroirs en quadrature

3.

##### ① Exemple (presque) trivial.

Le premier exemple consiste à choisir  $F_0 = \text{Identité}$  de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  et  $F_1$  le décalage de une unité dans  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

$$(62) \quad (F_1 x)_k = x_{k-1} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'opérateur  $T_0 = D_0 F_0$  est donc la restriction de  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  aux entiers pairs et  $T_1 = D_0 F_1$  fait apparaître les valeurs de la suite  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$  pour les indices impairs:

$$(63) \quad (T_1 x)_{2k} = x_{2k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le passage aux transformées de Fourier est immédiat:  $\alpha_k = \delta_{k,0}$  et  $q_0(\theta) \equiv 1$ , alors que  $\beta_k = \delta_{k,1}$  et  $q_1(\theta) = \exp(i\theta)$  compte tenu de (45). La matrice  $U(\theta)$  de la relation (46) s'écrit

$$U(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ 1 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$
 et elle est bien unitaire, donc l'identité et le "shift" de 1 vers la droite sont deux filtres miroirs en quadrature.

## ② Moyenne et différence

on pose

$$(64) \quad (F_0 x)_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_k + x_{k+1}); \quad (F_1 x)_k = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_k - x_{k+1})$$

et cette opération de moyenne - différence définit deux filtres miroirs en quadrature. On a en effet

$$q_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + e^{i\theta}); \quad q_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - e^{i\theta}), \text{ donc}$$

$$|q_0(\theta)|^2 + |q_0(\theta + \pi)|^2 = \frac{1}{2} (1 + 2\cos\theta + 1 + 1 + 2\cos(\theta + \pi) + 1) = 2$$

et la première colonne de (46) est de module unité; par ailleurs,

$$\begin{aligned} q_0(\theta) q_1(\theta) + q_0(\theta + \pi) q_1(\theta + \pi) &= \frac{1}{2} [(1 + e^{i\theta})(1 - e^{i\theta}) + (1 - e^{i\theta})(1 + e^{i\theta})] = \\ &= \frac{1}{2} (2i\sin\theta + 2i\sin(-\theta)) = 0 \end{aligned}$$

## ③ Filtrés idéaux.

on introduit des fonctions auxiliaires  $m_0$  et  $m_1(\theta)$  définies (classiquement ?!) par

$$(65) \quad m_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_0(\theta)}; \quad m_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{q_1(\theta)} e^{i\theta}$$

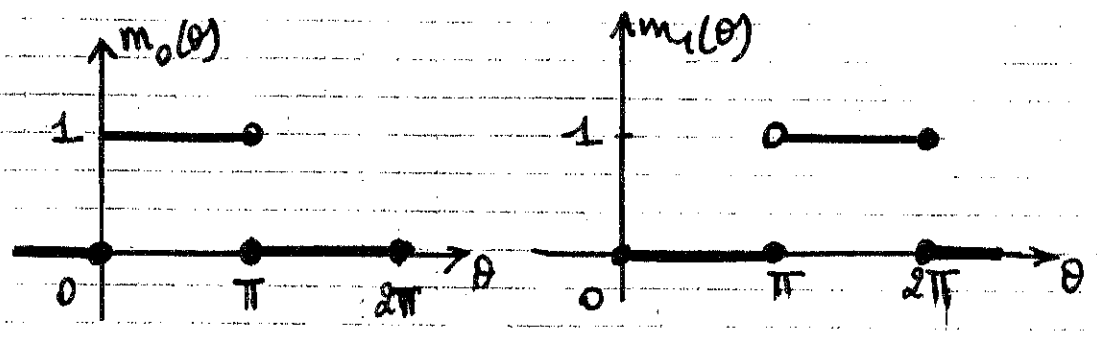
ou pose ici

$$(66) \quad m_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \theta < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < \theta < 2\pi \end{cases} \quad \text{2}\pi\text{-périodique}$$

et

$$(67) \quad m_1(\theta) = 1 - m_0.$$





Filtres idéaux en quadrature.

on voit facilement que  $|m_0(\theta)|^2 + |m_0(\theta+\pi)|^2 \equiv 1, \forall \theta \in \mathbb{R}$   
 et comme  $m_0(\theta) \in \mathbb{R}$ , on a:

$$U(\theta) = \begin{bmatrix} m_0(\theta) & m_0(\theta+\pi) e^{-i\theta} \\ m_0(\theta+\pi) & -m_0(\theta) e^{-i\theta} \end{bmatrix}$$

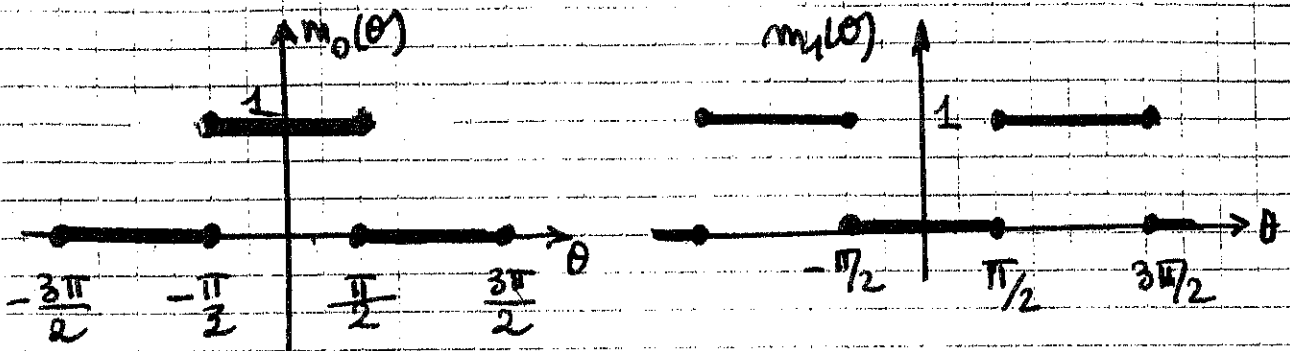
et  $U^*(\theta) = \begin{bmatrix} m_0(\theta) & m_0(\theta+\pi) \\ m_0(\theta+\pi) e^{i\theta} & -m_0(\theta) e^{i\theta} \end{bmatrix}$

donc  $U(\theta) U^*(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  pour tout  $\theta$ .

④ Filtres idéaux, seconde.

C'est le même couple de filtres que précédemment, mais  $m_0(\cdot)$  est décalée de  $\frac{\pi}{2}$  "vers la gauche", ce qui le transforme en filtre "passé bas". Les relations (65) et (67) sont inchangées, mais on remplace (66) par

(68)  $m_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\theta| < \pi/2 \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$   
 périodique de période  $2\pi$ .



Filtre "passe-bas"  $m_0(\theta)$  et son filtre miroir  
en quadrature  $m_1 = 1 - m_0$ .

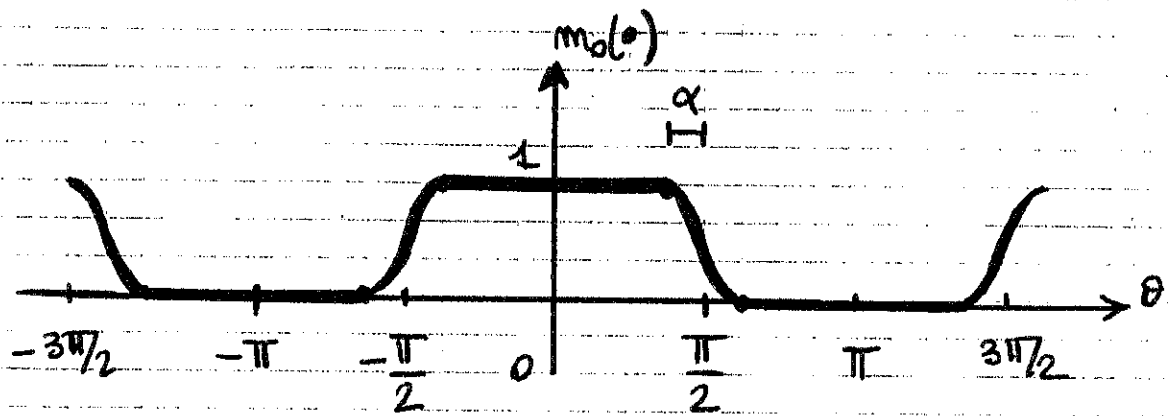
### ⑤ Filtre passe-bas régularisé

on introduit un paramètre  $\alpha$  de sorte que  $0 < \alpha < \pi/2$ , et  $m_0(\theta)$  fonction  $2\pi$ -périodique, paire, très régulière (de classe  $C^\infty$ ) de sorte que  $m_0(\theta) \equiv 1$  sur  $[-\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{\pi}{2} - \alpha]$  et  $m_0(\theta) \equiv 0$  sur  $[\frac{\pi}{2} + \alpha, \frac{3\pi}{2} - \alpha]$ , avec de plus la condition

(69) annulé évitiques:  $|m_0(\theta)|^2 + |m_0(\theta + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$ .

on introduit  $m_1(\theta)$  selon la relation (67) et les filtres miroirs  $F_0$  et  $F_1$  via leur transformée de Fourier  $q_0(\cdot)$  et  $q_1(\cdot)$ , ce à l'aide des relations (65). Les filtres  $F_0$  et  $F_1$  sont alors miroirs en quadrature, compte tenu de (69) et du calcul suivant:

$$q_0(\theta) \overline{q_1(\theta)} + q_0(\theta + \pi) \overline{q_1(\theta + \pi)} = 2m_0(\theta)m_0(\theta + \pi)(e^{-i\theta} + e^{-i(\theta + \pi)}) = 0.$$



Un filtre passe-bas "mirable" en quadrature vérifie la relation (69).

---

### 5) Tendance et fluctuation introduites par Mallat.

- on reprend le paragraphe 2 de ce chapitre, mais  $T_0$  est maintenant de la forme  $T_0 = DF_0$  avec  $F_0$  tel qu'il existe son "mirroir en quadrature"  $F_1$ , et leur fir  $T_1$ , satisfaisant donc aux relations (42) à (44).

Le signal  $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$  se décompose donc en tendance et fluctuation selon la définition naturelle

$$(70) \quad f = \underbrace{T_0^* T_0}_{f_0} f + \underbrace{T_1^* T_1}_{r_0} f$$

$f_0$ : tendance       $r_0$ : fluctuation

Compte tenu de (42)<sup>(43)</sup>, on a facilement

$$T_0^* T_0 f_0 = f_0; \quad T_1^* T_1 r_0 = r_0. \quad \text{Il est clair}$$

que la "tendance" est plus régulière que le signal de départ, donc on peut l'échantillonner avec un point sur deux, mais (et c'est là la véritable innovation des ondelettes), il en est de même de la fluctuation ! En effet, la connaissance de  $T_1 r_0 \in \ell^2(2\mathbb{Z})$  (donc échantillonné un point sur deux) suffit pour retrouver complètement la fluctuation  $r_0$ , puisque  $r_0 = T_1^*(T_1 r_0)$ .

- L'itération de filtres miroirs permet en cascade avec les fluctuations successives d'un signal  $f$ , accompagnées de la tendance sur laquelle elle est la plus grossière. on parle de l'algorithme en "arête de hareng" de S. Mallat.

on pose comme plus haut  $\Gamma_j = 2^{-j}\mathbb{Z}$  et il est clair que  $T_0$  (et  $T_1$ ) peuvent être étendus en opérateurs de  $\ell^2(\Gamma_j)$  vers  $\ell^2(\Gamma_{j-1})$ : pour  $f \in \ell^2(\Gamma_j)$ ,  $f^j$  défini par

$$(F1) \quad f_k^j = f(2^{-j}k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

appartient à  $\ell^2(\mathbb{Z})$ , donc  $T_0 f^j \in \ell^2(2\mathbb{Z})$ . on pose donc

$$(F2) \quad (T_0^j f)(2^{-j}2k) = (T_0 f^j)(2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Avec une approche fonctionnelle, on pose et introduit l'opérateur  $K$  de "k" compression

$$(73) \begin{cases} K: \ell^2(2\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ \ell^2(2\mathbb{Z}) \ni x \mapsto Kx \in \ell^2(\mathbb{Z}), (Kx)_k = x_{2k} \end{cases}$$

dont l'inverse  $K^{-1}$  est une "dilatation":

$$(74) \begin{cases} K^{-1}: \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z}) \\ \ell^2(\mathbb{Z}) \ni y \mapsto K^{-1}y \in \ell^2(2\mathbb{Z}), (K^{-1}y)_{2k} = y_k \end{cases}$$

à ne pas confondre avec la dilatation  $D$ !  
on a alors simplement, compte tenu de (71)

$$(75) \quad f^j = K^{-j} f \quad \text{si } f \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

L'opérateur  $T_0^j: \ell^2(\Gamma_j) \rightarrow \ell^2(\Gamma_{j-1})$  rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{T_0} & \ell^2(2\mathbb{Z}) \\ K^{-j} \uparrow & & \downarrow K^j \\ \ell^2(\Gamma_j) & \xrightarrow{T_0^j} & \ell^2(\Gamma_{j-1}) \end{array}$$

c'est à dire

$$(76) \quad T_0^j = K^j T_0 K^{-j}$$

et tout se résume à une simple conjugaison.

- L'arête de baryon s'explique de la façon suivante. On considère une grille finie  $\Gamma_N$ , avec  $N$  entier  $\gg 1$  "assez grand"; la grille "grossière"  $\Gamma_0$  est simplement la grille  $\mathbb{Z}$  des entiers.

Le signal initial  $f = f_0$  appartient à  $\ell^2(\Gamma_N)$ , donc doit être échantillonné sur la grille fine  $\Gamma_N$  ou le décompose en tendance et fluctuation :

$$(77) \begin{cases} \ell^2(\Gamma_N) \ni f_0 & = T_0^{N \times N} f_0 + T_1^{N \times N} f_0 \\ f_1 \in \ell^2(\Gamma_{N-1}), f_1 = T_0^N f_0, & r_1 = (T_1^N)^* T_1^N f_0 \end{cases}$$

qui sont donc échantillonnés à grâce à  $T_0^N$  et  $T_1^N$  sur la grille  $\Gamma_{N-1}$ .

$$(78) \ell^2(\Gamma_N) \ni f_0 \mapsto (T_0^N f_0, T_1^N f_0) \in \ell^2(\Gamma_{N-1}) \times \ell^2(\Gamma_{N-1})$$

et on recommence en remplaçant  $f_0$  par  $T_0^N f_0$  et  $\Gamma_N$  par  $\Gamma_{N-1}$ . De poche en poche, on a :

$$(79) \ell^2(\Gamma_{N-j}) \ni f_j = (T_0^{N-j})^* T_0^{N-j} f_j + (T_1^{N-j})^* T_1^{N-j} f_j \\ \equiv (T_0^{N-j})^* f_{j+1} + r_{j+1}$$

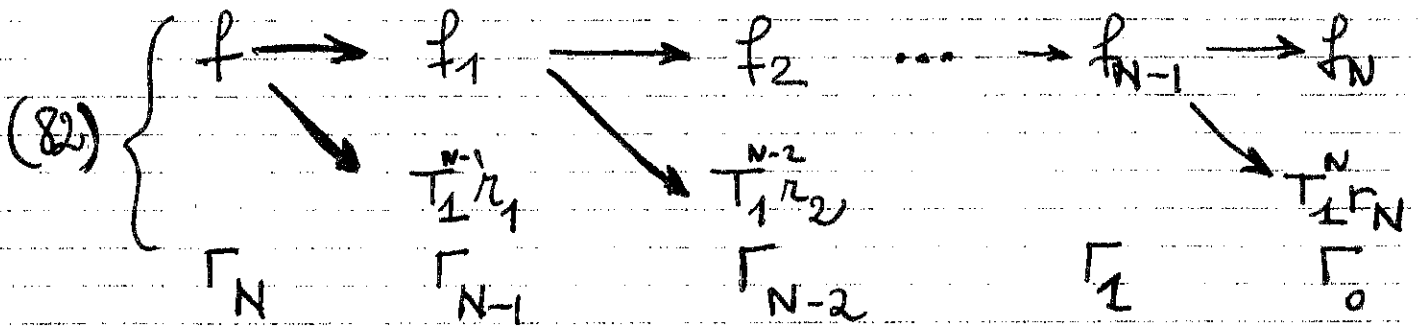
avec

$$(80) \underbrace{f_{j+1}}_{\in \ell^2(\Gamma_{N-j-1})} = T_0^{N-j} \underbrace{f_j}_{\in \ell^2(\Gamma_{N-j})}$$

L'algorithme se termine par la dernière grille :

$$(81) \underbrace{f_{N-1}}_{\in \ell^2(\Gamma_1) = \ell^2(\mathbb{Z}/2)} = (T_0^1)^* \underbrace{f_N}_{\in \ell^2(\Gamma_0)} + \underbrace{r_N}_{\in \ell^2(\Gamma_1)}$$

Le codage global de  $f$  est assuré par la suite  $(r_1, r_2, \dots, r_N, f_N)$  qui se stocke sur des quilles moitiées via la nouvelle suite  $(T_1^N r_1, T_1^{N-1} r_2, \dots, T_1^1 r_N, f_N)$ . On a alors le diagramme classique en dent de harang



Ce qui est nouveau par rapport au second paragraphe est que le stockage  $(T_1^N r_1, \dots, T_1^1 r_N, f_N)$  ne demande pas plus de mémoire que le stockage initial de  $f$ , contrairement aux décomptes proposés juste avant le paragraphe 3. En effet, grâce à l'emploi des  $T_1^j r_j$  à la place des  $r_j$ , on gagne un facteur deux dans le stockage de chaque fluctuation. Il vient, pour un signal initial  $f$  qui demande  $N=2^m$  "mots" :

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + 1 + 1 = N$$

comme besoin de stockage pour l'algorithme de fluctuation - tendance.

Le gain de stockage provient de la remarque simple qui consiste à dire que les fluctuations ne sont

"actives" que pour certaines échelles et sont nulles en général !

## 6) ondelettes et filtres miroirs en quadrature

- on fait le lien entre les algorithmes pyramidaux de Burt et Adelson, qui proposent un lissage  $R_j$  de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  en  $R_j f \in L^2(\Gamma_j)$  et les filtres miroirs en quadrature de Galand (1983), grâce à la décomposition orthogonale de  $L^2(\Gamma_j)$  en deux sous-espaces isomorphes à  $L^2(\Gamma_{j-1})$  qu'ils permettent.
- on démarre avec le "père" des ondelettes.

### Définition Père des ondelettes

C'est une fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  de sorte que la suite de fonctions  $\{\varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une famille orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$  :

$$(82) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-k) \overline{\varphi(x-l)} dx = \delta_{k,l}; k, l \in \mathbb{Z}$$

Nous invitons le lecteur à réfléchir à l'exercice suivant :

### Proposition Caractérisation du père

La propriété (82) équivaut à la relation suivante :



$$(83) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2n\pi)|^2 = 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

• A partir du père  $\varphi$ , on change d'échelle par compression - dilatation.

Définition Changement d'échelle.

Soit  $V_0 = \langle \varphi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z} \rangle$  l'espace engendré par la base hilbertienne précédente. Pour  $j \in \mathbb{Z}$ , on note  $V_j$  l'espace défini par

$$(84) \quad f \in V_j \iff (x \mapsto f(2^{-j}x)) \in V_0$$

c'est à dire

$$(85) \quad g(x) \in V_0 \iff g(2^j x) \in V_j.$$

Pour  $j$  croissant vers  $+\infty$ , l'espace  $V_j$  explore des détails de plus en plus fins alors que pour  $j$  tendant vers  $-\infty$ ,  $V_j$  donne une vision de plus en plus grossière (floue?). Une base de  $V_j$  est donnée comme au chapitre 7 (relation (42)) par les  $\varphi_{j,k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$(86) \quad \varphi_{j,k} = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k); \quad k, j \in \mathbb{Z}.$$

et l'on a

$$(87) \quad V_j = \langle \varphi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \rangle.$$

## Hypothèses d'embrèvement

$$(88) \text{ (i)} \quad \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \subset \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_{j+1}$$

$$(88) \text{ (ii)} \quad \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$$

$$(88) \text{ (iii)} \quad \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \text{ dense dans } L^2(\mathbb{R})$$

- L'hypothèse (88)(i) est tout à fait non triviale et fonde (quasiment) l'approche de l'analyse par ondelettes. Regardons en particulier ce que signifie l'hypothèse  $V_0 \subset V_1$ . En particulier,  $\varphi \in V_1$ , donc doit se décomposer sur la base des  $\{\varphi_{1,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ ; il existe donc une famille  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de sorte que

$$(89) \text{ (i)} \quad \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \delta_k \varphi(2x-k)$$

$$(89) \text{ (ii)} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\delta_k|^2 = 1$$

puisque  $\varphi$  et les  $\sqrt{2} \varphi(2x-k)$  sont orthonormés.

en note que (89) est satisfait par la base de

Haar, en  $\varphi(x) = \chi_{]0,1[}(x)$ ,  $\varphi_{1,0} = \sqrt{2} \chi_{]0,1/2[}$   
 $\varphi_{1,1} = \sqrt{2} \chi_{]1/2,1[}(x)$ , donc

$$(90) \quad \chi_{]0,1[} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi_{1,1}$$

mais pour une famille orthogonale de  $L^2(\mathbb{R})$  satisfaisant (82) ou (83), ce n'est pas en général le cas.

- Une fois les différentes échelles bien emboîtées (hypothèse (88)(i) ou (89)), on peut s'intéresser aux fluctuations, c'est à dire aux détails à une échelle donnée. On définit l'espace  $W_j$  comme l'orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$  :

$$(91) \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j ; \quad V_j \perp W_j$$

et l'on suppose que, comme pour les  $V_j$ , tous les  $W_j$  sont engendrés par une même fonction, qu'on nomme la mère des ondelettes.

Hypothèse Mère des ondelettes

Il existe une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  de sorte que

$$(92) \quad \{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ est une base de } W_0$$

Alors  $\psi_{j,k}$  définie comme à la relation (83) par

$$(93) \quad \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) ; k, j \in \mathbb{Z}$$

est une base orthogonale de  $W_j$

$$(94) \quad W_j = \langle \psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z} \rangle$$

on peut démontrer (théorème d'Albert Cohen ?) qu'alors la famille  $\{\psi_{j,k}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base

de  $L^2(\mathbb{R})$ , résultat qui généralise le résultat  
 du chapitre précédent pour l'ondelette de

Haar, où  $\psi(x) = \chi_{[0, 1/2]} - \chi_{[1/2, 1]}$ .

Nous retenons qu'à une échelle donnée  $j$ ,  
 les détails (présents à l'échelle plus fine  $(j+1)$   
 mais orthogonaux à l'échelle  $j$ , i.e. l'espace  
 $V_j$ ) sont combinaisons linéaires des fluctuations  
 élémentaires.

- Nous  définissons  maintenant des filtres miroirs  
 en quadrature pour approcher  $L^2(\mathbb{R})$  par la  
 famille des  $L^2(\Gamma_j)$ , avec  $j \in \mathbb{Z}$ . Nous avons  
 besoin d'une hypothèse simplificatrice pour  
 l'exposé :

(95)  $\varphi(\cdot)$  est paire.

De cette façon, la fonction  $\varphi_{j,k}$  est centrée  
 autour du point  $k2^{-j}$  qui, pour  $k$  variant  
 dans  $\mathbb{Z}$ , est le point "courant" de la grille  
 $\Gamma_j$ . Une fonction  $f_j \in V_j$  se développe sur la  
 base des  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  :

$$(96) \quad f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \varphi_{j,k}$$

et la famille  $(f_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est donc tout naturelle-  
 ment une suite dont le carré forme  
 une série convergente, donc qui appartient à  $L^2(\Gamma_j)$ .

Le procédé précédent permet d'identifier les espaces  $V_j$  et  $L^2(\Gamma_j)$ . De plus, cette identification est une isométrie car on tire des relations (82), (86) et (96) que l'on a :

$$(97) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_{j,k}|^2.$$

on peut donc définir  $T_0 : L^2(\Gamma_{j+1}) \rightarrow L^2(\Gamma_j)$  (on garde la notation  $T_0$  à la place de  $T_0^j$ , plus rigoureuse mais moins légère, il est alors entendu que la relation (76) peut alors s'écrire sous la forme d'une commutation :  $T_0 K = K T_0$ ) à l'aide de son adjoint  $T_0^* : L^2(\Gamma_j) \rightarrow L^2(\Gamma_{j+1})$  à l'aide de l'identification précédente et de la décomposition orthogonale (91) : à la suite  $(f_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  appartenant à  $L^2(\Gamma_j)$ , on associe d'abord  $f_j$  dans  $V_j$  à l'aide de la relation (96) et compte tenu de l'inclusion  $V_j \subset V_{j+1}$ , cette fonction se décompose encore sous la forme d'une combinaison linéaire des  $(\varphi_{j+1, \ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$  :

$$(98) \quad f_j = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} f_{j+1, \ell} \varphi_{j+1, \ell}$$

Les coefficients  $(f_{j+1, \ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$  forment donc une suite de carrés unités. On a ainsi défini comme l'opérateur, qui à  $(f_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  associe  $(f_{j+1, \ell})_{\ell \in \mathbb{Z}}$ , compte tenu des relations (96) et (98).

On peut expliciter les calculs précédents.  
La relation (89) peut s'écrire également

$$(99) \quad \varphi_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_l \varphi_{j+1, 2k+l}$$

compte tenu du calcul suivant:

$$\begin{aligned} \varphi_{j,k} &= 2^{j/2} \varphi(2^j x - k) && \text{cf (88)} \\ &= 2^{j/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \gamma_l \varphi(2(2^j x - k) - l) && \text{cf (89)(i)} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{2^{j+1}}{2^{j/2}} \gamma_l \varphi(2^{j+1} x - (2k+l)) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_l \varphi_{j+1, 2k+l} && \text{cf (86)}. \end{aligned}$$

on en déduit que la relation (96) prend également la forme

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \gamma_l \varphi_{j+1, 2k+l},$$

c'est à dire

$$f_j = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_{m-2k} f_{j,k} \varphi_{j+1, m}$$

ce qui, compte-tenu de la relation (98), permet d'expliciter l'algèbre linéaire de  $T_0^*$ :

$$(100) \quad f_{j+1, l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_{l-2k} f_{j, k}.$$

- La définition du second filtre  $T_1: \ell^2(\Gamma_j) \rightarrow \ell^2(\Gamma_j)$  est tout à fait analogue; on commence par considérer une suite  $(f_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  dans  $\ell^2(\Gamma_j)$ , qu'on développe cette fois sur les mères à l'échelle "j" (cf (93)):

$$(101) \quad g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \psi_{j,k}$$

ou dispose donc de  $g \in W_j \subset V_{j+1} \subset L^2(\mathbb{R})$  qu'on peut réprojeter sur la base des  $(\varphi_{j+1,l})_{l \in \mathbb{Z}}$ . De façon précise, l'écriture de  $W_0 \subset V_1$  prend la forme

$$(102) \quad \psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \delta_k \varphi(2x-k)$$

avec  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\delta_k|^2 = 1$ , et par un calcul analogue à celui qui aboutit à la relation (100), on trouve

$$(103) \quad g = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{l-2k} f_{j,k} \right\} \varphi_{j+1,l}$$

et le filtre  $T_1^*: \ell^2(\Gamma_j) \ni f_{j,k} \mapsto \tilde{f}_{j+1,l} \in \ell^2(\Gamma_{j+1})$  suit donc l'algèbre

$$(104) \quad \tilde{f}_{j+1,l} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{l-2k} f_{j,k}$$

- Les deux filtres  $T_0$  et  $T_1$  sont miroirs en quadrature; cela découle directement de la décomposition orthogonale (91) et de la définition (41).

• on peut traduire dans le langage de départ les relations (100) et (104) et relier les coefficients  $\gamma$  et  $\delta$  avec la famille  $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  qui caractérise ce filtre  $S_0$  (relations (12) et (15)). En effet, pour  $(v_{2k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(2\mathbb{Z})$ , on peut poser  $f_{j,k} = v_{2k}$  donc

$$(T_0^* v)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_{k-2j} v_{2j}$$

$$(T_1^* v)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{k-2j} v_{2j}$$

relations qui entraînent par dualité

$$(105) \quad (T_0 u)_{2k} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_{j-2k} v_j$$

En effet, pour  $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$  et  $v \in \ell^2(2\mathbb{Z})$  arbitraires, on a

$$\begin{aligned} (T_0^* v, u) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k (T_0^* v)_{2k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_{k-2j} v_{2j} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_{2j} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_{k-2j} u_k \right) = (v, T_0 u). \end{aligned}$$

Au paragraphe 1 (relation (12)), un opérateur  $S_0: \ell^2(2\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(2\mathbb{Z})$  a été construit à partir d'une fonction  $\varphi$  vérifiant la relation (15). À une permutation d'indices près, les relations (12) et (105) sont identiques et  $T_0$  et  $S_0$  ont l'air identiques; par contre, le simple fait d'une comparaison de (15) et (89)(i)(ii) montre que le filtre  $S_0$  n'est pas unitaire. On doit simplement



poser

$$(106) \quad \gamma_k = \sqrt{2} \overline{d_{-k}}$$

pour identifier complètement les deux approches.

Il est intéressant de noter que la relation (17) entre les transformées de Fourier reste vraie, mais que la fonction  $m_0(\omega)$  est définie par

$$(107) \quad m_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma_j e^{-i\omega j}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

## 7) Ondelettes de Daubechies

Il s'agit du cas où la somme (89)(i) (ou de façon analogue la somme (107)) est finie. C'est bien technique (comme pour l'ondelette de Burt et Adelson), l'ondelette en a support fini et est de plus en plus régulière au fur et à mesure que ce support croît. Le lecteur est invité à lire l'ouvrage d'Ingrid Daubechies "Ten lectures on wavelets", notes d'un cours donné en 1991 et publié par la société américaine de mathématiques appliquées et industrielles (SIAM).

Verailles  
Dubois, 7 juillet 1997.