Traitement du Signal

Leçon 07

Introduction aux ondelettes

- Introduction
- Rappels sur les espaces de Hilbert
- Le système de Haar (1909)

François Dubois

Paris, 1997

Introduction aux ondelettes

1) Introduction

- Nous avons vu (chapitre 1) que la formule d'inversion de Fourier permet de représenter une fonction (moyennant des hypothèses ad hoc, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$) sous la forme

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} \, d\omega$$

on peut considérer la représentation (1) comme une "décomposition infinie" de la fonction $f(\cdot)$ sur la "base" des fonctions exponentielles $e_\omega(\cdot)$

$$(2) \qquad e_\omega(x) = e^{i\omega x} \qquad \forall \omega, x \in \mathbb{R}$$

c'est à dire lire la représentation (1) sous la forme

$$(3) \qquad f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \, e_\omega(\cdot) \, d\omega$$

Le principal inconvénient de ce point de vue est qu'il n'est pas immédiat de lui donner un sens rigoureux mathématiquement. En effet, on sait manipuler des espaces vectoriels de dimension finie, où au lieu de (3), on a une représentation de type

$$(4) \qquad f = \sum_{j=1}^{N} f_j \, e_j \, .$$

Le cadre des espaces de Hilbert permet de donner un sens à des sommes de type (4) mais avec $N = +\infty$:

$$(5) \qquad f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, e_j$$

et dans ce cas (avec des conditions supplémentaires d'orthogonalité), la famille $(e_j)_{j \geq 1}$ est appelée base hilbertienne de l'espace, noté classiquement H.

• Nous disposons de deux exemples vus dans le chapitre sur les signaux discrets d'espaces de Hilbert qui se décomposent selon la relation (5) : l'espace $l^2(\mathbb{Z})$ des suites numériques dont la série associée est de carré intégrable

$$(6) \qquad u \in l^2(\mathbb{Z}) \iff u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 < \infty,$$

et l'espace $L^2(0,2\pi)$ des fonctions f (2π périodiques) et de carré intégrable (ou sommable) :

$$(7) \qquad f \in L^2(0,2\pi) \iff f = \{ f(x), x \in]0, 2\pi[\}, \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Une fonction $f \in L^2(0,2\pi)$ se développe à l'aide des $\sin kx$, $\cos kx$ ($k \in \mathbb{Z}$) ou des exponentielles complexes :

$$(8) \qquad f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \, e^{ikx}$$

ou

$$(9) \qquad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \, e_k$$

avec e_k défini en (2). La relation (9) est identique à

(5), aux notations près et à la numérotation des éléments de la base, ce qui ne constitue pas un problème car on peut numéroter les entiers $k \in \mathbb{Z}$ par les entiers $j \geq 1$ à l'aide de la relation

(10) $$k(j) = \frac{j}{2} \quad j \text{ pair} ; \; -\frac{j-1}{2} \quad j \text{ impair} .$$

L'écriture (9) est de loin préférable à l'écriture (8). En effet, l'écriture (8) suppose implicitement que pour tout $x \in [0, 2\pi]$, le membre de droite converge et sa somme pour $k \in \mathbb{Z}$ est égale au nombre $f(x)$, ce qui devient faux lorsque $f(\cdot)$ n'est pas continue. L'écriture (9) est à prendre au sens des bases hilbertiennes, c'est à dire que la suite $\sum_{|k| \leq N} b_k e_k$ converge pour $N \to \infty$ dans $L^2(0, 2\pi)$ vers f :

(11) $$\lim_{N \to \infty} \int_0^{2\pi} \Big| f - \sum_{|k| \leq N} b_k e_k \Big|^2 dx = 0 .$$

c'est à dire au sens des <u>moindres carrés</u>.

- Le grand intérêt des bases d'ondelettes est qu'elles proposent une représentation de $f \in L^2(\mathbb{R})$ de type "série de Fourier" analogue à (9)

(12) $$f = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} b_{j,k} \Psi_{j,k}$$

donc relevable des espaces de Hilbert classiques, ce que ne permet pas la formule (3) d'inversion de Fourier, où l'on a une "somme continue".

2) Rappels sur les espaces de Hilbert

- On note H un espace vectoriel sur le corps k des nombres réels ou des nombres complexes. On suppose qu'un produit scalaire (produit scalaire hermitien si $k = \mathbb{C}$) est défini sur H :

(13) $$H \times H \ni (u,v) \mapsto (u,v) \in k \, (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$

Pour éviter de le noter (u,v) comme le couple (u,v), le produit scalaire est parfois noté $(u|v)$ ou $\langle u,v\rangle$.
Un produit scalaire est bilinéaire (sesquilinéaire si $k = \mathbb{C}$)

(14) $$(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u,v) + \mu(v,w)$$
(15) $$(u, \lambda v + \mu w) = \overline{\lambda}(u,v) + \overline{\mu}(u,w)$$

et symétrique (hermitien si $k = \mathbb{C}$) :

(16) $$(v,u) = \overline{(u,v)} \, .$$

Il définit une norme associée $\|u\|$

(17) $$\|u\| = \sqrt{(u,u)} \quad , (u,u) \geqslant 0$$

(18) $$\|u\| = 0 \iff u = 0$$
(19) $$\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$$
(20) $$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \, .$$

- On dispose également de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

(21) $$|(u,v)| \leqslant \|u\| \, \|v\| \, .$$

Dans le cas où H est un espace de Hilbert complexe, l'inégalité (21) se démontre en posant $(u,v)=|(u,v)|e^{i\theta}$ et en écrivant que $\|u+\rho e^{i\theta}v\|^2$ est positif, avec $\rho\in\mathbb{R}$. Il vient $\|u\|^2+2\rho\,|(u,v)|+\rho^2\|v\|^2\geqslant 0$ et l'inégalité (21) exprime que le discriminant du trinome en ρ est négatif ou nul.

- <u>Définition</u> Un espace de Hilbert H est un espace muni d'un produit scalaire $(\,,\,)$ qui en fait un espace vectoriel normé complet.

Dans un espace de Hilbert, toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

(22) $\quad \left(\|x_n-x_m\|\to 0 \text{ si } n,m\to\infty\right)\Rightarrow\left(\exists x\in H,\ x_n\to x\right)$

La convergence s'effectue "fortement", c'est à dire pour la topologie associée à la norme $\|\ \|$.

- On a la relation de <u>Pythagore</u> si u et v sont orthogonaux :

(23) $\quad (u,v)=0 \quad\Rightarrow\quad \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

et de façon plus générale si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'éléments de H deux à deux orthogonaux, la série $\sum_0^\infty u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_0^\infty\|u_n\|^2$ converge.

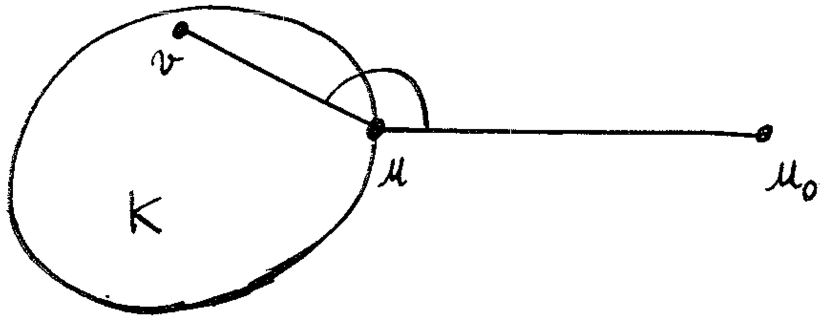
(Th) Projection sur un convexe.

Soit H un espace de Hilbert, K une partie non vide, convexe (c'est à dire $u, v \in K$ entraîne que le segment $[u, v] = \{ \theta u + (1-\theta) v \ , \theta \in [0,1] \}$ est inclus dans K) et fermée ($u_n \in K$ et u_n converge vers u entraînent que u appartient à K). Alors pour tout $u_0 \in H$, il existe un unique point $u \in K$ dont la distance à u_0 est minimum :

(24) $\quad u \in K, \qquad \| u - u_0 \| \leqslant \| v - u_0 \| \quad \forall v \in K$

De plus, u est l'unique point de K qui vérifie l'inégalité

(25) $\quad (u - u_0 , u - v) \leqslant 0 \quad \forall v \in K$



Projection du point u_0 sur le convexe K

- L'angle $(u_0 - u, v - u)$ est obtus pour tout $v \in K$. On note $P_K u_0 = u$ la projection de u_0 sur le convexe K. Elle est "contractante" :

(26) $\quad \| P_K u - P_K v \| \leqslant \| u - v \| \quad \forall u, v \in H.$

- Un corollaire du théorème précédent est qu'un sous-espace vectoriel fermé F de H admet un <u>supplémentaire orthogonal</u> $F^\perp$ qui permet de décomposer tout $u \in H$ sous la forme

$$(27) \qquad u = v + w, \quad v \in F, w \in F^\perp, \quad (v, w) = 0.$$

En effet, F est non vide (il contient 0), fermé par hypothèse et convexe car pour $(u,v) \in F$, la combinaison convexe $\theta u + (1-\theta)v$ est également une combinaison linéaire des vecteurs u et v, donc appartient à F. Donc on dispose du projecteur P_F, qui est un opérateur linéaire dans ce cas, et il est facile de voir que la relation (25) entraîne $(u - P_F u, w) = 0 \quad \forall u \in H, \forall w \in F$.

$\{ (u - P_F u, v - P_F u) \leq 0$ pour tout $v \in F$, donc pour tout $w = v - P_F u$ car $P_F u \in F$: $(u - P_F u, w) \leq 0$ $\forall w \in F$. Mais en changeant w en $-w$, l'inégalité inverse est encore vraie et le produit scalaire $(u - P_F u, v)$ est nul $\}$.

La relation (27) est une simple réécriture de l'identité $u = (P_F u) + (u - P_F u)$.

- on tire aussi un critère pratique pour vérifier qu'un sous-espace F de H est <u>dense</u>, ie $\overline{F} = H$ (tout $u \in H$ est arbitrairement proche d'un élément $v \in F$). Il suffit de vérifier que l'orthogonal de $F = \{ u \in H, (u,v) = 0 \ \forall v \in F \}$ est réduit à $\{0\}$.

- Théorème de Riesz. Représentation des formes linéaires continues

Soit H un espace de Hilbert. A tout $h \in H$, on peut faire correspondre la forme linéaire continue φ_h définie par $\varphi_h(u) = (u, h)$. Réciproquement, pour toute forme linéaire continue φ sur H

(28) φ linéaire $H \to k$, $\exists C > 0, |\varphi(u)| \leq C\|u\| \ \forall u \in H$
il existe un unique $h \in H$ de sorte que $\varphi = \varphi_h$

La preuve consiste à remarquer que le noyau de φ $= \{u \in H, \varphi(u) = 0\}$ est un sous-espace fermé de H différent de H si φ n'est pas identiquement nulle. On note g un élément de son orthogonal et le scalaire $\lambda = \varphi(g)$ est non nul on a alors la décomposition $u = \frac{\varphi(u)}{\lambda} g + \left(u - \frac{\varphi(u)}{\lambda} g\right)$. L'image par φ du second terme est nulle et son produit scalaire avec g est donc nul en conséquence car $g \in (\ker \varphi)^\perp$. Donc $(u, g) = \frac{\varphi(u)}{\varphi(g)} \|g\|^2$ et il suffit de poser $h = \overline{\varphi(g)} \frac{g}{\|g\|^2}$ pour obtenir le résultat désiré. ∎

- L'application $H \ni h \mapsto \varphi_h \in H' = \mathcal{L}(H, k)$ est additive et (anti) linéaire si le corps k de référence est le corps des complexes [$\varphi_{h+g} = \varphi_h + \varphi_g$, $\varphi_{\lambda h} = \bar{\lambda} \varphi_h$]. Elle permet d'identifier H à son dual H'; cette identification dépend du produit scalaire (u, v) qui opère sur H.

- Un espace de Hilbert est séparable si il admet une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dense. C'est le cas en prati. que pour tous les espaces de Hilbert rencontrés dans la suite.

- <u>Définition</u> <u>Base hilbertienne.</u>

Dans l'espace de Hilbert H séparable, une base hilbertienne (ou orthonormée) de H) est une suite finie ou infinie $(e_j)_{j\geqslant 1}$ dont les combinaisons linéaires finies $\sum_{j=1}^{N} u_j e_j$ approchent arbitrairement près tout $u\in H$ (on dit que (e_j) est <u>totale</u>)

(29) $\forall u\in H, \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \exists u_j\in\mathbb{C}, \|u-\sum_{j=1}^{N} u_j e_j\|<\varepsilon$

et formée d'éléments de H unitaires et deux à deux orthogonaux :

(30) $(e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

L'intérêt des bases hilbertiennes est le résultat suivant :

<u>Théorème</u> Tout espace de Hilbert séparable possède des bases hilbertiennes.

- Le premier exemple d'espace de Hilbert non trivial, c'est à dire de dimension infinie est l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ des suites de carré intégrable

(31) $$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < \infty$$

Le produit scalaire associé est défini par

(32) $$(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$$

et $u_n \overline{v_n}$ est le terme général d'une série absolument convergente puisque $|u_n \overline{v_n}| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$ ce qui donne un sens au membre de droite de (32). Une base orthonormée de $\ell^2(\mathbb{N})$ est la famille $(e^j)_{j \in \mathbb{N}}$ des suites définies par

(33) $$(e^j)_n = \delta_{jn} \qquad \forall j, n \in \mathbb{N}$$

- Le second exemple d'espace de Hilbert est $L^2(\Omega)$, où Ω est un ouvert fixé de $\mathbb{R}^N$.

(34) $$f \in L^2(\Omega) \iff \int_\Omega |f|^2 \, dx < \infty$$

(35) $$(f, g) = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

On a le résultat de densité suivant :

<u>Théorème</u>

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $\underline{\mathcal{C}_0(\Omega)}$ des fonctions continues $\Omega \to \mathbb{R}$ à support $\overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$ compact dans Ω (ie fermé et borné dans Ω) est <u>dense</u> dans $L^2(\Omega)$.

Toute fonction $f \in L^2$ s'approche à $\varepsilon > 0$ près (arbitraire) en moyenne quadratique par g continue et à support compact :

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\forall f \in L^2(\Omega),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists K \text{ compact} \subset \Omega,\ \exists g \in \mathcal{C}(K), \\ &(g \in \mathcal{C}(\Omega) \text{ nulle hors de } K),\ \| f - g \| < \varepsilon \end{aligned}$$

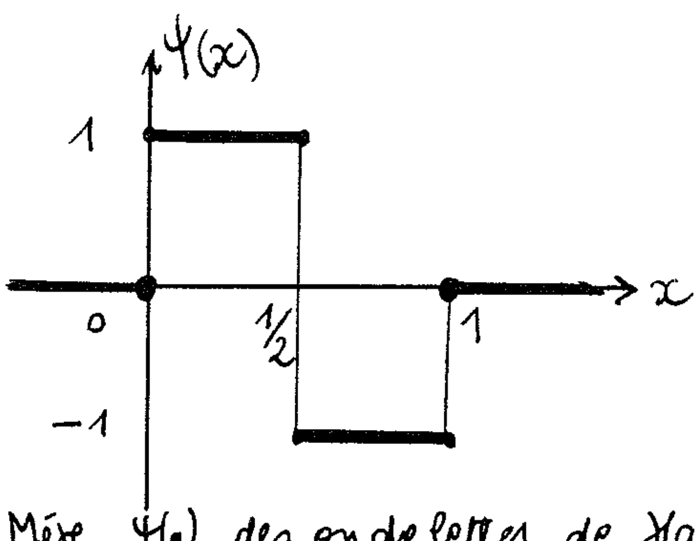
3) Le système de Haar (1909)

- Nous allons construire une base orthonormée $\psi_{j,k}$ de $L^2(\mathbb{R})$, paramétrée par les entiers $j \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$, qui permette de décomposer une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ arbitraire à l'aide de la relation (12) et

$$(37) \qquad f_{j,k} = (f, \psi_{j,k})$$

On note $\psi(x)$ l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valant $+1$ pour x compris entre 0 et $1/2$, -1 pour x compris entre $1/2$ et 1, et zéro sinon :

$$(38) \qquad \psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < 1/2 \\ +1 & \text{si } 1/2 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$



Mère $\psi(\cdot)$ des ondelettes de Haar.

Si $\varphi(x)$ désigne la fonction caractéristique du segment $[0,1]$:

(39) $$\varphi(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

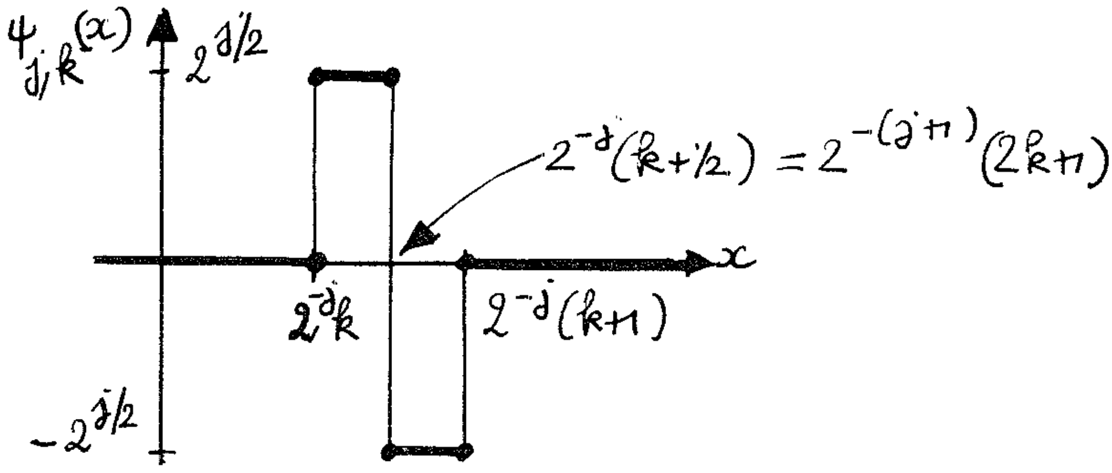
on remarque qu'(à un ensemble de mesure nulle près) on a :

(40) $$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1).$$

- La base $\psi_{j,k}$ est définie pour j et k entiers ($j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$) par la relation

(41) $$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, \psi(2^j x - k)$$

Le support de $\psi_{j,k}$ est l'intervalle $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ puisque ψ est non nulle sur $[0,1]$, et que $0 \leq 2^j x - k \leq 1$ équivaut à $2^{-j}k \leq x \leq 2^{-j}(k+1)$. L'indice j est l'indice d'échelle qui indique la taille des fenêtres ouvertes sur l'axe réel ; $j \downarrow -\infty$ correspond à des échelles de plus en plus grossière alors que $j \uparrow \infty$ correspond à des échelles de plus en plus fines. L'indice j est relatif au fait que $\mathbb{R}$ est invariant par les multiplications par 2^{-j} : $2^{-j}\mathbb{R} = \mathbb{R}$. L'indice k est l'indice de translation ; une fois la taille de la loupe fixée, on doit pour mettre en évidence un intervalle de longueur 2^{-j} arbitraire, déplacer la loupe d'un nombre entier de fois cette échelle. L'indice k renvoie à l'invariance de $\mathbb{R}$ par addition : $\mathbb{R} + k\,2^{-j} = \mathbb{R}$



Fonction ψ_{jk} dilatée translatée à partir de ψ

• **Proposition** La famille $(\psi_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},\, k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée

$$(42) \quad (\psi_{j,k}, \psi_{j',k'}) = \delta_{jj'}\ \delta_{kk'} \qquad j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$$

La preuve se fait de proche en proche en distinguant plusieurs cas

1) si $j = j'$ et $k = k'$, on a simplement à calculer l'intégrale du carré de $\psi_{j,k}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{j,k}|^2 dx = \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} 2^j\, dx = 2^j\, 2^{-j} = 1.$$

2) si $j = j'$ et $k \neq k'$, on est à la même échelle mais pour deux translatés différents. Il est alors clair que le support $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ de $\psi_{j,k}$ ne rencontre le support $[2^{-j}k', 2^{-j}(k'+1)]$ de $\psi_{j,k'}$ qu'en au plus un point et qu'en conséquence le produit $\psi_{jk}\, \psi_{j,k'}$ est nul presque partout, ce qui établit la relation (42) dans ce cas

3) Si $j \neq j'$, supposons $j < j'$ pour fixer les idées. Supposons que les supports de $\psi_{j,k}$ et $\psi_{j',k'}$ ont une intersection non triviale alors le support de $\psi_{j',k'}$ est nécessairement inclus dans celui de $\psi_{j,k}$ car dès qu'on change d'échelle, le support de $\psi_{j,k}$ s'obtient en divisant en deux le support d'une $\psi_{j-1,\ell}$. De plus, le support de $\psi_{j',k'}$ est nécessairement inclus dans un intervalle où $\psi_{j,k}$ est constante ; $2^{-j'} = 2^{-(j'-j)}\, 2^{-j}$: le support de $\psi_{j',k'}$ a une mesure qui est un sous multiple de $1/2$ de la mesure du support de ψ_{jk} on a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{jk}\, \psi_{j',k'}\, dx = \pm \int_{\mathbb{R}} \psi_{j',k'} = 0$$

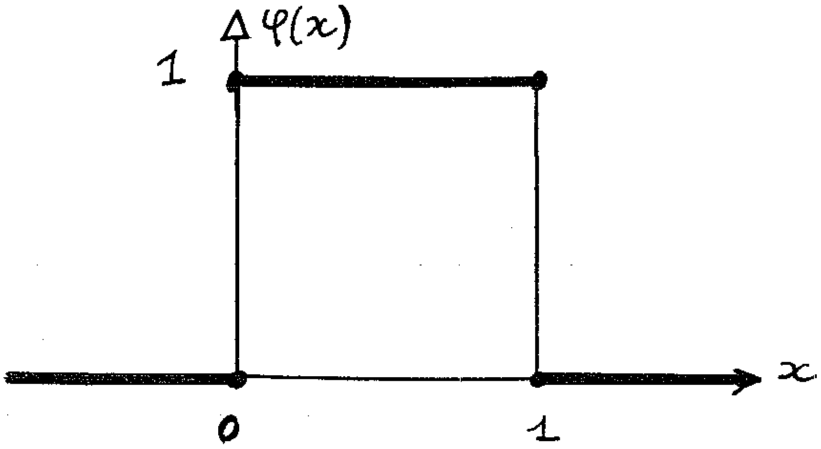
La proposition est donc demontreé. ■

- Le fait d'avoir une famille orthonormée n'entraî ne pas nécessairement qu'on dispose d'une base hilbertienne. Le fait que la famille $\psi_{j,k}$ $(k, j \in \mathbb{Z})$ est totale n'est pas immédiat et va résulter d'une étude assez longue.

- Si $\varphi(\cdot)$ est la fonction définie à la relation (39), dite <u>fonction d'échelle</u> du système de Haar, on l'étend à toute échelle 2^{-j} et à tout point multiple de cette échelle de façon analogue à la relation (41) on pose

$$(42) \qquad \varphi_{j,k} = 2^{j/2}\, \varphi(2^j x - k) \qquad j, k \in \mathbb{Z}$$

et on appelle V_j le sous-espace engendré par les $\varphi_{j,k}$ à j fixé, k parcourant $\mathbb{Z}$:



Fonction d'échelle (père des ondelettes) du système de Haar

$$(43) \qquad V_j = \langle \varphi_{j,k} \,,\ k \in \mathbb{Z} \rangle \qquad j \in \mathbb{Z} \text{ fixé}$$

Il est facile de voir que V_j est le sous espace de $L^2(\mathbb{R})$ formé des fonctions en escalier, constantes sur les intervalles $]\,2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)\,[$. De plus, la famille $\{\varphi_{j,k}\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_j.

L'espace V_j est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$ (la limite de fonctions en escaliers constantes dans les intervalles $]2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$ vérifie encore la même propriété) et l'on peut donc définir le projecteur orthogonal P_j de $L^2(\mathbb{R})$ dans V_j :

$$(44) \qquad L^2(\mathbb{R}) \ni f \longmapsto P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j,k})\, \varphi_{j,k} \in V_j$$

Proposition Soit $\mu_{j,k}$ la moyenne de f sur l'intervalle $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ on a alors

$$(45) \qquad P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-j/2} \mu_{j,k}\, \varphi_{j,k}$$

- La moyenne $\mu_{j,k}$ de f s'écrit de deux façons :

$$(46) \qquad \mu_{j,k} = 2^j \int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} f(x)\, dx = 2^{j/2} (f, \varphi_{jk})$$

- Il faut d'abord vérifier que $\mu_{j,k}$ a bien un sens pour $f \in L^2(\mathbb{R})$; mais pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$|\mu_{j,k}|^2 \leqslant 2^{2j}\left(\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} |f|^2\, dx\right)\left(\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} 1\, dx\right)$$

$$\leqslant 2^{j}\left(\int_{2^{-j}k}^{2^{-j}(k+1)} |f|^2 dx\right)$$

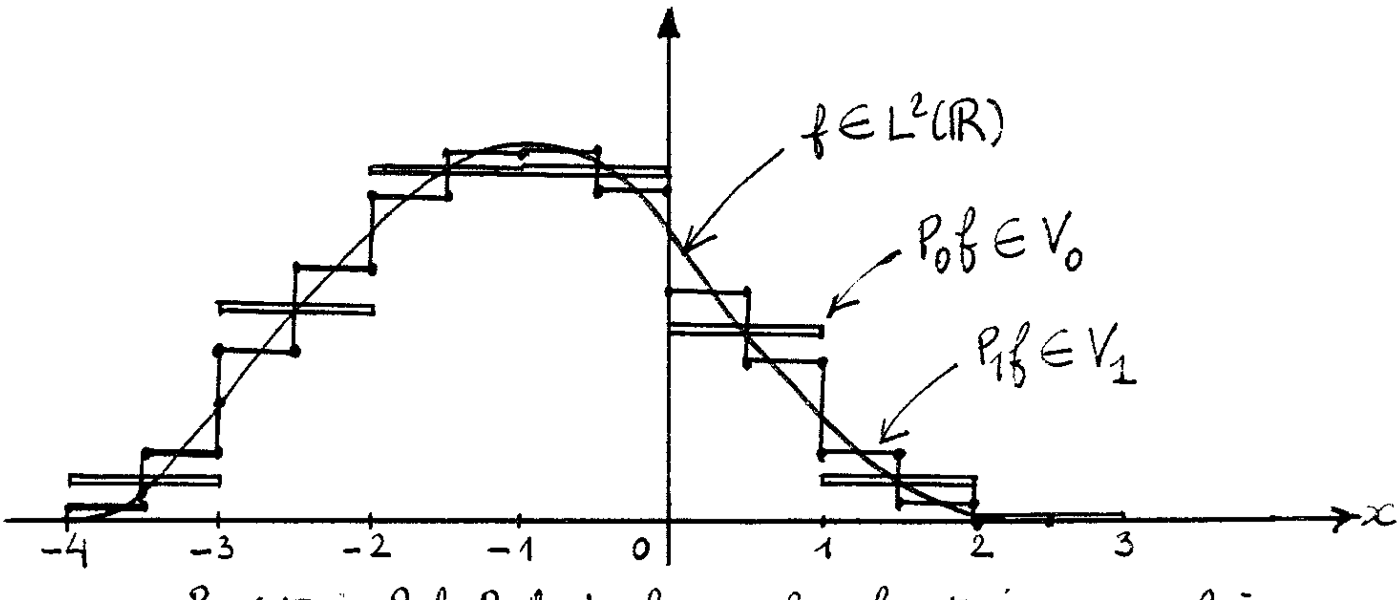
ce qui montre que la relation (46) qui définit la moyenne est bien définie et que de plus la série au second membre de (45) est de carré sommable :

$$(47) \qquad \|P_j f\|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-j}\, |\mu_{j,k}|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx = \|f\|^2$$

- on vérifie simplement que $f - P_j f$ est orthogonale à l'espace V_j :

$$(48) \qquad (f - P_j f\, ,\, \varphi_{j,k}) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z},\ j \text{ fixé} \in \mathbb{Z}$$

puisque $f - P_j f$ est clairement d'intégrale nulle sur tous les intervalles $]2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)[$. ∎



<u>Projections $P_0 f$, $P_1 f$ de f sur les fonctions en escalier</u>

- La question est de savoir ce que devient $P_j f$ quand la grille d'analyse devient de plus en plus fine, ie $j \to +\infty$.

Proposition Convergence de $P_j f$ vers f si $j \to +\infty$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ fixée on a

(49) $$\lim_{j \to \infty} \| P_j f - f \| = 0$$

$P_j f$ converge vers f en moyenne quadratique.

-