

le cnam

Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

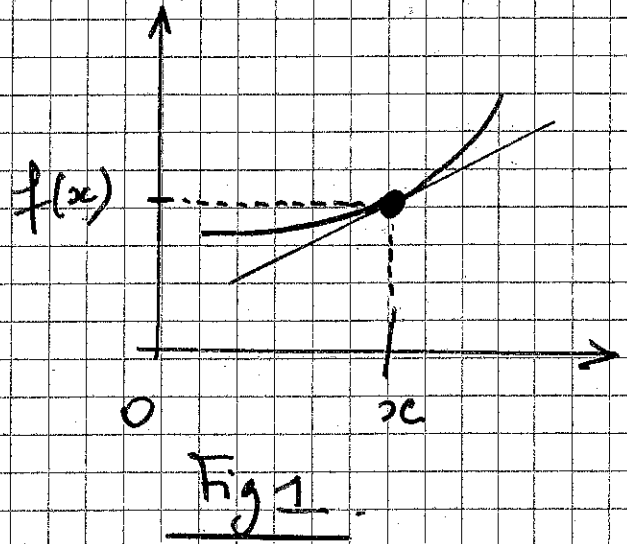
Cours 04

Dérivation des fonctions de deux variables réelles

François Dubois

⑤ Dérivation des fonctions de deux variables réelles

• Si f est une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ "à une variable", elle est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si la limite de $\frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)]$ existe dans \mathbb{R} ; on la note $f'(x)$. Alors si on pose



$$(1) \quad \varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x), \quad h \neq 0,$$

ou a $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$. on peut alors écrire

$$(2) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h \varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0.$$

La relation (2) exprime que f est dérivable en x . La fonction f est bien approchée par la fonction affine $h \mapsto f(x) + f'(x)h$ pour h voisin de zéro (fig 1); géométriquement,

la tangente à la courbe réalise cette approximation

- Réciproquement, si f est différentiable en x , c'est à dire si (2) est satisfaite, alors il est clair que $\frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)]$ tend vers $f'(x)$ si h tend vers zéro. Donc f est dérivable. Dans le cas des fonctions à une variable, dérivabilité et différentiabilité coïncident. On note $df(x)$ la différentielle de f au point $x \in \mathbb{R}$, c'est à dire l'application linéaire qui à $h \in \mathbb{R}$ associe $f'(x)h \in \mathbb{R}$:

$$(3) \quad df(x) \cdot h = f'(x)h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

- Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la phénoménologie est un peu plus compliquée. on peut d'abord considérer f comme fonction de l'une des variables, et poser par exemple $y = cste$. Si la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable au point $x \in \mathbb{R}$, on dit que f a une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h, y) - f(x, y)]$$

on procède de même à x fixé pour l'autre "fonction partielle" $y \mapsto f(x, y)$:

$$(5) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} [f(x, y+k) - f(x, y)]$$

3

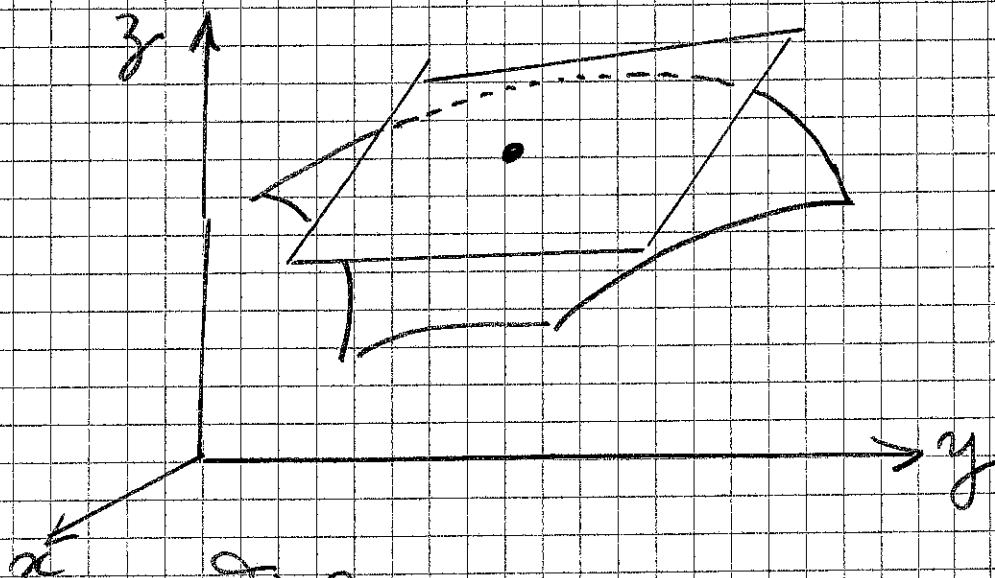


Fig 2.

- Géométriquement, le graphe $z = f(x, y)$ de la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une surface (Fig 2). Si cette surface est régulière, elle dispose d'un plan tangent au point (x, y) et f est bien approchée au voisinage de (x, y) par la valeur $f(x, y)$, plus une fonction linéaire:

$$(6) f(x+h, y+k) = f(x, y) + \alpha h + \beta k + \rho(h, k),$$

où le reste $\rho(h, k)$ tend "assez vite" vers zéro comme il sera précisé plus loin.

- Une difficulté majeure de l'étude des fonctions de deux variables est que l'existence des dérivées

ées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (cf (4)(5)) n'en-
 traîne pas un développement
 de la forme (6) avec une plan tangent!

• Etudions l'exemple suivant :

$$(7) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^8 + (y - x^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0 \end{cases}$$

La fonction f est bien définie pour tout
 point (x, y) de \mathbb{R}^2 car si le dénominateur
 de la fraction au membre de droite de (7)
 est nul, on a $(x^4)^2 + (y - x^2)^2 = 0$, donc
 $x^4 = 0$ et $y = x^2$, donc $x = y = 0$, cas qui
 ne peut pas se produire par hypothèse.

* Si $y = 0$, $f(x, 0) = \frac{x^5}{x^8 + x^4} = \frac{x}{1 + x^4}$ si $x \neq 0$

et cette expression est encore
 valable pour $x = 0$ ou en déduit facilement
 que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$. De même si $x = 0$ et $y \neq 0$,
 $f(0, y) = 0$ et cette relation est éga-

lement vraie pour $y = 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
 Au point $(0, 0)$, f dispose de ses deux
 dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Mais un
 développement de type (6)

n'existe pas! En effet, sur la parabole 5
 $y = x^2$, on a $f(x, x^2) = \frac{x^5}{x^8} = \frac{1}{x^3}$ qui
est non borné si x tend vers zéro!

def Différentiabilité en un point.

on dit que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au
point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe
 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $E(h, k) \in \mathbb{R}$ tels que

$$(8) f(x+h, y+k) = f(x, y) + \alpha h + \beta k + \sqrt{h^2 + k^2} E(h, k)$$

avec $E(h, k)$ qui tend vers zéro si $\sqrt{h^2 + k^2}$
tend vers zéro. La différentielle
 $df(x, y)$ est par définition "l'application
linéaire "tangente" au point (x, y) décrite à
la relation (8):

$$(9) df(x, y) \circ (h, k) = \alpha h + \beta k, \quad h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}.$$

l'application $df(x, y)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$;
elle transforme le point $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ en le
nombre $\alpha h + \beta k \in \mathbb{R}$.

Prop Existence de dérivées partielles.

Si f est différentiable au point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existent er on a

$$(b) \quad \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Preuve.

* on fixe y , c'est à dire on suppose $k=0$.
Alors

$$f(x+h, y) = f(x, y) + \alpha h + |h| \varepsilon(h, 0),$$

$$\text{donc } \frac{1}{h} [f(x+h, y) - f(x, y)] = \alpha + \frac{|h|}{h} \varepsilon(h, 0).$$

Le rapport $\frac{|h|}{h}$ vaut $+1$ ou -1 , donc reste borné et $\frac{|h|}{h} \varepsilon(h, 0)$ tend vers zéro si h tend vers zéro. On déduit alors de (4) que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe et le premier terme de (10) est établi.

* La preuve est analogue pour la seconde dérivée partielle. Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.



• on peut transformer (9) en utilisant (10) :

$$(11) \quad df(x, y) \circ (h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) k.$$

on applique la relation (11) pour les fonctions régulières $X(x,y) \equiv x$ et $Y(x,y) \equiv y$.
on a alors [exercice ?!]

$$(12) \quad dX(x,y) \cdot (h,k) = h; \quad dY(x,y) \cdot (h,k) = k$$

et on peut écrire (11) sous la forme équivalente :

$$(13) \quad df(x,y) \cdot (h,k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dX(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dY(x,y) \right] \cdot (h,k).$$

* Les deux applications linéaires $df(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) dX(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) dY(x,y)$ sont donc égales ; on met le point (x,y) .

$$(14) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{\partial f}{\partial y} dY.$$

Si on confond la lettre X avec x pour écrire la fonction "x" et Y avec y pour la fonction "y", la relation (14) prend la forme classique

$$(15) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

• on se donne maintenant une courbe Γ du plan \mathbb{R}^2 (Figure 3), où est également définie une fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

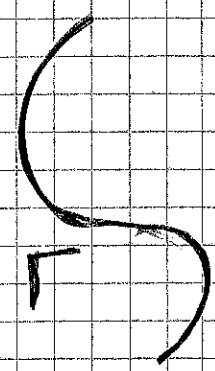


Fig 3

on a donc d'une part la fonction
 $[a, b] \ni t \mapsto M(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma$
 qui paramètre la courbe Γ (avec $a < b$ deux réels) et d'autre part la fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$. on peut donc former la composée $g(t) = f(x(t), y(t))$ en posant $x = x(t)$, $y = y(t)$; c'est la fonction f , restreinte à la courbe Γ .

□ Par exemple pour Γ cercle de rayon 1 paramétré par $(\cos t, \sin t)$ et f fonction polynomiale donnée par $f(x, y) = x^2 - y^2$, on a $g(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2 - (\sin t)^2 = \cos(2t)$. on peut dériver $g(\cdot)$ sans difficulté dans ce cas et $g'(t) = -2 \sin(2t)$. Dans le cas général, on a la proposition suivante

Prop Dérivée le long d'une courbe.

on suppose les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ dérivables sur \mathbb{R} et $(x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R}^2 . Alors la composée

$$(10) \quad g(t) = f(x(t), y(t))$$

est dérivable sur \mathbb{R} et

$$(11) \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}.$$

(R) avec l'abus de notation qui consiste à remplacer la notation g par f , la relation (17) peut s'écrire

$$(18) \quad \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

on a simplement dérivé formellement la différentielle df donnée en (15) par dt !

Preuve de la proposition

* on écrit que les fonctions x et y sont différentiables en t :

$$(19) \quad \begin{cases} x(t+\theta) = x(t) + \theta x'(t) + \theta \varepsilon_x(\theta) \\ y(t+\theta) = y(t) + \theta y'(t) + \theta \varepsilon_y(\theta) \end{cases}$$

* on utilise ensuite la différentiabilité (8) de f , avec $h = \theta(x'(t) + \varepsilon_x(\theta))$, $k = \theta(y'(t) + \varepsilon_y(\theta))$:

$$\begin{aligned} f(x(t+\theta), y(t+\theta)) &= f(x(t) + h, y(t) + k) \\ &= f(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \sqrt{h^2 + k^2} \varepsilon(h, k) \\ &= f(x(t), y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} [x'(t) + \varepsilon_x(\theta)] \theta + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y} [y'(t) + \varepsilon_y(\theta)] \theta + \theta \sqrt{(x'(t) + \varepsilon_x(\theta))^2 + (y'(t) + \varepsilon_y(\theta))^2} \varepsilon \\ &\quad \times \varepsilon(\theta(x' + \varepsilon_x(\theta)), \theta(y' + \varepsilon_y(\theta))) \end{aligned}$$

on pose

$$\tilde{\varepsilon}(\theta) \equiv \varepsilon_x(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_y(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\theta}{|\theta|} \sqrt{\varepsilon} \varepsilon(\theta(x'+\varepsilon_x), \theta(y'+\varepsilon_y))$$

on a alors

$$f(x(t+\theta), y(t+\theta)) - f(x(t), y(t)) = \theta \left[\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \right] + \theta \tilde{\varepsilon}(\theta),$$

ce qui montre que g définie à la relation (16) est différentiable et $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ \square

- Dans le cas de l'exemple proposé sur la page 8, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, donc

$$g'(t) = 2x \frac{dx}{dt} - 2y \frac{dy}{dt} = 2 \cos t (-\sin t) - 2 \sin t (\cos t) = -4 \sin t \cos t \text{ comme calculé plus haut!}$$

- on généralise le résultat (17) à des fonctions $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$ de deux variables on pose

$$(20) \quad g(u, v) \equiv f(X(u, v), Y(u, v)).$$

Prop Dérivées partielles de la fonction composée

Si les trois fonctions $X(\cdot, \cdot)$, $Y(\cdot, \cdot)$ et $f(\cdot, \cdot)$ sont différentiables, alors la fonction $g(\cdot, \cdot)$

définie par les relations (20) est différentiable. \square
 ble; les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$ sont
 données par les relations

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}.$$

La preuve de la différentiabilité ressemble à celle faite pages 9 et 10; nous la laissons au lecteur. Quant aux relations (21), il suffit de faire successivement $t = u$ [avec v fixé] puis $t = v$ [avec u fixé] dans la relation (18); on en déduit immédiatement (21). \square

• on résume les relations (18) ou (21) à l'aide de la matrice jacobienne de f ou de F telle que

$$(22) \quad F(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Pour $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$ différentiable, on pose

$$(23) \quad J_f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right);$$

c'est une matrice à 1 ligne et 2 colonnes.

Dans le cas $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto F(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on

définit la jacobienne $J_F(u, v)$ comme une matrice à 2 lignes et 2 colonnes :

$$(24) \quad J_F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

* La relation (20) exprime simplement que :

$$(25) \quad g = f \circ F.$$

Alors les relations (21) peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \text{ c'est à dire}$$

$$(26) \quad J_g(u, v) = J_f(x(u, v), y(u, v)) \cdot J_F(u, v)$$

c'est la bonne généralisation de la dérivée

$g' = (f' \circ F) F'$ pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

la matrice jacobienne de la fonction composée (25) est égale au produit (26) des matrices jacobienes. Cette relation se généralise sans difficulté aux fonctions à un plus grand nombre de variables et / ou de composantes, pourvu que la composée (25) soit effectivement définie.

Julien

16 Oct 2013

Exercices

- Si f est une fonction de deux variables, on définit le Laplacien $(\Delta f)(x, y)$ par $\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
 Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $f(x, y) = \log r$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
 Montrer que $\Delta f(x, y) = 0$.
- Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, ce qui définit une fonction $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $(r, \theta) \mapsto (x, y) \equiv F(r, \theta)$. Calculer la jacobienne J_F . Réciproquement, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit r, θ par $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctg(y/x)$. Définir une application $(x, y) \mapsto (r, \theta) \equiv G(x, y)$. Calculer la jacobienne J_G .
 Montrer que $J_F \cdot J_G = J_G \cdot J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pourrait-on prévoir le résultat?
- On cherche à expliciter $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable de sorte que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) f(y)$. Montrer que si f est constante, alors $f(x) = 0 \forall x$ ou $f(x) = 1 \forall x$. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x+y) = f'(x) f(y)$.
 En déduire que si f n'est pas constante, on a $f(0) = 1$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = \alpha f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Expliciter toutes les fonctions f qui répondent au problème.