

Analyse Vectorielle (STN-2)

1

14) Intégration par parties

- on se donne Ω domaine niché dans \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega$, surface régulière. on note \vec{n} la normale à $\partial\Omega$ pointant de Ω vers l'extérieur (\vec{n} est la "normale extérieure"). on se donne aussi $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière définie sur Ω . on a la formule d'intégration par parties:

$$(1) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot n_j \, d\sigma, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Dans la relation (1), le membre de gauche est une intégrale de volume et $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ est un élément d'intégration volumique; le membre de droite est une intégrale de surface et $d\sigma$ l'élément d'aire correspondant.

- on teste cette relation pour Ω la boule de centre 0 et rayon $R > 0$ et $f(x) = x_3$, avec $j=3$. on a alors $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 1$ et le volume

$$(2) \quad |\Omega| \equiv \int_{\Omega} dx$$

peut être calculé avec le membre de droite. 2
Si Ω est la boule de rayon R , sa normale est colinéaire au rayon vecteur et on a

$$(3) \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{R}, \quad \Omega \text{ boule de rayon } R.$$

on calcule l'intégrale au membre de droite de (1) en coordonnées polaires, où

$$(4) \quad x_3 = R \cos \theta, \quad d\sigma = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \cdot n_3 \, d\sigma &= \int_{\Omega} x_3 \cdot \frac{x_3}{R} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{R^2 \cos^2 \theta}{R} R^2 \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \int_0^{\pi} \sin \theta \cos^2 \theta \, d\theta &= \int_{-1}^1 u^2 \, du \quad (u = -\cos \theta) \\ &= 2 \int_0^1 u^2 \, du = 2 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{\Omega} f n_3 \, d\sigma = \frac{4}{3} \pi R^3; \text{ on en déduit}$$

$$(5) \quad |\Omega| = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \Omega \text{ boule de rayon } R.$$

on s'y attendait!

Prop 1 Autre expression de la formule d'intégration par parties.

Soit $\vec{\varphi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs sur Ω (comme plus haut). On a alors

$$(6) \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\varphi} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Cette relation est équivalente à (1).

Preuve.

on rappelle que

$$(7) \operatorname{div} \vec{\varphi} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}$$

si $\vec{\varphi} = \sum_{j=1}^3 \varphi_j \vec{e}_j$ relativement à une base

orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\varphi} dx = \int_{\Omega} \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} dx$$

$$= \sum_j \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} dx \quad \text{linéarité de l'intégral}$$

$$= \sum_j \int_{\partial\Omega} \varphi_j n_j d\sigma \quad (\text{prendre } f = \varphi_j \text{ dans (1)})$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_j \varphi_j \cdot n_j \right) d\sigma \quad (\text{linéarité de l'intégrale})$$

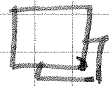
$$= \int_{\partial\Omega} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) d\sigma \quad \text{par définition du produit scalaire,}$$

ce qui établit la relation (6). Réciproquement, si on injecte $\varphi = f \vec{e}_j$ dans (6), on a $\varphi_k = f \delta_{jk}$ et $\text{div } \vec{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

$$\text{Donc } \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int \text{div } \vec{\varphi} dx = \int_{\partial\Omega} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n}) d\sigma \quad (\text{cf (6)})$$

$$= \int_{\partial\Omega} f n_j d\sigma$$

ou $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \sum_k f \delta_{jk} n_k = f n_j$. Et la relation (1) est établie si on suppose que (6) est vrai. Les relations (1) et (6) sont équivalentes et la proposition est démontrée.



Prop 2, Encore une autre formulation de l'intégration par parties.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ comme plus haut et $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions régulières. On a

$$(7) \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx + \int_{\partial \Omega} u v n_j \, d\sigma, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Cette relation est équivalente à (1).

Preuve

on montre d'abord que (1) \Rightarrow (7). on choisit $f = uv$ dans la relation (1) et on calcule $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ à l'aide de la règle de Leibniz :

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} (uv) = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

on intègre cette relation dans Ω et on utilise (1); on en déduit par linéarité :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \, dx = \int_{\partial \Omega} u v n_j \, d\sigma.$$

La relation (7) s'en déduit immédiatement.

Réciproquement, si (7) est vrai pour tout

Couple de fonctions u et v , on peut en particulier prendre le cas particulier où $v \equiv 1$. Alors $\frac{\partial v}{\partial x_j} = 0$ et la relation (7) prend la forme

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u n_j \cdot d\sigma, \quad \text{qui est absolument}$$

identique à (1), la lettre f ayant simplement été remplacée par la lettre u . D'où le résultat. La proposition est démontrée.

- on rappelle maintenant d'autres formules d'intégration par parties. D'abord (i) on note pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec $\partial\Omega$ courbe frontière d'abscisse arithmétique ds :

$$(9) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} f n_j \cdot d\sigma, \quad 1 \leq j \leq 2, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

- Ensuite si Σ est une surface qui s'appuie sur une courbe fermée $\Gamma = \partial\Sigma$, avec \vec{n} et Γ d'orientations compatibles via la règle du tire-bouchon. On se donne un champ de vecteurs $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

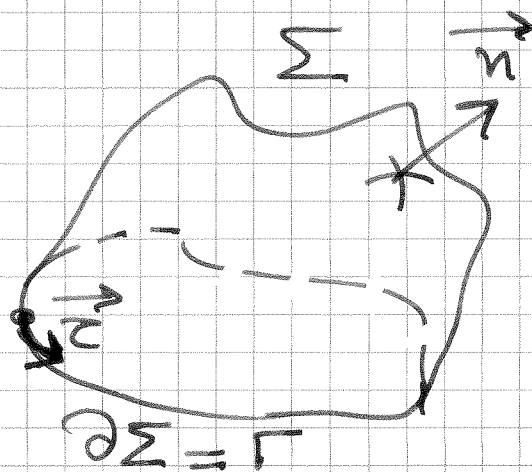


Fig. 1.

assez régulier (φ étant défini au delà de Σ pour pouvoir calculer les dérivées sur la surface). on a alors

$$(10) \quad \int_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\partial \Sigma} \vec{f} \cdot \vec{e} \, ds ;$$

le flux du rotationnel est égal à la circulation du champ.

* L'intégrale du membre de gauche de (10) est une intégrale de surface et $d\sigma$ est l'élément de surface sur Σ . L'intégrale du membre de droite de (10) est une intégrale sur le contour (toujours fermé Γ), et ds est l'élément de longueur sur Γ , $\vec{e} = \frac{d\vec{M}}{ds}$ le vecteur tangent (unitaire) associé à l'abscisse curviligne (voir la Fig. 1).

• Rappelons que si $\Gamma = \overline{AB}$ est une courbe régulière plongée dans l'espace \mathbb{R}^3 , on suppose qu'on peut la paramétrer par

$$(11) \quad \mathbb{R} \supset [0,1] \ni \theta \mapsto M(\theta) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^3$$

avec

$$(12) \quad \vec{\partial M}(\theta) = \sum_{j=1}^3 x_j(\theta) \vec{e}_j, \quad M(0) = A, \quad M(1) = B.$$

Alors l'abscisse curviligne $s(\theta)$ satisfait 8

$$(13) \quad \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx_j}{d\theta}\right)^2};$$

c'est analogue au cas plan vu au chapitre ; maintenant on a simplement à prendre en compte une troisième coordonnée. Alors

$$(14) \quad \vec{e} = \frac{dM}{ds}$$

est un vecteur unitaire [exercice laissé au lecteur]. Une intégrale curviligne de la forme $\int_{\Gamma} g(M) ds$ se calcule à l'aide d'une intégrale ordinaire :

$$(15) \quad \int_{\Gamma} g(M) ds = \int_0^1 g(M(\theta)) \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx_j}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Une intégrale de la forme du membre de droite de (10) peut s'exprimer aussi selon

$$(16) \quad \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot \vec{e} ds = \int_{\Gamma} \vec{f} \cdot dM$$

en utilisant la relation (14).

Prop (3) Variation d'un champ scalaire.

Soit A, B deux points de \mathbb{R}^3 ,

$\Gamma = \widehat{AB}$ une courbe qui relie A à B
 et $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire
 défini au voisinage de Γ . On a alors

$$(17) \int_A^B \vec{\nabla} U \cdot \vec{c} \, ds = U(B) - U(A)$$

où (18) $\vec{\nabla} U \equiv \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U}{\partial x_j} \vec{e}_j$
 est le gradient du champ scalaire

Preuve

on calcule le membre de gauche de (17) en utilisant la règle (15). Compte tenu de (13), on a

$$\int_A^B \vec{\nabla} U \cdot \vec{c} \, ds = \int_0^1 \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} \, d\theta = \int_0^1 \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{M}}{d\theta} \, d\theta$$

Pour $\theta \in [0, 1]$, on pose $v(\theta) = U(M(\theta))$. Alors

$$\frac{dv}{d\theta} = \sum_j \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\theta} = \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{M}}{d\theta} \quad \text{on peut alors achever le calcul du membre de gauche de la relation (17). Il vient}$$

$$\int_A^B \vec{\nabla} U \cdot \vec{c} \, ds = \int_0^1 \frac{dv}{d\theta} \, d\theta = v(1) - v(0) = U(B) - U(A)$$

compte tenu de (13). La proposition en résulte. \square

Prop ④ Deux identités remarquables.

10

Soit $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire assez régulier et $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs régulier lui aussi. On a

$$(19) \quad \vec{\text{rot}}(\vec{\nabla}U) = \vec{0}.$$

$$(20) \quad \text{div}[\vec{\text{rot}}\vec{\varphi}] = 0.$$

Preuve

* Tout d'abord, les expressions précédentes ont un sens. Si U est un champ scalaire, $\vec{\nabla}U$ est un champ de vecteurs et son rotationnel peut être défini. Si $\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs, son rotationnel est un nouveau champ de vecteurs et la divergence de ce champ de vecteurs est un champ scalaire qui est bien défini.

* Si $\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs arbitraire, on sait [cf leçon 12] que son rotationnel $\vec{\text{rot}}\vec{\varphi}$ a pour i^{e} composante

$$(21) \quad (\vec{\text{rot}}\vec{\varphi})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varphi_k, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Avec $\varphi_k = \partial_k U = (\vec{\nabla}U)_k$, on en déduit

11

$\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla}U)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U$, avec sommation implicite sur j et k . Quand on échange les noms des variables, l'expression précédente est égale à

$$\varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j U = -\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U$$

car ε est antisymétrique et que le théorème de Schwarz exprime qu'on peut dériver deux fois dans l'ordre que l'on veut:

$$(22) \quad \partial_k \partial_j U = \partial_j \partial_k U, \quad 1 \leq j, k \leq 3.$$

on déduit du calcul précédent que $\vec{\text{rot}}(\vec{\nabla}U)_i$ est égale à son opposé, donc est nul, ce qui établit la relation (19)

* De façon analogue,

$$\text{div}[\vec{\text{rot}} \vec{\varphi}] = \sum_j \partial_j [\vec{\text{rot}} \vec{\varphi}]_j$$

$$= \partial_j \varepsilon_{jkl} \partial_k \varphi_l = (\varepsilon_{jkl} \partial_j \partial_k) \varphi_l$$

$$= \varepsilon_{ljk} \partial_j \partial_k \varphi_l = \varepsilon_{lkj} \partial_k \partial_j \varphi_l$$

$$= -\varepsilon_{ljk} \partial_j \partial_k \varphi_l \quad \text{cf (22)}$$

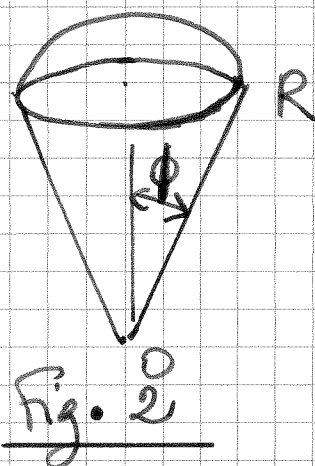
$$= 0 \quad \text{par égalité à son opposé. D'où (20).} \quad \square$$

Exercices

12

- Pour $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose $\vec{\psi}(\vec{r}) = \vec{r}$. A l'aide de la relation (6) appliquée à ce champ de vecteurs, montrer que le volume de la boule de centre 0 et de rayon R est donné par la relation (5).

- Volume d'un tronç de cône sphérique. Soit V le volume du plan défini en coordonnées polaires par $r \leq R$ et $0 \leq \phi$ (voir la figure 2). Avec l'aide du champ de vecteurs $\vec{\psi}(\vec{r}) = \vec{r}$, montrer que $|V| = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^2 \frac{\phi}{2}$.



- Pour $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ assez réguliers, on pose $\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \equiv \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u \cdot \vec{n} = \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j$.
Montrer l'identité

$$(23) \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma.$$

- on se donne deux champs de vecteurs $\vec{\psi}$ et $\vec{\varphi}$ dans \mathbb{R}^3 . Montrer l'identité

$$(24) \int_{\Omega} \vec{\psi} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{\varphi} \, dx = \int_{\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{\psi} \, dx + \int_{\partial \Omega} (\vec{\psi}, \vec{n}, \vec{\varphi}) \, d\sigma$$

$$\text{ou } (\vec{\psi}, \vec{n}, \vec{\varphi}) = \vec{\psi} \cdot (\vec{n} \times \vec{\varphi}) = (\vec{\psi} \times \vec{n}) \cdot \vec{\varphi}.$$

Dubois
10 mars 2014