

# Analyse Vectorielle (STN-2)

## 13 Calcul des intégrales triples.

- Les propriétés des intégrales triples sont pour l'essentiel analogues à celles des intégrales doubles. On désigne par  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^3$  et  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée sur  $\Omega$ :

$$(1) \exists M \geq 0, \forall x \in \Omega, |f(x)| \leq M.$$

On admet qu'alors l'intégrale (triple) de  $f$  sur le domaine  $\Omega$  peut être définie:

$$(2) \int_{\Omega} f(x) dx = \iiint_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

- Dans le cas particulier où  $f(x) = 1$  pour tout  $x \in \Omega$ , l'intégrale triple est égale au volume  $|\Omega|$  du domaine:

$$(3) \int_{\Omega} dx = |\Omega|, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3.$$

\* Ainsi si  $a < \alpha$ ,  $b < \beta$ ,  $c < \gamma$  et  $\Omega = ]a, \alpha[x ]b, \beta[x ]c, \gamma[$  on a

$$(4) |]a, \alpha[x ]b, \beta[x ]c, \gamma[| = (\alpha - a)(\beta - b)(\gamma - c).$$

- L'intégrale triple possède la propriété d'additivité par rapport au domaine:

si  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  avec  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , on a

$$(5) \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x) dx = \int_{\Omega_1} f dx + \int_{\Omega_2} f dx, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

On peut couper une intégrale en plusieurs morceaux dont on peut choisir la taille à volonté!

- L'intégrale triple est linéaire comme fonctionnelle agissant sur  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $g$  est une autre fonction  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$(6) \int_{\Omega} (f+g) dx = \int_{\Omega} f dx + \int_{\Omega} g dx$$

$$(7) \int_{\Omega} (\lambda f(x)) dx = \lambda \left( \int_{\Omega} f(x) dx \right).$$

- L'intégrale triple est une fonctionnelle positive: si  $f$  est positive, c'est à dire  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \Omega$ , l'intégrale triple est positive.

$$(8) f \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f dx \geq 0.$$

- Une conséquence de cette propriété et de la linéarité est que la valeur absolue

de l'intégrale est toujours majorée par l'intégrale de la valeur absolue :

3

$$(9) \quad \left| \int_{\Omega} f dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

- on peut faire le calcul approché d'une intégrale triple en coupant  $\Omega$  en morceaux puis en remplaçant  $f$  par une constante dans chacun des morceaux. Par exemple, si  $\Omega$  est le parallépipède rectangle de la relation (4), et  $N \geq 1$  un entier, on coupe chacun des intervalles  $]a, \alpha[$ ,  $]b, \beta[$ ,  $]c, \delta[$  en  $N$  morceaux (pour fixer les idées) et on obtient de cette façon  $N^3$  morceaux  $\Omega_j$  pour  $1 \leq j \leq N^3$ . on suppose  $f(x) \approx f_j$  ( $f_j \in \mathbb{R}$ ) pour  $x \in \Omega_j$ . on a alors

$$\int_{\Omega} f dx = \sum_{j=1}^{N^3} \left( \int_{\Omega} f dx \right) \quad [\text{additivité \& domaine}]$$

$$\approx \sum_{j=1}^{N^3} \left( \int_{\Omega} f_j dx \right) \quad [\text{approximation}]$$

$$= \sum_{j=1}^{N^3} f_j \left( \int_{\Omega_j} dx \right) \quad [\text{linéarité}]$$

$$= \sum_{j=1}^{N^3} f_j |\Omega_j| \quad [\text{calcul pour } f \equiv 1]$$

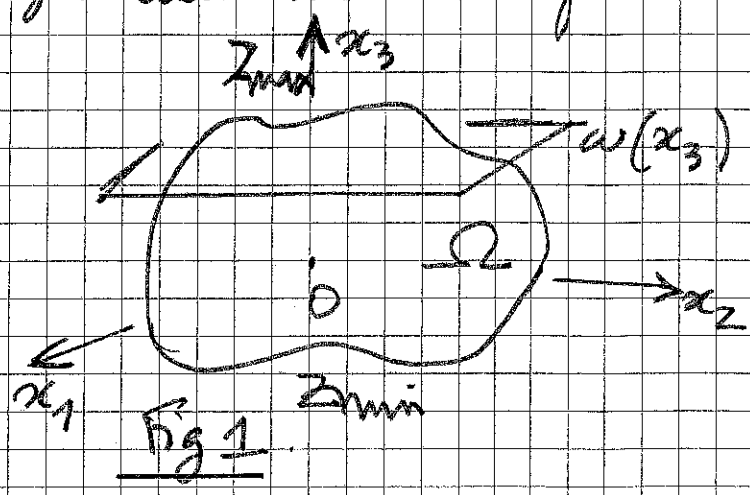
$$= \sum_{j=1}^{N^3} f_j \frac{|\Omega|}{N^3} \quad [\text{les morceaux de } \Omega \text{ sont de volumes égaux}]$$

$$(10) \int_{\Omega} f dx \approx \frac{|\Omega|}{N^3} \sum_{j=1}^{N^3} f_j$$

on a une formule approchée pour le calcul de l'intégrale triple utile en pratique et qui peut aussi être améliorée. Mais ces questions purement numériques dépassent le cadre de ce cours.

- on peut calculer de façon exacte une intégrale triple grâce au théorème de Fubini.

Une intégrale triple est une intégrale simple d'une famille d'intégrales doubles.



Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ,

on pose  $w(x_3)$  la surface obtenue en coupant  $\Omega$  par un plan  $x_3 = \text{constante}$  (Fig. 1)

Alors

$$(11) \int_{\Omega} f dx = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} dx_3 \left[ \iint_{w(x_3)} f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 \right],$$

où  $\Omega$  est contenu dans la bande entre les plans  $x_3 = z_{\min}$  et  $x_3 = z_{\max}$  [Fig. 1].

- on teste la relation (11) pour calculer le volume de la sphère  $\Omega$  de centre  $O$  et rayon  $R$  :

$$(12) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

Alors  $\omega(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\}$

$z_{\min} = -R$  et  $z_{\max} = +R$  De plus

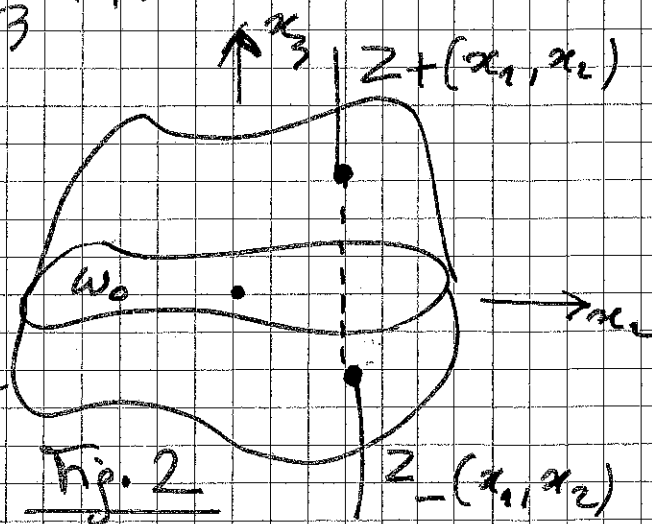
$\iint_{\omega(z)} 1 \, dx_1 \, dx_2 = |\omega(z)| = \pi (R^2 - z^2)$  car  $\omega(z)$  c'est la surface d'un disque de rayon  $\sqrt{R^2 - z^2}$ . on en déduit

$$|\Omega| = \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) \, dz = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) \, dz$$

$$= 2\pi \left( R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$(13) \quad |\text{sphère de rayon } R| = \frac{4}{3} \pi R^3$$

- on peut exprimer aussi que l'intégrale triple est l'intégrale double sur  $\omega_0 = \omega(0)$  de l'intégrale simple obtenue en intégrant la fonction  $f$  de  $x_3 = z_-(x_1, x_2)$  à  $x_3 = z_+(x_1, x_2)$  où



$$(14) \quad \left. \begin{aligned} \Omega = \{ (x_1, x_2, x_3), z_-(x_1, x_2) \leq x_3 \leq z_+(x_1, x_2), \\ (x_1, x_2) \in \omega_0 \} \end{aligned} \right\}$$

on a

6

$$(15) \int_{\Omega} f dx = \iint_{\omega_0} dx_1 dx_2 \left[ \int_{Z_-(x_1, x_2)}^{Z_+(x_1, x_2)} f(x_1, x_2, x_3) dx_3 \right]$$

• on teste la relation précédente pour la sphère  $\Omega$  de rayon  $R$ . Alors  $\omega_0$  est le disque du plan de centre  $O$  et rayon  $R$ , et  $Z_+(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} = -Z_-(x_1, x_2)$ . on a alors

$$\int_{\Omega} dx = \iint_{\omega_0} dx_1 dx_2 \left[ \int_{-\sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}}^{\sqrt{R^2 - (x_1^2 + x_2^2)}} dx_3 \right]$$

$$= 2 \int_{x_1^2 + x_2^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

$$= 2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R^2 - r^2} \quad (\text{en polaires planes})$$

$$= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr$$

$$= 4\pi \left[ (R^2 - r^2)^{3/2} \left( -\frac{2}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \right) \right]_0^R$$

$$= \frac{4\pi}{3} (R^2)^{3/2} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

ce qui confirme bien la relation (13).

- La formule de changement de variables est une généralisation naturelle du cas tridimensionnel. on suppose  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  paramétrisé par une application  $F$  bijective et régulière :

$$(16) \quad \hat{\Omega} \ni (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = \hat{x} \mapsto F(\hat{x}) = x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$$

on introduit la matrice jacobienne  $dF(\hat{x})$  de la transformation (16). On a

$$(17) \quad dF(\hat{x})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

relation qu'on peut développer en

$$dF(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \hat{x}_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \hat{x}_3} \end{pmatrix}$$

On introduit le jacobien  $J(\hat{x})$  de cette transformation, c'est à dire le volume élémentaire obtenu dans une variation  $dx$  :

$$(18) \quad J(\hat{x}) = | \det dF(\hat{x}) |.$$

on a alors

8

$$(19) \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\hat{\Omega}} f(F(\hat{x})) J(\hat{x}) d\hat{x}$$

• Dans le cas des coordonnées polaires, on a

$$(20) \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Ainsi  $\hat{x} = (r, \theta, \varphi)$  et le déterminant jacobien peut se calculer sans difficulté:

$$(21) J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

[exercice laissé au lecteur!]

On peut utiliser ce changement de variables pour calculer une nouvelle fois le volume de la sphère de rayon  $R$ :

$$|Q| = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R \left[ -\cos \theta \right]_0^\pi$$

$$= 2\pi \frac{R^3}{3} (-(-1) - (-1)) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

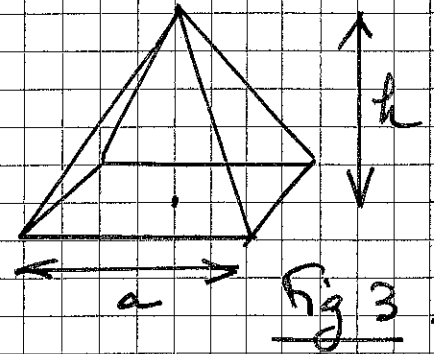
ouf!



# Exercices

9

- Démontrer la relation (21)
- Calculer le volume de la pyramide de base carrée (de côté  $a > 0$ ) et de hauteur  $h > 0$  (Fig 3).

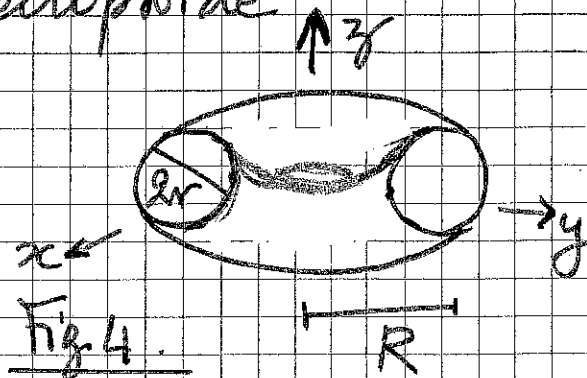


- Soit  $a > 0, b > 0, c > 0$  trois réels et  $E$  l'ellipsoïde de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

Calculer le volume  $|E|$  de cet ellipsoïde

- Soit  $T$  le tore de grand rayon  $R$  et de petit rayon obtenu en faisant tourner un petit disque de rayon  $r$  le long d'un grand cercle de rayon  $R$  (Fig 4).



Montrer qu'on peut le paramétrer par

$x = (R + ur \cos \theta) \cos \varphi, y = (R + ur \cos \theta) \sin \varphi, z = ur \sin \theta$   
avec  $0 \leq u \leq 1, 0 \leq \theta, \varphi \leq 2\pi$ . Calculer ensuite le volume  $|T|$  de ce tore.

ouay, 13 mars 2014  
Duhois.