Analyse Vectorielle (SIN-2)

(12) Tenseur antisymétrique d'ordre 3

- Ce chapitre particularise le cas de la dimension 3, si indispensable pour les sciences de l'ingénieur !

Le tenseur antisymétrique d'ordre 3 ε_{ijk} consiste en la donnée de $3 \times 3 \times 3 = 27$ nombres définis pour $1 \leq i, j, k \leq 3$, et valant 0, $+1$ ou -1 ;

(1) $\varepsilon_{ijk} \in \{0, -1, +1\}$, $1 \leq i, j, k \leq 3$.

De façon plus précise $\varepsilon_{ijk} = 0$ si deux au moins des indices sont égaux

(2) $\{i, j, k\} \neq \{1, 2, 3\} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} = 0$.

Si (i, j, k) est une permutation circulaire des indices $(1, 2, 3)$, alors $\varepsilon_{ijk} = 1$. Il est facile d'expliciter tous les cas de figure :

(3) $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 0$

Si (i, j, k) s'obtient à partir de $(1, 2, 3)$ par échange de deux des indices, le troisième restant fixe (on parle alors de transposition), alors $\varepsilon_{ijk} = -1$:

(4) $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$.

On se rend compte que $\varepsilon_{ijk} = 0$ dans 21 cas de figure et est non nul dans les 6 cas où (i,j,k) est une permutation de $(1,2,3)$

- Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathbb{R}^3$. On note de façon analogue le produit mixte de trois vecteurs. Rappelons que si $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e_i}$, $\vec{v} = \sum_j v_j \vec{e_j}$, $\vec{w} = \sum_k w_k \vec{e_k}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ se calcule avec un simple déterminant :

$$(5) \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} .$$

Prop 1 Produit mixte et tenseur antisymétrique

On a

$$(6) \quad (\vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k}) = \varepsilon_{ijk} , \quad 1 \leq i,j,k \leq 3$$

Preuve.

* Si deux au moins des indices i, j, k sont égaux, le produit mixte au membre de gauche de (6) contient deux vecteurs égaux, donc est nul. C'est aussi le cas pour ε_{ijk} et la relation (6) est satisfaite dans ce cas.

* Si (i,j,k) est une permutation circulaire de $(1,2,3)$, on traite les trois cas de figure :

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2)\cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 = \varepsilon_{123}$$

et de même par permutation circulaire :

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)\cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 = \varepsilon_{231}$$

$$(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1)\cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 = \varepsilon_{312}$$

* Enfin si (i,j,k) contient une transposition, on passe en revue les trois derniers cas :

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)\cdot \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = -1 = \varepsilon_{213}$$

$$(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) = (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)\cdot \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = -1 = \varepsilon_{321}$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)\cdot \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -1 = \varepsilon_{132}$$

Ouf! $\square$

Prop 2 Transformation par permutation.

On a pour des indices i, j, k quelconques compris entre 1 et 3 :

(7) $$\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}$$

(8) $$\varepsilon_{jki} = \varepsilon_{ijk}$$

Preuve

* on utilise les propriétés connues du produit mixte :

$$\varepsilon_{jik} = (\vec{e_j}, \vec{e_i}, \vec{e_k}) = -(\vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k}) = -\varepsilon_{ijk} ;$$

* De même pour la permutation circulaire :

$$\varepsilon_{jki} = (\vec{e_j}, \vec{e_k}, \vec{e_i}) = -(\vec{e_j}, \vec{e_i}, \vec{e_k})$$
$$= -\left[-(\vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k})\right] = (\vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k}) = \varepsilon_{ijk}$$

et la propriété est établie. $\square$

Prop 3 <u>Expression du produit mixte</u>

Avec la définition (5) rappelée plus haut, on a

$$(9)\quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk}\, u_i\, v_j\, w_k .$$

Preuve : il suffit d'utiliser la linéarité du produit mixte par rapport à chacun de ses arguments :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \left(\sum_i u_i \vec{e_i}, \sum_j v_j \vec{e_j}, \sum_k w_k \vec{e_k}\right)$$
$$= \sum_i \sum_j \sum_k u_i\, v_j\, w_k\, (\vec{e_i}, \vec{e_j}, \vec{e_k})$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \sum_i \sum_j \sum_k u_i v_j w_k \ \varepsilon_{ijk} \quad (\text{cf}(6))$$

ce qui montre la relation (9) $\square$

- <u>Convention d'Einstein</u> sur les indices répétés.

L'expression au membre de droite de (9) se note également $\varepsilon_{ijk}\ u_i\ v_j\ w_k$, sans écrire le (triple) symbole de sommation sur les indices i, j et k. C'est la convention d'Einstein qui suppose implicitement que cette somme est présente dès que un même indice est présent exactement <u>deux</u> fois dans une expression algébrique.

Ainsi, le terme générique du produit AB des matrices A et B s'écrit

(10) $$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}\ B_{kj} .$$

Avec la notation d'Einstein, la relation (10) s'écrit

(11) $$(AB)_{ij} = A_{ik}\ B_{kj}$$

où la sommation sur k n'est pas écrite car l'indice k est présent deux fois au membre de droite de la relation (11).

Prop ④ Rotationnel

Soit $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs.
La i^e composante du champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varphi}$ est donnée par

(12) $$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varphi})_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \varphi_k \,, \quad 1 \leq i \leq 3$$

avec sommation implicite sur les indices j et k au membre de droite de (12) et

(13) $$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \,, \quad 1 \leq j \leq 3 .$$

Preuve

* on sait que

(14) $$(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\varphi})_3 = \partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1 .$$

Si on regarde le membre de droite de (12) avec $i=3$, le coefficient ε_{3jk} est non nul seulement si $j=1$ et $k=2$ ou si $j=2$ et $k=1$. De plus, on sait que $\varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = -1$. Donc le membre de droite de (12) est égal dans ce cas à $\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1$, ce qui est identique à (14). La relation (12) est démontrée pour $i=3$. La preuve par permutation circulaire pour les deux autres cas est laissée au lecteur. $\square$

(12) Réduction du produit

Soit ε_{ijk} le tenseur antisymétrique d'ordre 3 défini aux relations (1) à (4) et $\delta_{\alpha\beta}$ le symbole de Kronecker défini par

(15) $$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a la relation suivante (avec sommation implicite sur l'indice i) :

(16) $$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i\alpha\beta} = \delta_{j\alpha}\,\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\,\delta_{k\alpha}$$

pour $1 \leq j, k, \alpha, \beta \leq 3$.

Preuve

* Si $j = k$, le membre de gauche de (16) est nul. Vérifions que c'est aussi le cas pour le membre de droite. Or $\delta_{j\alpha}\,\delta_{j\beta} - \delta_{j\beta}\,\delta_{j\alpha} = 0$, ce qui établit (16) dans ce cas.

* Si $j \neq k$, le seul terme qui contribue à la somme au membre de gauche de (16) est celui tel que (i, j, k) est une permutation de $(1, 2, 3)$. Supposons cette permutation paire pour fixer les idées, donc $\varepsilon_{ijk} = 1$.

Alors $\varepsilon_{i\alpha\beta}$ est non nul seulement si $\{\alpha, \beta\}$ est égal (globalement) à l'ensemble $\{j; k\}$.

* Si ce n'est pas le cas alors le membre de gauche de (16) est toujours nul. Si $\{\alpha, \beta\} \neq \{j, k\}$ alors α ou β est égal au troisième indice i, donc est différent à la fois de j et de k. Supposons que cet indice est α pour fixer les idées. Alors $\delta_{j\alpha} = 0$ et $\delta_{k\alpha} = 0$; donc le membre de droite de (16) est nul dans ce cas et la relation est encore vraie.

* Si les paires $\{\alpha, \beta\}$ et $\{j, k\}$ sont égales, alors ($j = \alpha$ et $k = \beta$) ou bien ($j = \beta$ et $k = \alpha$). Dans le premier cas, $\varepsilon_{i\alpha\beta} = \varepsilon_{ijk} = 1$ donc le membre de gauche de (16) vaut 1. Par ailleurs $\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\delta_{k\alpha} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$, ce qui établit la relation dans ce nouveau cas.
Dans le second cas, $j = \beta$ et $k = \alpha$, donc $\varepsilon_{i\alpha\beta} = -1$.
Par ailleurs $\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\delta_{k\alpha} = 0 - 1 \times 1 = -1$.
La relation (16) est encore vraie.

* Si $j \neq k$ et (i, j, k) permutation impaire de $(1, 2, 3)$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ et la preuve se mène comme ci-dessus. Elle est laissée au lecteur.

$\square$

Prop (5) Double réduction du produit.

Si on contracte la relation (16) une fois de plus, on a

(17) $\quad \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ij\beta} = 2\,\delta_{k\beta}, \quad 1 \leq k, \beta \leq 3.$

avec sommation sur i et j au membre de gauche de (17)

Preuve.

On fait $\alpha = j$ dans la relation (16) :

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ij\beta} = \delta_{jj}\,\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\,\delta_{kj}.$$

or $\delta_{jj} = \sum_j \delta_{jj} = 3$ et $\delta_{j\beta}\,\delta_{kj} = \sum_j \delta_{kj}\,\delta_{j\beta} = \delta_{k\beta}$

compte tenu de (11) et du fait que le produit de la matrice identité par elle-même est égal à la matrice identité. Donc

$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ij\beta} = 3\delta_{k\beta} - \delta_{k\beta} = 2\delta_{k\beta}$ et (17) est établie. $\square$

Exercices

- Double produit vectoriel.
  Montrer que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) + \vec{v}\,(\vec{u}\cdot\vec{w})$.

- Rotationnel du rotationnel.
  Si $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est un champ scalaire $\vec{\nabla} U$ désigne le vecteur dont la i^e composante vaut $\partial_i U = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}$ et ΔU le scalaire obtenu par sommation diagonale des dérivées secondes :
  $$\Delta U = \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} = \sum_j \partial_j^2 U = \sum_j \partial_j \partial_j U = \partial_j \partial_j U .$$
  Si $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs, $\mathrm{div}\,\vec{\varphi}$ est un champ scalaire défini par
  $\mathrm{div}\,\vec{\varphi} = \sum_j \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} = \partial_j \varphi_j$ et $\Delta\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs dont la i^e composante est égale à $\Delta \varphi_i$.
  Montrer la relation
  $$\vec{\mathrm{rot}}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi}) = \vec{\nabla}(\mathrm{div}\,\vec{\varphi}) - \Delta\vec{\varphi} .$$

- Que vaut $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = \sum_{i,j,k} (\varepsilon_{ijk})^2$?

Dubois 7 mars 2014