STN2, Analyse Vectorielle.

(5) Dérivation des fonctions de deux variables réelles.

• Si f est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "à une variable", elle est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si la limite de $\frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$ existe dans $\mathbb{R}$; on la note $f'(x)$. Alors si on pose

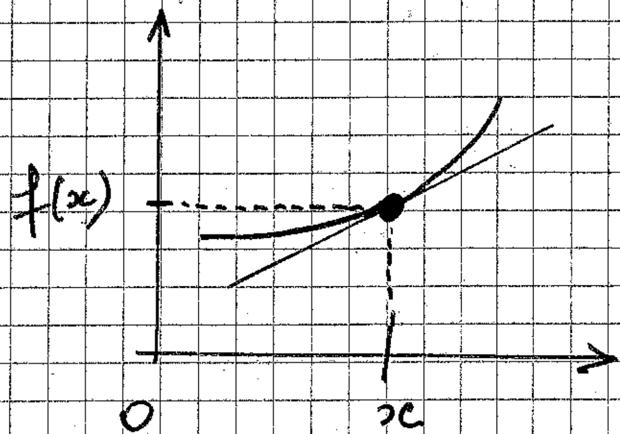


Fig 1.

$$(1) \qquad \varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x), \quad h \neq 0,$$

on a $\varepsilon(h) \to 0$ si $h \to 0$. On peut alors écrire

$$(2) \qquad f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + h\,\varepsilon(h), \quad \varepsilon(h) \underset{\text{si } h \to 0}{\to 0}.$$

La relation (2) exprime que f est <u>différentiable</u> en x. La fonction f est bien approchée par la fonction affine $h \mapsto f(x) + f'(x)\,h$ pour h voisin de zéro (fig 1); géométriquement, la tangente à la courbe réalise cette approximation.

- Réciproquement, si f est différentiable en x, c'est à dire si (2) est satisfaite, alors il est clair que $\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]$ tend vers $f'(x)$ si h tend vers zéro. Donc f est dérivable. Dans le cas des fonctions à une variable, dérivabilité et différentiabilité coïncident.
 On note $df(x)$ la <u>différentielle</u> de f au point $x \in \mathbb{R}$, c'est à dire l'application linéaire qui à $h \in \mathbb{R}$ associe $f'(x)h \in \mathbb{R}$:

(3) $\quad df(x) \cdot h = f'(x)\,h, \quad h \in \mathbb{R}.$

- Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la phénoménologie est un peu plus compliquée. On peut d'abord considérer f comme fonction de <u>l'une</u> des variables, et poser par exemple $y =$ cste. Si la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable au point $x \in \mathbb{R}$, on dit que f a une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$:

(4) $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h,y) - f(x,y)\right]$

On procède de même à x fixé pour l'autre "fonction partielle" $y \mapsto f(x,y)$:

(5) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k \to 0} \dfrac{1}{k}\left[f(x, y+k) - f(x,y)\right]$

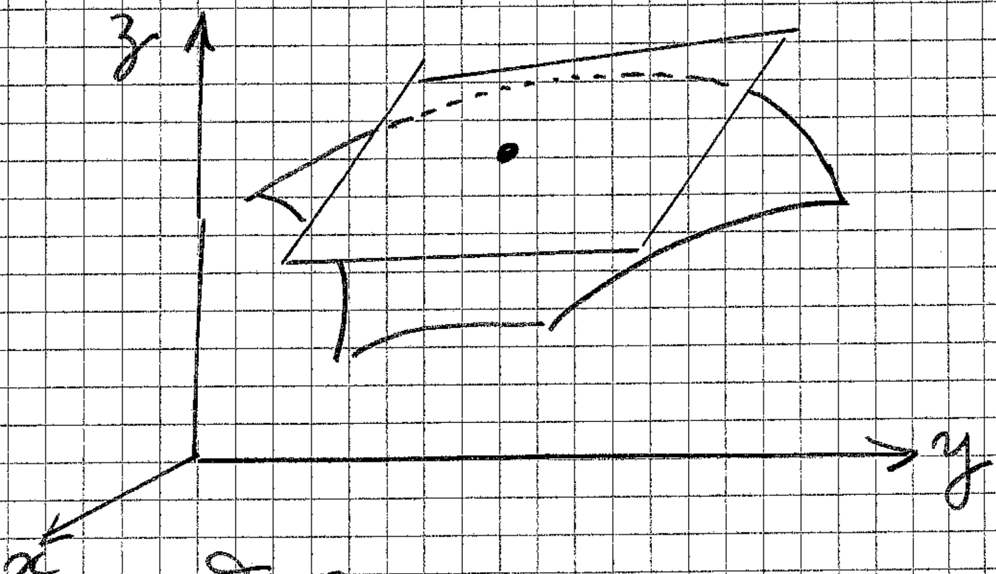


Fig 2.

- Géométriquement, le graphe $z = f(x,y)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface (Fig 2). Si cette surface est régulière, elle dispose d'un plan tangent au point (x,y) et f est bien approchée au voisinage de (x,y) par la valeur $f(x,y)$, plus une fonction linéaire :

(6) $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \alpha h + \beta k + \rho(h,k)$,

où le reste $\rho(h,k)$ tend "assez vite" vers zéro comme il sera précisé plus loin.

- Une difficulté majeure de l'étude des fonctions de deux variables est que l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ (cf (4)(5)) n'entraîne pas un développement de la forme (6) avec un plan tangent! 4

- Etudions l'exemple suivant :

$$(7) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

La fonction f est bien définie pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ car si le dénominateur de la fraction au membre de droite de (7) est nul, on a $(x^4)^2 + (y-x^2)^2 = 0$, donc $x^4 = 0$ et $y = x^2$, donc $x = y = 0$, cas qui ne peut pas se produire par hypothèse.

* Si $y=0$, $f(x,0) = \dfrac{x^5}{x^8+x^4} = \dfrac{x}{1+x^4}$ si $x \neq 0$ et cette expression est encore valable pour $x=0$. On en déduit facilement que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$. De même si $x=0$ et $y \neq 0$, $f(0,y) = 0$ et cette relation est également vraie pour $y=0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Au point $(0,0)$, f dispose de ses deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Mais un développement de type (6)

n'existe pas ! En effet, sur la parabole $y = x^2$, on a $f(x, x^2) = \frac{x^5}{x^8} = \frac{1}{x^3}$ qui est non borné si x tend vers zéro !

(def) Différentiabilité en un point.

On dit que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon(h,k) \in \mathbb{R}$ tels que

$$(8) \quad f(x+h, y+k) = f(x,y) + \alpha h + \beta k + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$$

avec $\varepsilon(h,k)$ qui tend vers zéro si $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro. La différentielle $df(x,y)$ est par définition l'application linéaire "tangente" au point (x,y) décrite à la relation (8) :

$$(9) \quad df(x,y) \bullet (h,k) = \alpha h + \beta k \;, \quad h \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}.$$

L'application $df(x,y)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$; elle transforme le point $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ en le nombre $\alpha h + \beta k \in \mathbb{R}$.

(Prop) Existence de dérivées partielles.

Si f est différentiable au point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent et on a

$$(10) \quad \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

Preuve.

* on fixe y, c'est à dire on suppose $k=0$
Alors

$$f(x+h,y) = f(x,y) + \alpha h + |h|\,\varepsilon(h,0),$$

donc $\frac{1}{h}\left[f(x+h,y) - f(x,y)\right] = \alpha + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h,0)$.

Le rapport $\frac{|h|}{h}$ vaut $+1$ ou -1, donc reste borné et $\varepsilon(h,0)$ tend vers zéro si h tend vers zéro on déduit alors de (4) que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe et le premier terme de (10) est établi.

* La preuve est analogue pour la seconde dérivée partielle. Elle est laissée au lecteur à titre d'exercice.

$\square$

• on peut transformer (9) en utilisant (10) :

$$(11) \quad df(x,y)\cdot(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,k.$$

On applique la relation (11) pour les fonctions régulières $X(x,y) \equiv x$ et $Y(x,y) \equiv y$. On a alors [exercice ?!]

(12) $dX(x,y)\cdot(h,k) = h$; $dY(x,y)\cdot(h,k) = k$

et on peut écrire (11) sous la forme équivalente :

(13) $df(x,y)\cdot(h,k) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dX(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dY(x,y)\right]\cdot(h,k)$.

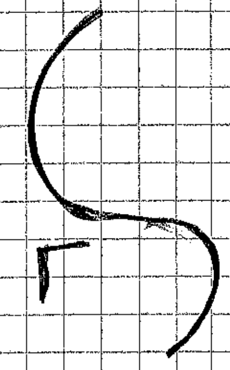
* Les deux applications linéaires $df(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dX(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dY(x,y)$ sont donc <u>égales</u> ; on omet le point (x,y) :

(14) $$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dX + \frac{\partial f}{\partial y}\, dY.$$

Si on confond la lettre X avec x pour écrire la fonction "x" et Y avec y pour la fonction "y", la relation (14) prend la forme classique

(15) $$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

• On se donne maintenant une courbe Γ du plan $\mathbb{R}^2$ (Figure 3), où est également définie une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



<u>Fig 3</u>

on a donc d'une part la fonction
$[a,b] \ni t \mapsto M(t) = (X(t), Y(t)) \in \Gamma$
qui paramètre la courbe Γ (avec $a<b$ deux réels) et d'autre part la fonction de deux variables $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$. On peut donc former la composée $g(t) = f(X(t), Y(t))$ en posant $x = X(t)$, $y = Y(t)$; c'est la fonction f, restreinte à la courbe Γ.

Par exemple pour Γ cercle de rayon 1 paramétré par $(\cos t, \sin t)$ et f fonction polynomiale donnée par $f(x,y) = x^2 - y^2$, on a
$g(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t)^2 - (\sin t)^2 = \cos(2t)$
on peut dériver $g(\cdot)$ sans difficulté dans ce cas et $g'(t) = -2\sin(2t)$. Dans le cas général, on a la proposition suivante

Prop. <u>Dérivée le long d'une courbe</u>

On suppose les fonctions $t \mapsto X(t)$ et $t \mapsto Y(t)$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et $(x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Alors la composée

(16) $\quad g(t) \equiv f(X(t), Y(t))$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

(17) $\quad g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) \dfrac{dX}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) \dfrac{dY}{dt}$.

(R) avec l'abus de notation qui consiste à remplacer la notation g par f_1 la relation (17) peut s'écrire

$$(18) \quad \frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dX}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dY}{dt}$$

on a simplement divisé formellement la différentielle df donnée en (15) par dt !

Preuve de la proposition

* on écrit que les fonctions X et Y sont différentiables en t :

$$(19) \begin{cases} X(t+\theta) = X(t) + \theta X'(t) + \theta\, \varepsilon_x(\theta) \\ Y(t+\theta) = Y(t) + \theta Y'(t) + \theta\, \varepsilon_y(\theta) . \end{cases}$$

* On utilise ensuite la différentiabilité (8) de f_1 avec $h = \theta(X'(t) + \varepsilon_x(\theta))$, $k = \theta(Y'(t) + \varepsilon_y(\theta))$:

$$f(X(t+\theta), Y(t+\theta)) = f(X(t) + h,\ Y(t) + k)$$

$$= f(X(t), Y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial g}{\partial y} k + \sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,k)$$

$$= f(X(t), Y(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}\left[X'(t) + \varepsilon_x(\theta)\right]\theta \ +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}\left[Y'(t) + \varepsilon_y(\theta)\right] + |\theta| \sqrt{(X'(t) + \varepsilon_x)^2 + (Y'(t) + \varepsilon_y)^2} \ \times$$

$$\times\ \varepsilon\left(\theta(X' + \varepsilon_x(\theta)),\ \theta(Y' + \varepsilon_y(\theta))\right)$$

on pose

$$\tilde{\varepsilon}(\theta) \equiv \varepsilon_x(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon_y(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\theta}{|\theta|}\sqrt{\ }\ \varepsilon\big(\theta(X'+\varepsilon_x), \theta(Y'+\varepsilon_y)\big).$$

on a alors

$$f(X(t+\theta), Y(t+\theta)) - f(X(t), Y(t)) =$$

$$\theta\left[\frac{\partial f}{\partial x}X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}Y'(t)\right] + \theta\,\tilde{\varepsilon}(\theta),$$

ce qui montre que g définie à la relation (16) est différentiable et $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ $\square$.

- Dans le cas de l'exemple proposé ex à la page 8, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, donc

$$g'(t) = 2x\frac{dx}{dt} - 2y\frac{dy}{dt} = 2\cos t(-\sin t) - 2\sin t(\cos t)$$

$$= -4\sin t\cos t \quad \text{comme calculé plus haut!}$$

- On généralise le résultat (17) à des fonctions $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$ de deux variables on pose

(20) $\quad g(u,v) = f(X(u,v), Y(u,v))$.

Prop **Dérivées partielles de la fonction composée**

Si les trois fonctions $X(\cdot,\cdot)$, $Y(\cdot,\cdot)$ et $f(\cdot,\cdot)$ sont différentiables, alors la fonction $g(\cdot,\cdot)$

définie par les relations (20) est différentiable; les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$ sont données par les relations

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v} \end{cases}.$$

La preuve de la différentiabilité ressemble à celle faite pages 9 et 10; nous la laissons au lecteur. Quant aux relations (21), il suffit de faire successivement $t = u$ [avec v fixé] puis $t = v$ [avec u fixé] dans la relation (18); on en déduit immédiatement (21). $\square$

- On résume les relations (18) ou (21) à l'aide de la <u>matrice jacobienne</u> de f ou de F telle que

$$(22) \quad F(u,v) = \begin{pmatrix} X(u,v) \\ Y(u,v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Pour $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ différentiable, on pose

$$(23) \quad J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right);$$

c'est une matrice à 1 ligne et 2 colonnes.

Dans le cas $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto F(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on définit la jacobienne $J_F(u,v)$ comme une matrice à 2 lignes et 2 colonnes :

$$(24)\quad J_F(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

* La relation (20) exprime simplement que :

$$(25)\quad g = f \circ F.$$

Alors les relations (21) peuvent s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix},$$ c'est à dire

$$(26)\quad J_g(u,v) = J_f(X(u,v), Y(u,v)) \cdot J_F(u,v)$$

C'est la bonne généralisation de la dérivée $g' = (f' \circ F)\, F'$ pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: la matrice jacobienne de la fonction composée (25) est égale au produit (26) des matrices jacobiennes. Cette relation se généralise sans difficulté aux fonctions à un plus grand nombre de variables et/ou de composantes, pourvu que la composée (25) soit effectivement définie.

Dubois 16 oct 2013.

Exercices

- Si f est une fonction de deux variables, on définit le Laplacien $(\Delta f)(x,y)$ par $\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $f(x,y) \equiv \log r$. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ puis $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Montrer que $\Delta f(x,y) = 0$.

- Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ce qui définit une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $(r,\theta) \mapsto (x,y) \equiv F(r,\theta)$. Calculer la jacobienne J_F. Réciproquement, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit r, θ par $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$. D'où une application $(x,y) \mapsto (r,\theta) \equiv G(x,y)$. Calculer la jacobienne J_G.
Montrer que $J_F \cdot J_G = J_G \cdot J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pouvait-on prévoir le résultat?

- On cherche à expliciter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable de sorte que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)\,f(y)$. Montrer que si f est constante, alors $f(x) = 0$ $\forall x$ ou $f(x) = 1$ $\forall x$. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x+y) = f'(x)\,f(y)$.
En déduire que si f n'est pas constante, on a $f(0) = 1$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = \alpha\, f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Expliciter toutes les fonctions f qui répondent au problème.