le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 12 Filtrage linéaire approfondi

- Circuit RC

On reprend l'étude du filtre RC. Maintenant, la tension d'entrée $u(t)$ peut être une distribution. De même, la tension de sortie $y(t)$ doit être recherchée dans l'espace des distributions. Le filtre T transforme le signal $u(t)$ en un nouveau signal $y(t)$: $y = T\,u$. L'équation différentielle qui relie l'entrée et la sortie reste inchangée : $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$.
On a vu que la solution générale de cette équation peut s'écrire $u = h * u$ avec la réponse impultionnelle $h(t)$ donnée par l'expression suivante $h(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ en fonction des données et de la fonction de Heaviside H.

- Réponse impulsionnelle ou solution élémentaire

La relation "entrée-sortie" $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$ du filtre RC doit être considérée au sens des distributions. Si on injecte la fonction $y(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ dans cette équation, il vient (c'est un exercice sur la dérivation des fonctions au sens des distributions !) : $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$, masse de Dirac en zéro.
Réciproquement, si on cherche une distribution h solution de l'équation différentielle
$RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$, on trouve nécessairement comme unique solution la réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$. Cette fonction porte alors bien son nom : c'est la réponse (la sortie) du filtre lorsqu'on se donne comme entrée l'impulsion δ de Dirac.
La preuve de se résultat est relativement délicate. Si on teste l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$ contre une famille de fonctions de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de support de plus en plus concentré autour d'un point $t \neq 0$, on en déduit que la distribution h est en fait une fonction qui vérifie l'équation différentielle $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = 0$ dans le domaine $t < 0$ et dans le domaine $t > 0$. Par suite, $h(t) = \alpha\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ si $t < 0$. Si $\alpha \neq 0$, la fonction h a un comportement exponentiel pour $t < 0$. Elle n'est donc pas à croissance lente et rien n'établit alors que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est effectivement définie pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Cette fonction exponentielle croît trop vite pour pouvoir être considérée comme une distribution. Donc $\alpha = 0$ et la fonction h est causale. Pour $t > 0$, on a de la même façon $h(t) = \beta\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ avec une constante β qu'il convient de déterminer.
Si on teste l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$ contre une famille de fonctions centrées autour de l'origine, on doit nécessairement avoir la discontinuité $[h]_0 \equiv h(0^+) - h(0^-)$ de la fonction h à l'origine qui vérifie $RC\,[h]_0 = 1$. On en déduit que $RC\,\beta = 1$ et on trouve de cette façon l'expression $h(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$ de la réponse impulsionnelle, appelée également solution élémentaire de l'équation différentielle.

François Dubois, décembre 2022.

- Fonction de transfert

Par définition, la fonction de transfert d'un filtre est la tranformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle. Un calcul de $\widehat{h}(\omega)$ à partir de l'expression donnée au paragraphe précédent est laissé au lecteur. Mais on peut mener un calcul direct à partir de l'équation d'évolution. En effet, on déduit de la relation d'entrée-sortie linnéaire $y = h * u$ l'expression entre les transformées de Fourier : $\widehat{y} = \widehat{h}\,\widehat{u}$.

Pour mener un calcul direct de la fonction de transfert, on remarque que la transformée de Fourier de la dérivée de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ est égal à $i\omega\widehat{y}(\omega)$. Donc si on prend la transformée de Fourier de la relation $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$ qui définit le filtre, il vient $RC\,i\omega\,\widehat{y}(\omega) + \widehat{y}(\omega) = \widehat{u}(\omega)$ qu'on peut encore écrire $[1 + RC\,i\omega]\,\widehat{y}(\omega) = \widehat{u}(\omega)$. Le rapport $\widehat{h}(\omega) \equiv \frac{\widehat{y}(\omega)}{\widehat{u}(\omega)}$ est donc donné par l'expression $\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{1+RC\,i\omega}$.

- Filtre linéaire différentiel

On généralise le filtre RC au cas général d'une sortie $y(t)$ donnée en fonction de l'entrée $u(t)$ par l'équation différentielle linéaire suivante : $\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k\,\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{j=0}^{p} a_j\,\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j}$.

Le filtre RC est un cas particulier très simple de filtre linéaire différentiel. On a en effet dans ce cas $q = 1$, $b_0 = \frac{1}{RC}$, $p = 0$ et $a_0 = \frac{1}{RC}$.

Deux polynômes sont associés à cette équation différentielle : $P(X) = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$ et $Q(X) = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$.

- Fonction de transfert d'un filtre linéaire différentiel

Avec les notations précédentes, la fonction de transfert $\widehat{h}$ du filtre linéaire T défini par l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k\,\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{j=0}^{p} a_j\,\frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j}$ a une expression donnée par la relation $\widehat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$.

Il suffit d'appliquer une transformation de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, apres avoir remarqué que $\big(\mathscr{F}\big(\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\big)\big)(\omega) = (i\omega)^k\,\widehat{y}(\omega)$.

- Réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire différentiel

Avec les notations précédentes, on suppose de plus que la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ n'a que des pôles simples et qu'ils ne sont pas situés sur l'axe imaginaire pur. En d'autres termes, les racines z_k du polynôme Q sont simples et on une partie réelle toujours non nulle. On décompose la fraction $\frac{P(X)}{Q(X)}$ en éléments simples : $\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{\ell=0}^{p-q} \alpha_\ell X^\ell + \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{X - z_k}$. Alors la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre linéaire T peut s'écrire
$h(t) = \sum_{\ell=0}^{p-q} \alpha_\ell\,\delta^{(\ell)} + \sum_{k,\,Re z_k<0} \beta_k \exp(z_k t)\,H(t) - \sum_{k,\,Re z_k>0} \beta_k \exp(z_k t)\,H(-t)$.

Exercices

- Deux transformées de Fourier

On note H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$.

a) Montrer que pour z nombre complexe de partie réelle strictement négative, on a pour $\omega \in \mathbb{R}$, $[\mathscr{F}(H(t)\exp(zt))](\omega) = \frac{1}{i\omega - z}$.

b) De façon analogue, montrer que si z est de partie réelle strictement positive, on a

$[\mathscr{F}(H(-t)\exp(zt))](\omega) = \frac{1}{z-i\omega}$.

- Transformée de Fourier des dérivées de la masse de Dirac

De façon très génerale, la dérivée d'une distribution T est donnée par la relation $< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$ quand on la fait agir sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la dérivée $n$ième $\delta^{(n)}$ de la masse de Dirac agit sur une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ selon $< \delta^{(n)}, \varphi > = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

b) En déduire que la transformée de Fourier de la dérivée $n$ième de la masse de Dirac est un monôme : $[\mathscr{F}(\delta^{(n)})](\omega) = (i\omega)^n$.

- Convolution par les dérivées de la masse de Dirac

On rappelle que pour calculer le produit de convolution $T * U$ des distributions T et U contre une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on calcule d'abord la fonction test auxiliaire $\psi(x) = < U_{(y)}, \varphi(x+y) >$, où $U_{(y)}$ signifie que la distribution U agit sur la variable y. Si la fonction ψ introduite plus haut appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide, on peut calculer $< T * U, \varphi > \equiv < T, \psi >$.

Démontrer que l'on a les relations suivantes $(\delta * T)^{(n)} = \delta^{(n)} * T = \delta * T^{(n)} = T^{(n)}$ pour une distribution quelconque $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

- Réponse impulsionnelle d'un oscillateur harmonique amorti

On se donne des constantes m, C et k strictement positives et un signal causal $u(t)$. On cherche la solution distribution $y(t)$ de l'équation différentielle $my'' + Cy' + ky(t) = u(t)$.

a) Quels sont les polynômes $P(X)$ et $Q(Y)$ introduits en cours ?

b) Montrer que si C est assez petit, les pôles de la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ sont de partie réelle strictement négative.

On introduit les notations classiques $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pour la pulsation propre et ξ pour le coefficient d'amortissement qui vérifie $C = 2m\omega_0\xi$ avec $0 < \xi < 1$.

c) Exprimer les pôles z_+ et z_- de la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ en fonction de ω_0 et ξ.

d) Montrer que la réponse impulsionnelle $h(t)$ solution de $mh'' + Ch' + kh(t) = \delta$ admet l'expression suivante : $h(t) = \frac{1}{m\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} H(t) \exp(-\omega_0 \xi t) \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$.

- Filtre harmonique

On note δ la masse de Dirac en zéro. On cherche une fonction h de la forme $h(t) = g(t)H(t)$ où g est une fonction du temps et H la fonction de Heaviside.

a) Montrer que si $h(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{1}{\omega_0^2} h''(t) + h(t) = \delta$, alors elle s'écrit nécessairement $h(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t) H(t)$.

b) On se donne un signal d'entrée u causal. Montrer que la solution causale du filtre harmonique, c'est à dire la distribution y telle que $\frac{1}{\omega_0^2} y''(t) + y(t) = u(t)$, peut s'écrire $y = h * u$.

c) Expliquer pourquoi les développements théoriques proposés en cours ne s'appliquent pas pour le filtre harmonique.

d) Montrer que si le signal d'entrée $u(t)$ est en résonance avec la pulsation propre ω_0 du filtre, alors la sortie $y = h * u$ est un signal non borné. On pourra faire le calcul avec le signal d'entrée $u(t) = H(t)\sin(\omega_0 t)$. $\qquad [y(t) = \frac{1}{2} H(t) (\sin \omega_0 t - \frac{t}{2} \cos \omega_0 t)]$

• Signaux analogiques [février 2013]

Dans cet exercice, la lettre T désigne un réel strictement positif et P_T la fonction “porte” : $P_T(t) = 1$ si $|\,t\,| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|\,t\,| > \frac{T}{2}$. On introduit aussi un réel strictement positif a et on pose $Q(t) = 1$ si $|\,t-a\,| \leq \frac{T}{2}$ et $Q(t) = 0$ si $|\,t-a\,| > \frac{T}{2}$. De plus, on désigne par $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier : $(\mathscr{F} f)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\,\omega\,t)\, \mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} P_T)(\omega)$?

b) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} Q)(\omega)$?

c) Si δ_a désigne la masse de Dirac au point a, montrer que l'on a $\delta_a * P_T = Q$.

d) Quelle est l'expression de la transformée de Fourier $\mathscr{F} \delta_a$ de la masse de Dirac au point a ?

e) Déduire de la question précédente et de la relation $\delta_a * P_T = Q$ nouveau calcul de la transformée de Fourier $\mathscr{F} Q$ de la fonction Q.

• Signaux analogiques [avril 2013]

Dans cet exercice, la lettre T désigne un réel strictement positif et P_T la fonction “porte” : $P_T(t) = 1$ si $|\,t\,| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|\,t\,| > \frac{T}{2}$. De plus, on désigne par $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier : $(\mathscr{F} f)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \exp(-i\,\omega\,t)\, \mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} P_T)(\omega)$?

b) Quelle relation classique existe-t-il entre $\int_{-\infty}^{\infty} |\,(\mathscr{F} P_T)(\omega)\,|^2 \, \mathrm{d}\omega$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |\,P_T(t)\,|^2 \, \mathrm{d}t$?

c) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\,(\mathscr{F} P_T)(\omega)\,|^2 \, \mathrm{d}\omega$ peut s'exprimer en fonction de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\,\frac{\sin\theta}{\theta}\,|^2 \, \mathrm{d}\theta$.

d) Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} |\,\frac{\sin\theta}{\theta}\,|^2 \, \mathrm{d}\theta$.