le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 10 Transformée de Fourier des distributions

• Multiplication d'une distribution par une fonction régulière "à croissance lente"
Une fonction régulière à croissance lente est par définition une fonction ψ indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont au plus à croissance polynomiale : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_k et un entier $\ell_k \in \mathbb{N}$ de sorte que pour tout t de valeur absolue assez grande, $|\psi^{(k)}(t)| \leq C_k \, |t|^{\ell_k}$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, le produit $\psi\,\varphi$ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ [exercice !]. On définit le produit de la distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par la fonction à croissance lente ψ *via* son action sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$: $< \psi\, T ,\, \varphi > = < T ,\, \psi\,\varphi >$.

• Transformée de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide
Toute fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide est intégrable : $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Donc toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ a une transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ qu'on peut calculer avec la relation $\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.
On dispose aussi de la transformée de Fourier conjuguée : $\overline{\mathscr{F}}\varphi(\omega) = \widehat{\varphi}(-\omega)$.

• L'espace des fonctions à décroissance rapide est stable par transformation de Fourier
Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier $\mathscr{F}\varphi \equiv \widehat{\varphi}$ appartient également à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$: $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• Inversion de Fourier dans l'espace des fonctions à décroissance rapide
Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors on a aussi $\mathscr{F}\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut écrire la formule de réciprocité de Fourier : $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\, t)\, \widehat{\varphi}(\omega)\, \mathrm{d}\omega$. Donc $(\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F})(\varphi) = (\mathscr{F}{\circ}\overline{\mathscr{F}}(\varphi) = 2\pi\,\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
On définit l'opérateur identité id de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\mathrm{id}(\varphi) = \varphi$. On a alors une égalité entre opérateurs : $\overline{\mathscr{F}}{\circ}\mathscr{F} = \mathscr{F}{\circ}\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Par suite, dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, l'opérateur inverse de la transformée de Fourier est, à un facteur 2π près, l'opérateur de Fourier conjugué : $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$.

• Dualité de la transformation de Fourier
Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a la relation suivante entre nombres réels :
$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \widehat{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t$. La preuve demande simplement une utilisation soignée du théorème de Fubini.

• Transformée de Fourier des distributions
On se donne une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Par définition, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}T \equiv \widehat{T}$ agit sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ selon la relation $< \widehat{T} ,\, \varphi > = < T ,\, \widehat{\varphi} >$. On peut bien sûr écrire aussi $< \mathscr{F}T ,\, \varphi > = < T ,\, \mathscr{F}\varphi >$.

François Dubois, novembre 2022.

• Cohérence de la définition de la transformée de Fourier des distributions

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, on a vu lors de la leçon précédente qu'elle définit une distribution que nous notons encore pour quelques lignes T_f : $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Si de plus $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la relation de dualité $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \widehat{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t$ peut maintenant s'écrire $< T_{\widehat{f}}, \varphi > = < T_f, \varphi >$ qui par définition est égal à $< \widehat{T_f}, \varphi >$, ce pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On en déduit une égalité dans l'espace des distributions : $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La définition de la transformée de Fourier des distributions est cohérente avec la définition de la transformée de Fourier des fonctions.

• Notation

On se donne une fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Dans la suite du cours, nous notons simplement f la distribution T_f : $< f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Alors la notation f' désigne (sauf mention contraire) la dérivée au sens des distributions de la fonction f : $< f', \varphi >= - < f, \varphi' >$ pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ de f au sens des distributions est elle aussi toujours définie et on a simplement $< \mathscr{F} f, \varphi >= < f, \mathscr{F} \varphi >$.

• Transformée de Fourier de la masse de Dirac

On rappelle que $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On a alors en utilisant la définition de la transformée des distributions $\widehat{\delta} = 1$: pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $< \widehat{\delta}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.

On peut illustrer cette propriété avec ce que l'on sait de la tranformée de Fourier des fonctions et de l'approximation de la masse de Dirac par des fonctions simples. Si on approche δ par la famille de fonctions δ_ε définies par $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\delta_\varepsilon(t) = 0$ sinon, on a par un calcul classique vu à la leçon d'introduction de la transformée de Fourier, $\widehat{\delta_\varepsilon}(\omega) = \mathrm{sinc}\big(\frac{\varepsilon\,\omega}{2}\big)$. Cette fonction converge simplement vers la fonction “un” si ε tend vers zéro.

• Transformée de Fourier de la masse de Dirac au point a

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$, $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$. Alors la distribution $\mathscr{F} \delta_a$ est en fait une fonction et $(\mathscr{F} \delta_a)(t) = \exp(-i\,a\,t)$. On a aussi $(\overline{\mathscr{F}} \delta_a)(t) = \exp(i\,a\,t)$.

Avec cette définition, les polynômes prennent un sens dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions.

• Inversion de Fourier dans l'espace des distributions

On se donne l'opérateur identité id de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par la relation $\mathrm{id}\, T = T$ pour toute distribution T. La transformation de Fourier des distributions $\mathscr{F}$ satisfait aux relations entre opérateurs : $\overline{\mathscr{F}} {\circ} \mathscr{F} = \mathscr{F} {\circ} \overline{\mathscr{F}} = 2\pi\, \mathrm{id}$. Dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions, l'opérateur inverse de la transformée de Fourier est, à un facteur 2π près, l'opérateur de Fourier conjugué : $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathscr{F}}$.

On a alors $\mathscr{F}(\exp(i\,a\,t)) = 2\pi\, \delta_a$, $\mathscr{F}(\cos(a\,t)) = \pi\, (\delta_a + \delta_{-a})$ et $\mathscr{F}(\sin(a\,t)) = \frac{\pi}{i}\, (\delta_a - \delta_{-a})$.

• Peigne de Dirac

On se donne $a > 0$ et on définit le peigne de Dirac de pas a à l'aide de la relation $\Delta_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\,a}$. En action contre une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $< \Delta_a, \varphi >= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k\,a)$. On laisse au lecteur [exercice !] le soin de vérifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k\,a)$ est absolument convergente si la fonction φ est à décroissance rapide.

- Formule sommatoire de Poisson

Pour $T > 0$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(kT) = \frac{1}{T} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}\big(\frac{2\ell\pi}{T}\big)$. En termes de distributions, $\Delta_T = \frac{1}{T} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \exp\big(\frac{2i\pi\ell}{T}\big)$.

- Convolution des distributions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution $f * g$ est défini (presque partout) par la relation $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$. On le teste contre une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'on évalue l'intégrale $< f*g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. On a en appliquant le théorème de Fubini : $< f*g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, g(t)\, \varphi(t+\theta)$. On pose $\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \varphi(t+\theta)\, \mathrm{d}t$ et on a : $< f*g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \psi(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

Pour passer aux distributions, les fonctions f et g sont remplacées par des distribution T et U. La relation précédente se généralise en $< T*U, \varphi >=< T, \psi >$ avec une fonction ψ telle que $\psi(\theta) =< U, \varphi_\theta >$ et $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$.

Attention ! La convolution $T*U$ des distributions T et U n'est pas toujours définie. Pour calculer $< T*U, \varphi >$, on suit l'algorithme suivant :

(i) définir une nouvelle fonction $\varphi_\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$

(ii) faire agir U sur cette fonction : $\psi(\theta) =< U, \varphi_\theta >$

(iii) si la fonction ψ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas toujours vrai !) alors il suffit de faire agir T sur la fonction ψ et $< T*U, \varphi >=< T, \psi >$. Si la fonction ψ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, le processus s'arrête et le produit de convolution $T*U$ n'est pas défini.

- La masse de Dirac est un élément neutre pour la convolution

Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, les produits de convolution $T*\delta$ et $\delta*T$ sont bien définis et on a $T*\delta = \delta*T = T$.

Exercices

- Inversion de Fourier pour les distributions

Soit $\mathscr{F}$ l'opérateur de Fourier et $\overline{\mathscr{F}}$ l'opérateur de Fourier conjugué.

a) Rappeler leurs définitions lorsqu'ils opèrent sur des fonctions intégrables. Rappeler ce que valent les composées $\mathscr{F}_\circ\overline{\mathscr{F}}$ et $\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F}$ lorsque l'on travaille dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions très régulières à décroissance rapide.

b) Sachant que pour une distribution T et une fonction test φ on a $< \mathscr{F}T\, , \varphi > \equiv < T\, , \mathscr{F}\varphi >$ et $< \overline{\mathscr{F}}T\, , \varphi > \equiv < T\, , \overline{\mathscr{F}}\varphi >$, montrer que pour toute distribution T, on a l'identité $\overline{\mathscr{F}}\big(\mathscr{F}T\big) = 2\pi T$.

c) En déduire que $\overline{\mathscr{F}}_\circ\mathscr{F}$ est proportionnel à la transformation identité dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions.

- Transformée de Fourier des fonctions circulaires

Soit a un nombre réel.

a) Rappeler le raisonnement qui permet de calculer les transformées de Fourier de l'exponentielle complexe et des fontions sinus et cosinus.

b) Montrer que $\mathscr{F}\big(\exp(i\,a\,t)\big) \,=\, 2\,\pi\,\delta_a$.

c) Montrer que $\mathscr{F}\big(\cos(a\,t)\big) \,=\, \pi\,\big(\delta_a + \delta_{-a}\big)$.

d) Montrer enfin que $\mathscr{F}\big(\sin(a\,t)\big) \,=\, \frac{\pi}{i}\,\big(\delta_a - \delta_{-a}\big)$.

- Distribution de dérivée nulle

On cherche à montrer que si une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ a une dérivée (au sens des distributions !) identiquement nulle, alors c'est une fonction constante. On se donne $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ de sorte que $T' = 0$.

a) Montrer qu'alors on a $< T,\, \psi >= 0$ pour toute fonction $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle.

b) Si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est d'intégrale nulle, on pose $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que cette fonction φ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

c) On se donne $\chi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ de sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ définie par $\psi(x) = \varphi(x) - \big(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\big)\,\chi_0(x)$ est d'intégrale nulle.

d) En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $T = C$, c'est à dire pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $< T,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} C\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

- Distribution nulle après multiplication par la fonction "t"

On cherche à montrer que si une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ vérifie $t\,T(t) = 0$, c'est à dire $< T, t\,\varphi(t) >= 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors elle est proportionnelle à la masse de Dirac : il existe $a \in \mathbb{R}$ de sorte que $T = a\,\delta$. On se donne $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ de sorte que $t\,T(t) = 0$.

a) Montrer qu'alors on a $< T,\, \psi >= 0$ pour toute fonction $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ nulle en zéro.

b) Si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est nulle en zéro, on pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}\,\psi(x)$. Montrer que cette fonction φ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

c) On se donne $\chi_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ de sorte que $\chi_0(0) = 1$. Montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ définie par $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(0)\,\chi_0(x)$ est nulle en zéro.

d) En déduire qu'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $T = a\,\delta$, c'est à dire pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $< T,\, \varphi >= a\,\varphi(0)$.

e) Vérifier que si $T = \delta$, on a bien $t\,T(t) = 0$.

- Valeur principale de Cauchy

Pour une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ on pose $< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\, \varphi > \equiv \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \,+\, \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que cette limite existe bien et que l'on a $< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\, \varphi >= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que l'on a la relation $x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = 1$ au sens des distributions en la testant sur une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, sachant que $< x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\, \varphi > \equiv < \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,,\, \psi >$ avec $\psi(t) = t\,\varphi(t)$.

- Transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy

On admet que pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a
$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\xi \, \sin(\xi\, t)\, \varphi(\xi) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}\xi \, \varphi(\xi) \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \sin(\xi\, t)$.

a) Sachant que l'intégrale classique $\int_0^\infty \frac{\sin(\theta)}{\theta}\mathrm{d}\theta$ vaut $\frac{\pi}{2}$, montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} \sin(\xi\, t)$ de l'identité précédente vaut $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\xi)$, où $\mathrm{sgn}(\xi) = 1$ si $\xi > 0$ et $\mathrm{sgn}(\xi) = -1$ si $\xi < 0$.

b) En déduire le calcul de la transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy : $\mathscr{F}\big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big) = -i\pi\,\mathrm{sgn}$.

- Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside

a) Reprendre l'exercice précédent pour établir que $\overline{\mathscr{F}}\big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big) = i\pi\,\mathrm{sgn}$.

b) En déduire que $\mathscr{F}\big(\mathrm{sgn}\big) = -2i\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

c) Après avoir remarqué que la fonction de Heaviside peut s'écrire $H \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}$, en déduire sa transformée de Fourier : $\widehat{H} = \pi\,\delta - i\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.