

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 9 Introduction aux distributions

- Dérivation de la fonction valeur absolue

On pose $v(t) = |t|$. On sait que pour t non nul, cette fonction est dérivable et sa dérivée $v'(t)$ est égale à la fonction “signe” définie par $\operatorname{sgn} t = 1$ si $t > 0$ et $\operatorname{sgn} t = -1$ si $t < 0$. On peut constater [exercice !] que, même si la valeur absolue n’est pas dérivable en zéro, la relation fondamentale du calcul différentiel : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ reste valable pour cette fonction ; en particulier, $v(t) = + \int_0^t \operatorname{sgn} \theta d\theta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Dérivation de la fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside H satisfait aux relations $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t > 0$. Elle n’est pas dérivable en zéro mais elle l’est en tout autre point $t \neq 0$ et $H'(t) = 0$ si $t \neq 0$. Pourtant, si on calcule l’expression $\int_0^t H'(\theta) d\theta$, on ne retrouve pas $H(t)$ pour tout t ! Il manque “quelque chose” à la dérivée de la fonction de Heaviside.

- Valeur ponctuelle ou fonction test ?

On se donne (pour fixer les idées) une fonction bornée $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Si φ est une fonction intégrable ($\varphi \in L^1(\mathbb{R})$), l’intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ est un nombre réel bien défini. La question posée est la suivante : à partir de toutes les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ pour une certaine famille de fonctions de test, peut-on caractériser complètement la fonction f ? Au lieu de voir une fonction f comme une famille de nombres réels $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, on la considère comme une famille de nombres $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ pour une famille de “fonctions test” φ .

- Fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Le mathématicien Laurent Schwartz (1915-2002) a proposé un espace de fonctions test $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui a permis de généraliser la notion de fonction en toute rigueur mathématique. Une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} appartient à l’espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites. D’une part, la fonction φ est indéfiniment dérivable et on note $\varphi^{(k)}$ la dérivée k^o de la fonction φ . D’autre part la fonction φ est à décroissance rapide : la fonction φ et toutes ses dérivées $\varphi^{(k)}$ tendent vers zéro à l’infini plus vite que tout polynôme ; pour tout entier k et tout entier ℓ , l’expression $t^\ell \varphi^{(k)}(t)$ tend vers zéro si $|t|$ tend vers l’infini.

- Fonctions gaussiennes

On se donne $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La fonction gaussienne $\varphi_{\theta, \sigma}$ centrée au point θ et d’écart type σ (ou de variance σ^2) est définie par $\varphi_{\theta, \sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$. Elle appartient à l’espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Et c’est encore vrai de toutes ses dérivées $\varphi_{\theta, \sigma}^{(k)}$. Toutes les fonctions $\varphi_{\theta, \sigma}^{(k)}$ sont des fonctions test que nous utilisons dans la suite de cette leçon. On remarque aussi [exercice !] que l’on a $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\theta, \sigma}(t) dt = 1$.

- L'espace des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide est stable par dérivation C'est une propriété fondamentale qui est conséquence immédiate de la définition de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors sa dérivée φ' appartient également à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En d'autres termes, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \varphi' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- Convergence dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide La notion de convergence dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est délicate et nous n'entrerons pas dans le cadre de ce cours dans les difficultés techniques liées à cette question. Afin d'être complets, notons simplement qu'une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers la fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout k et ℓ entiers, les fonctions $t \mapsto t^\ell \varphi_n^{(k)}(t)$ convergent uniformément vers la fonction $t \mapsto t^\ell \varphi^{(k)}(t)$. En d'autres termes, pour tout k et ℓ entiers, la norme $\|t^\ell \varphi_n^{(k)}(t) - t^\ell \varphi^{(k)}(t)\|_\infty$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

- Action d'une fonction contre une fonction test

Comme toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ décroît plus vite vers zéro à l'infini que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge à l'infini, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt$ est bien définie et $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$: $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Donc pour $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ est bien définie. On l'appelle "action de la fonction f contre la fonction test φ " et on la note $\langle T_f, \varphi \rangle$. Par définition, $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$; c'est une simple intégrale convergente.

- Les actions contre toutes les fonctions test permettent de déterminer les valeurs ponctuelles On se donne une fonction f bornée "inconnue" pour laquelle on se donne toutes les actions $\langle T_f, \varphi \rangle$ pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors la fonction f est parfaitement connue; les valeurs $f(t)$ sont connues pour (presque) tout $t \in \mathbb{R}$.

On peut se convaincre de cette propriété pour une fonction continue au point θ . Dans ce cas, la valeur numérique $f(\theta)$ apparaît comme la limite des intégrales $\langle T_f, \varphi_{\theta, \sigma} \rangle$ pour σ tendant vers zéro.

- Distribution

Une distribution T généralise l'opération d'intégration proposée avec l'intégration T_f . Une distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ associe à toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ le nombre $\langle T, \varphi \rangle$. Deux conditions doivent être satisfaites: la linéarité et la continuité. De façon précise, l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ est linéaire: $\langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle$ si φ et ψ sont deux fonctions test et $\langle T, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$ si λ est un nombre réel. De plus, si la suite $\varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers la fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors la suite numérique $\langle T, \varphi_n \rangle$ converge vers $\langle T, \varphi \rangle$ lorsque n tend vers l'infini.

Deux distribution T et U sont égales si et seulement si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a égalité des nombres $\langle T, \varphi \rangle$ et $\langle U, \varphi \rangle$.

Bien entendu, si f est une fonction bornée, l'opération T_f définit une distribution avec la relation $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ [exercice !]. Mais il existe aussi des distributions qui ne se réduisent pas à des intégrales fonctionnelles de la forme $\langle T_f, \varphi \rangle$.

- Dérivée d'une fonction au sens des distributions

Si f est une fonction bornée dérivable dont la dérivée f' est également bornée, on peut calculer l'intégrale $\langle T_{f'}, \varphi \rangle$ à l'aide d'une intégration par parties. Il vient alors

$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = - \langle T_f, \varphi' \rangle$, ce pour toute fonction test. On constate que même si la fonction f n'est pas dérivable, le nombre $-\langle T_f, \varphi' \rangle$ a un sens pour toute fonction test. Cette relation définit la dérivée $(T_f)'$ au sens des distributions. Par définition, la distribution $(T_f)'$ "dérivée de f au sens des distributions" agit sur une fonction test φ via la relation $\langle (T_f)', \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle$.

Dans le cas où la fonction f est dérivable, une intégration par parties montre que l'on a [exercice !] $(T_f)' = T_{f'}$ et la dérivée au sens des distributions est alors simplement l'intégration de la dérivée contre une fonction test.

- Dérivée de la fonction de Heaviside au sens des distributions

Si on applique la définition précédente à la fonction de Heaviside, on obtient [exercice !]

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = \varphi(0) \text{ pour toute fonction test.}$$

- Masse de Dirac δ .

On peut vérifier que l'application $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{R}$ est bien une distribution. C'est par définition la masse de Dirac δ et on a $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$.

La dérivée de la fonction de Heaviside au sens des distributions peut maintenant s'écrire $(T_H)' = \delta$ dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ des distributions. Cette égalité signifie que simplement que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\langle (T_H)', \varphi \rangle = \varphi(0)$.

- Approximation de la masse de Dirac par une famille de fonctions

On définit, pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction δ_ε par la relation $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$

et $\delta_\varepsilon(t) = 0$ si $|t| > \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $\langle T_{\delta_\varepsilon}, \varphi \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(t) dt$ est exactement la valeur moyenne de la fonction φ sur l'intervalle $]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$. Comme la fonction test φ est continue en zéro, la valeur moyenne converge vers $\varphi(0)$ si ε tend vers zéro [exercice !]. Les (distributions associées aux) fonctions δ_ε approchent la masse de Dirac.

- La masse de Dirac n'est pas une fonction

Il n'existe pas de fonction f de sorte que $T_f = \delta$, c'est à dire telle que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on ait $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$. Si une telle fonction existe, elle est nécessairement nulle. Mais alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ est nulle pour toute fonction test φ et ne peut donc valoir $\varphi(0)$ si l'"ordonnée à l'origine" de la fonction φ est non nulle.

Les distributions généralisent véritablement la notion de fonction. Toute fonction définit une distribution. De plus, il existe des distributions qui ne se réduisent pas à des fonctions !

- Dérivée d'une distribution

Nous avons vu que si la distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est de la forme $T = T_f$ pour une certaine fonction f , on a la relation $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Si maintenant T est une distribution quelconque, le nombre $-\langle T, \varphi' \rangle$ peut être calculé pour toute fonction test. Par définition, il est égal à l'action de la distribution dérivée T' contre la fonction test φ : $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$.

Toute distribution est indéfiniment dérivable au sens de cette définition. En conséquence, toute fonction est indéfiniment dérivable au sens des distributions !

- Dérivée au sens des distributions d'une fonction qui a un point de discontinuité

On se donne une fonction f bornée très régulière sauf au point $\theta \in \mathbb{R}$. En ce point, la fonction f est discontinue mais elle a une limite à gauche y_- et une limite à droite y_+ . On note $[f]_\theta \equiv y_+ - y_-$ le saut de la fonction f au point θ . On définit aussi la masse de Dirac δ_θ au point θ par la relation $\langle \delta_\theta, \varphi \rangle = \varphi(\theta)$. En particulier, $\delta_0 = \delta$, masse de Dirac en zéro. De plus, on note f' la dérivée de f , définie partout sauf au point θ . On a $\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \varphi(t) dt$. Alors la dérivée de la fonction f au sens des distributions $(T_f)'$ peut s'exprimer en fonction de la dérivée classique f' et de la masse de Dirac au point θ : $(T_f)' = T_{f'} + [f]_\theta \delta_\theta$.

- Epilogue sur la valeur absolue et la fonction de Heaviside

Pour l'exemple de la valeur absolue, la fonction $v(t)$ est continue à l'origine et seule la dérivée classique (la fonction signe) contribue pour construire la dérivée au sens des distributions. Dans le cas de la fonction de Heaviside au contraire, la dérivée classique est nulle, le saut de la fonction au point de discontinuité est égal à 1 et on a $(T_H)' = \delta_0$.

Exercices

- Dérivées de la valeur absolue

Soit v la fonction "valeur absolue": $v(t) = -t$ pour $t \leq 0$ et $v(t) = t$ pour $t \geq 0$.

- Calculer la dérivée de v au sens des distributions et montrer qu'elle coïncide avec la dérivée usuelle.
- Poursuivre la question précédente avec l'évaluation de la dérivée seconde de la fonction v au sens des distributions.

- Equation différentielle du premier ordre

Soit λ un nombre réel (ou complexe !) et H la fonction de Heaviside.

- Calculer au sens des distributions l'expression $(\frac{d}{dt} + \lambda)(H(t) \exp(-\lambda t))$.
- Comparer avec la solution $u(t)$ (qu'on précisera !) de l'équation différentielle du premier ordre $(\frac{d}{dt} + \lambda)(u(t)) = 0$, associée à la condition initiale $u(0) = 1$.

- Dérivée de la masse de Dirac

On rappelle que la masse de Dirac δ est définie par son action sur les fonctions-test :

$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. On introduit un nombre réel strictement positif ε "petit" et on approche la masse de Dirac par la fonction χ_ε égale à la fonction porte P_ε multipliée par $\frac{1}{\varepsilon}$:

$\chi_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ pour $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\chi_\varepsilon(t) = 0$ sinon.

- Calculer la dérivée de χ_ε au sens des distributions.
- Montrer que pour une fonction test φ assez régulière fixée, le nombre $\langle \chi_\varepsilon', \varphi \rangle$ converge si ε tend vers zéro vers un nombre qui ne dépend que de la fonction φ .
- Vérifier, en revenant à la définition de la dérivée d'une distribution, que cette limite est égale au nombre $\langle \delta', \varphi \rangle$.

- Equation différentielle du second ordre

Soit ω un nombre réel et H la fonction de Heaviside.

- Calculer au sens des distributions l'expression $(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)(H(t) \frac{\sin \omega t}{\omega})$.
- Comparer avec la solution $\sigma(t)$ de l'équation différentielle du second ordre $(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)(\sigma(t)) = 0$, associée aux conditions initiales $\sigma(0) = 0$ et $\sigma'(0) = 1$.

- Dérivation au sens des distributions [février 2013]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = -t^2$ si $t \leq 0$ et $f(t) = t^2$ si $t > 0$.

- Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa fonction dérivée $\frac{df}{dt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\frac{df}{dt}$ est une fonction continue sur \mathbb{R} et dérivable sauf pour $t = 0$. Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{d^2f}{dt^2}$ au sens des distributions.
- Montrer que $\frac{d^2f}{dt^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de \mathbb{R} .
- Calculer la dérivée troisième $\frac{d^3f}{dt^3}$ au sens des distributions.

- Equation différentielle avec second membre distribution [février 2013]

On pose $f(t) = \exp(-|t|)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

- Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} et dérivable sauf en $t = 0$. Calculer la fonction dérivée $\frac{df}{dt}$.
- Monter en dérivant la dérivée première au sens des distributions que la fonction f vérifie $\frac{d^2f}{dt^2} - f(t) = -2\delta$, où δ désigne la masse de Dirac en zéro.

- Dérivation au sens des distributions [avril 2013]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$ si $0 < t < 1$ et $f(t) = \frac{1}{6}$ si $t \geq 1$.

- Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa fonction dérivée $\frac{df}{dt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.
- Montrer que $\frac{df}{dt}$ est une fonction continue sur \mathbb{R} et dérivable sauf pour $t = 0$ et $t = 1$.
- Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{d^2f}{dt^2}$ au sens des distributions.
- Montrer que $\frac{d^2f}{dt^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de \mathbb{R} .
- Calculer la dérivée troisième $\frac{d^3f}{dt^3}$ au sens des distributions.

- Dérivation au sens des distributions [février 2015]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = 3t^2 - 2t^3$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 1$ si $t > 1$.

- Dessiner rapidement le graphe de la fonction f .
- Montrer qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} .
- Calculer la fonction dérivée $\frac{df}{dt}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.
- Reprendre les trois questions précédentes en s'intéressant cette fois à la fonction dérivée $\frac{df}{dt}$. En particulier, on répondra avec précision à la question de savoir si $\frac{df}{dt}$ est dérivable en $t = 0$ et en $t = 1$.
- Quelle est la dérivée f'' au sens des distributions de la fonction dérivée $\frac{df}{dt}$?

- f) Montrer que c 'est une fonction discontinue en deux points que l'on précisera.
 g) Calculer la dérivée troisième f''' de la fonction f au sens des distributions. Expliquer pourquoi ce n'est pas une fonction.

[si χ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, 1[$, on a $f''' = -12\chi + 6\delta_0 + 6\delta_1$]

- Dérivation au sens des distributions [avril 2015]

Soit $f(t)$ la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) = |t|$ si $-\pi \leq t \leq \pi$.

- a) Calculer sa dérivée f' première au sens des distributions.
 b) La distribution f' est-elle une fonction ?
 c) Justifier votre réponse.
 d) Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f au sens des distributions.

On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. On pose $g(t) = H(t) \exp(-2t)$.

- e) La fonction g est-elle continue ?
 f) Est-elle causale ?
 g) Expliciter, en justifiant vos calculs, la distribution $K = g' + 2g(t)$.

- Dérivation au sens des distributions [février 2016]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = -1$ si $t < -\frac{\pi}{2}$, $f(t) = \sin t$ si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ et $f(t) = +1$ si $t > \frac{\pi}{2}$.

- a) Dessiner le graphe de la fonction f .
 b) Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .
 c) Préciser sa fonction dérivée f' et
 d) Dessiner le graphe de la fonction f' .
 e) La fonction f' est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?
 f) Justifier avec soin votre réponse.
 g) Calculer la dérivée seconde f'' (c'est à dire la dérivée de la fonction f') de la fonction f au sens des distributions.
 h) Justifier avec soin votre réponse.

- Dérivation au sens des distributions [février 2017]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = t(1-t)$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$.

- a) Dessiner le graphe de la fonction f .
 b) Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
 c) Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , sauf en certains points que l'on précisera.
 d) Calculer la dérivée de f au sens des distributions.
 e) Calculer la dérivée seconde de f au sens des distributions.
 f) Est-ce une fonction ?