

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 8 Transformation de Fourier

- Définition

On se donne une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Notons que sauf exception, on suppose la fonction f à valeurs complexes: $f(t) \in \mathbb{C}$. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt$ est bien défini puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto \hat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f . On la note aussi $\mathcal{F}f$ et on a $(\mathcal{F}f)(\omega) = \hat{f}(\omega)$.

- Exemples fondamentaux

On se donne $a > 0$. L'exponentielle causale φ_a est définie par $\varphi_a(t) = H(t) \exp(-at)$. C'est une fonction intégrable sur \mathbb{R} : $\varphi_a \in L^1(\mathbb{R})$ et on a $\hat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$.

Pour $a > 0$, l'exponentielle causale symétrisée ψ_a s'écrit: $\psi_a(t) = \exp(-|a|t)$. C'est une fonction paire qui est identique à φ_a si $t \geq 0$. On a $\hat{\psi}_a(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$. Nous retenons que $(\mathcal{F}(\exp(-a|t|)))(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$.

Pour $T > 0$, la porte P_T de largeur T satisfait aux contraintes suivantes: $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq T/2$ et $P_T(t) = 0$ lorsque $t < -T/2$ ou $t > T/2$. Son intégrale sur \mathbb{R} est bien entendu finie [$P_T \in L^1(\mathbb{R})$] et on a $\hat{P}_T(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Sinus cardinal

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ nombre réel différent de zéro, on pose $\text{sinc } \theta = \frac{\sin \theta}{\theta}$. On prolonge cette fonction par continuité en $\theta = 0$: $\text{sinc } 0 = 1$. Alors $\hat{P}_T(\omega) = T \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Parité

On remarque que si f est paire, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est paire également [exercice].

- Linéarité

Si les fonctions f et g sont intégrables, leur somme est aussi intégrable et on a $\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$. Si λ est un nombre complexe arbitraire et $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}f$.

- Transformée de Fourier d'un retard et retard de la transformée de Fourier

On se donne $a \in \mathbb{R}$. Alors $(\mathcal{F}(f(t-a)))(\omega) = \exp(-ia\omega) (\mathcal{F}f)(\omega)$. De façon analogue, si ω_0 est un réel arbitraire, $(\mathcal{F}f)(\omega - \omega_0) = (\mathcal{F}(\exp(i\omega_0 t) f(t)))(\omega)$.

- Changement d'échelle

On se donne $a > 0$. Alors $(\mathcal{F}(f(at)))(\omega) = \frac{1}{a} (\mathcal{F}f)\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

- Une condition suffisante de limite nulle à l'infini

On se donne une fonction f dérivable de sorte que f et sa dérivée f' appartiennent toutes deux à l'espace $L^1(\mathbb{R})$: $\int_{-\infty}^{\infty} (|f(t)| + |f'(t)|) dt < \infty$. Alors la fonction f tend vers zéro à l'infini: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$.

- Transformée de Fourier de la dérivée

Si la fonction f et sa dérivée f' sont intégrables sur \mathbb{R} , alors $(\mathcal{F}(f'))(\omega) = i\omega(\mathcal{F}f)(\omega)$.

- Dérivée de la transformée de Fourier

On suppose que les fonctions f et $\mathbb{R} \ni t \mapsto tf(t) \in \mathbb{C}$ appartiennent à l'espace $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|t|)|f(t)| dt$ converge. Alors la transformée de Fourier

$\mathbb{R} \ni \omega \mapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction dérivable et on a $\frac{d\widehat{f}}{d\omega} = -i(\mathcal{F}(tf(t)))(\omega)$.

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux intégrables sur \mathbb{R} . Alors leur produit de convolution $f * g$ appartient également à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ et on a $\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.

- Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions intégrables

On se donne une fonction intégrable à valeurs complexes : $f \in L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire

$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$. On a vu à la leçon précédente que pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe

$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt$ est bien défini puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$. De plus, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ de la fonction f est définie par la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est bornée

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$. En d'autres termes, $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro à l'infini

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ tend vers zéro lorsque ω tend vers $+\infty$ ou ω tend vers $-\infty$.

Nous constatons que la propriété est vraie pour les trois exemples fondamentaux introduits lors de la leçon précédente, à savoir l'exponentielle causale $\varphi_a(t) = H(t) \exp(-at)$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a(t) = \exp(-a|t|)$ et la porte P_T égale à 1 si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et à zéro sinon [avec $a > 0$ et $T > 0$]. On a en effet $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}$, $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ et $\widehat{P}_T(\omega) = T \operatorname{sinc}(\frac{\omega T}{2})$; ces trois fonctions tendent bien vers zéro si $|\omega|$ tend vers l'infini.

- La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \mapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction continue de l'argument ω . On a dans ce cas $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

On laisse le lecteur vérifier cette propriété pour les trois exemples fondamentaux rappelés ci-dessus.

- Opérateur de Fourier conjugué

Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathcal{F}}$ par l'expression

$(\overline{\mathcal{F}}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t) f(t) dt$. Seul le signe de ω dans l'exponentielle complexe a changé.

On a la relation $(\overline{\mathcal{F}}f)(\omega) = (\mathcal{F}f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (première formulation)

Si d'une part la fonction f est intégrable ($f \in L^1(\mathbb{R})$) et si de plus sa transformée de Fourier \hat{f} est également intégrable ($\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$), alors on peut représenter la fonction f à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega$ et cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$ (pour tout réel t dans les applications en ingénierie). On peut écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi} (\overline{\mathcal{F}}\hat{f})(t)$ ou $f(t) = \frac{1}{2\pi} (\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f))(t)$.

Seul le second exemple fondamental permet de tester ce théorème d'inversion de Fourier puisque les fonctions $\hat{\varphi}_a$ et \hat{P}_T n'appartiennent pas à $L^1(\mathbb{R})$ [exercice !]. On a par contre $\hat{\psi}_a \in L^1(\mathbb{R})$ [exercice] et le théorème d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas particulier

$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{\pi}{a} \exp(-a|t|)$. On constate qu'on a calculé avec des fonctions élémentaires l'intégrale d'une fonction [ici $\exp(i\omega t)/(a^2 + \omega^2)$] dont la primitive ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires.

L'égalité ponctuelle $f(t) = \frac{1}{2\pi} (\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f))(t)$ peut s'écrire aussi $f(t) = \frac{1}{2\pi} ((\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})f)(t)$ pour tout réel t , c'est à dire $((\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})f)(t) = 2\pi f(t)$. On en déduit donc une égalité entre fonctions $(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})f = 2\pi f$ pour toute fonction intégrable dont la transformée de Fourier \hat{f} est également intégrable.

- D'où vient le facteur 2π dans la formule d'inversion de Fourier ?

Nous proposons dans les lignes qui suivent une explication heuristique de la relation

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega$. Nous nous donnons $T > 0$ et une fonction $f \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$. Nous disposons des coefficients de Fourier $a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-\frac{2ik\pi t}{T}) dt$ et du développement de la fonction f en série de Fourier : $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \exp(\frac{2ik\pi t}{T})$. Nous introduisons la variable de Fourier $\omega = \frac{2k\pi}{T} = k \frac{2\pi}{T}$. Comme $k \in \mathbb{Z}$, le nombre ω est un multiple entier du "pas discret" $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Nous pouvons donc écrire

$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} \exp(-ik\Delta\omega t) (\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta) \exp(-ik\Delta\omega \theta) d\theta)$ et puisque $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \Delta\omega$,
 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta\omega \exp(-ik\Delta\omega t) (\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta) \exp(-ik\Delta\omega \theta) d\theta)$. Si T tend vers $+\infty$,
 l'intégrale $\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta) \exp(-ik\Delta\omega \theta) d\theta$ tend vers $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \exp(-ik\Delta\omega \theta) d\theta$, c'est à dire la transformée de Fourier $\hat{f}(k\Delta\omega)$ pour $\omega = k\Delta\omega$ et $f(t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Delta\omega \exp(ik\Delta\omega t) \hat{f}(k\Delta\omega)$.

Mais si T tend vers l'infini le pas discret $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ tend vers zéro et la somme précédente $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(ik\Delta\omega t) \hat{f}(k\Delta\omega) \Delta\omega$ converge vers l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega$. Par un calcul formel (qui n'est pas une démonstration !), nous avons obtenu la relation de Fourier qui explicite la fonction grâce à sa transformée de Fourier : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{f}(\omega) d\omega$.

- Inverse de l'opérateur de Fourier

On note dans ce paragraphe \mathcal{E} l'espace des fonctions intégrables dont la transformée de Fourier \hat{f} est également intégrable. Alors l'égalité précédente $(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})f = 2\pi f$ est vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$. On en déduit que l'opérateur $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}$ transforme la fonction f en elle même, à un facteur 2π près. Si on appelle "identité" l'opérateur $\mathcal{E} \ni f \mapsto \text{id}f = f \in \mathcal{E}$, la relation $(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})f = 2\pi \text{id}f$ valable pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$ peut aussi s'écrire comme une relation entre opérateurs de l'espace \mathcal{E} : $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = 2\pi \text{id}$. Quand on compose les opérateurs \mathcal{F} et $\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}$, on trouve l'identité : $(\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}) \circ \mathcal{F} = \text{id}$. On peut montrer [exercice !] qu'on a aussi $\mathcal{F} \circ (\frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}) = \text{id}$. En d'autres termes, $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la

transformée de Fourier est égal à l'opérateur de Fourier conjugué !

- Approximation des fonctions dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$

Si on se donne une fonction de carré intégrable ($f \in L^2(\mathbb{R})$), elle n'est pas en général intégrable sur \mathbb{R} . Mais si on la tronque en posant pour k entier positif, $f_k = P_{2k} f$, c'est à dire $f_k(t) = f(t)$ si $|t| \leq k$ et $f_k = 0$ sinon, on obtient une suite de fonctions dans l'espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Cette suite f_k converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$: $\|f - f_k\|_2$ tend vers zéro si k tend vers l'infini.

- Transformée de Fourier dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$

Comme la suite f_k appartient à $L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier \widehat{f}_k est bien définie via la relation $\widehat{f}_k(\omega) = \int_{-k}^k \exp(-i\omega t) f(t) dt$. On peut montrer que cette suite \widehat{f}_k appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ et converge dans cet espace vers une fonction notée \widehat{f} ou $\mathcal{F}f$ qui définit la transformation de Fourier dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour "presque tout" $\omega \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k \exp(-i\omega t) f(t) dt.$$

On constate que la définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas aussi immédiate que dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$. Elle a de toutefois de nombreuses propriétés, très simples à énoncer.

- Conservation, à un facteur 2π près, du produit scalaire

On rappelle que pour deux fonctions f et g de carré intégrables, le produit scalaire

$$(f, g) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \text{ est bien défini. On a la relation de Bessel-Parseval : } (\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi (f, g).$$

A un facteur 2π près, la transformation de Fourier conserve le produit scalaire. Dans le cas où $f = g$, cette conservation du produit scalaire s'écrit comme une conservation des normes :

$$(\widehat{f}, \widehat{f}) = \|\mathcal{F}f\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2 = 2\pi (f, f).$$

- Opérateur de Fourier conjugué dans $L^2(\mathbb{R})$

On étend comme dans le cas précédent la transformée de Fourier conjuguée à l'espace $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-k}^k \exp(i\omega t) f(t) dt. \text{ On a également, pour } f \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(\omega) = (\mathcal{F}f)(-\omega).$$

- Théorème d'inversion de Fourier (seconde formulation)

On a dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ les relations suivantes entre l'opérateur de Fourier \mathcal{F} et l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathcal{F}}$: $\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = 2\pi \text{id}$. On peut aussi écrire ces relations sous la forme $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable est égal à l'opérateur de Fourier conjugué.

On en déduit que pour toute fonction f de carré intégrable, on a $f = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}})(f)$ et on a aussi $f = \frac{1}{2\pi} (\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F})(f)$. En particulier pour (presque) tout nombre réel t , on a les égalités $f(t) = \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}f))(t)$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi} (\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f))(t)$. On ne peut ensuite écrire ces égalités avec des intégrales que si les fonctions f et $\mathcal{F}f$ sont intégrables.

- Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide du théorème d'inversion de Fourier

Pour la fonction porte, on se donne $T > 0$. On déduit [exercice !] des égalités précédentes la relation $\mathcal{F}(\text{sinc}(\frac{\omega T}{2}))(t) = \frac{2\pi}{T} P_T(t)$. En particulier pour $T = 2$, $(\mathcal{F} \text{sinc})(t) = \pi$ si $|t| < 1$ et $(\mathcal{F} \text{sinc})(t) = 0$ si $|t| > 1$. Grâce au théorème d'inversion de Fourier, on a calculé la transformée de Fourier du sinus cardinal sans jamais écrire une seule intégrale !

Exercices

- Transformation de Fourier du sinus cardinal

On se donne $T > 0$ et on note P_T la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$.

- a) Quelle est sa transformée de Fourier ?

Pour t réel, on définit le sinus cardinal $\text{sinc}(t)$ par la relation $\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$.

- b) En choisissant bien le paramètre T , calculer la transformée de Fourier du sinus cardinal.

- Autour de la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy

Pour t réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

- a) A l'aide de la transformée de Fourier conjuguée de la fonction $\exp(-a|t|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$.

- b) En déduire la transformée de Fourier conjuguée de la fonction $g(t) = \frac{1}{10+6t+t^2}$.

- c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

- Quelques intégrales

- a) A partir des résultats du premier exercice sur la transformation de Fourier, expliciter la transformée de Fourier du carré du sinus cardinal, c'est à dire de la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$.

- b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

- c) Même question pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt$.

- d) Préciser, selon les valeurs du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$, les valeurs prises par l'intégrale $I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos(\omega t) dt$.

- Transformation de Fourier [février 2014]

On se donne un réel a strictement positif et la fonction f définie par $f(t) = \exp(-a|t|)$.

- a) Quelle est l'expression de $(\mathcal{F}f)(\omega)$?

- b) Rappeler pourquoi la fonction $(\mathcal{F}f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.

- c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.

- d) Pour t réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$ est bien définie.

- e) A l'aide de quel opérateur est-elle reliée à la fonction g ?

- f) Calculer une expression analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel t .

- Transformation de Fourier [février 2015]

On note P_T la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$. On note f le produit de convolution $f = P_T * P_T$.

- a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{P_T}(\omega)$ de la porte P_T .

- b) Montrer que la fonction f admet l'expression suivante :

$$f(t) = T - |t| \text{ si } |t| \leq T, \quad f(t) = 0 \text{ si } |t| > T.$$

- c) Représenter graphiquement la fonction f .

- d) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f . Appartient-elle à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables ?

On désigne par sinc la fonction sinus cardinal : $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$.

- e) Calculer en fonction de t les valeurs de l'intégrale $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sinc}(\frac{\omega T}{2}))^2 \exp(i\omega t) d\omega$.
 f) En déduire une expression analytique de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sinc}(\theta))^2 d\theta$.

• Convolution et transformation de Fourier [avril 2016]

On se donne un nombre réel τ strictement positif et la fonction f définie par $f(t) = \exp(-|t|/\tau)$. On remarque que $f(t) = \exp(t/\tau)$ si $t \leq 0$ et $f(t) = \exp(-t/\tau)$ si $t \geq 0$.

- a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f .
 b) En déduire la valeur de l'intégrale $I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$.
 c) Que vaut $I(0)$?
 d) Pouvait-on prévoir le résultat par une autre méthode ?
 e) Montrer que le produit de convolution $\varphi(t) \equiv (f * f)(t)$ est une fonction paire de l'argument t .
 f) Si t est positif ou nul, calculer le produit de convolution $\varphi(t) = (f * f)(t)$.
 g) Quelle est l'expression de $\varphi(t)$ si t est un réel quelconque ?
 h) Que vaut $\varphi'(0)$?
 i) Calculer l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la fonction φ .
 j) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} d\omega$.

• Transformation de Fourier [février 2017]

On pose $\varphi(t) = \exp(-|t|)$.

- a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur \mathbb{R} .
 b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.
 c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction paire.
 d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t .
 e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier \widehat{f} de ce produit de convolution.
 f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{(1+\omega^2)^2} d\omega$ pour tout nombre réel t .

• Transformation de Fourier [avril 2017]

On pose $\varphi(t) = \exp(-t)$ si $t > 0$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \leq 0$.

- a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur \mathbb{R} .
 b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.
 c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction causale, c'est à dire que $f(t) = 0$ si $t < 0$.
 d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t .
 e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier \widehat{f} de ce produit de convolution.
 f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{(1+i\omega)^2} d\omega$ pour tout nombre réel t .