le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 5 Filtrage linéaire

- Circuit électrique "RC"

On se donne une résistance $R>0$ et une capacité $C>0$. On les monte en série. On désigne par $u(t)$ la tension d'entrée aux bornes extrêmes du circuit et par $v(t)$ la tension de sortie aux bornes de la capacité. Sachant que l'on branche le circuit à l'instant initial $t=0$, comment calculer les valeurs du signal $v(t)$ en fonction du signal d'entrée $u(t)$?

On fait appel à ses connaissances d'électricité générale. On peut introduire le courant $i(t)$ dans le circuit. On a alors grâce à la loi d'Ohm $u(t)=R\,i(t)+v(t)$. D'autre part, on peut relier la charge $q(t)$ aux variables précédentes puisque $i(t)=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q(t)=C\,v(t)$. On en déduit une relation différentielle qui permet de calculer l'évolution de la tension de sortie $v(t)$ en fonction de la tension d'entrée $u(t)$: $RC\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v(t)=u(t)$. Il ne reste plus qu'à préciser les conditions initiales.

- Signal causal

Un signal analogique $u(t)$ défini comme fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est appelé causal si les valeurs $u(t)$ sont nulles pour $t<0$.

- Condition initiale pour le circuit "RC"

On suppose que l'on branche le circuit à l'instant initial $t=0$. Du point de vue du modèle mathématique, on peut supposer la tension d'entrée nulle pour tous les instants t négatifs. En d'autres termes, le signal d'entrée u est causal.

D'autre part, si le signal d'entrée est nul avant le branchement, il est naturel de supposer le signal de sortie nul également pour les $t<0$. On suppose de plus le signal de sortie v fonction continue du temps. On déduit la condition initiale $v(0)=0$.

- Système dynamique

La résolution de la dynamique $RC\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v(t)=u(t)$ avec la condition initiale $v(0)=0$ n'offre alors pas de difficulté. On part de la solution générale de l'équation homogène qui peut s'écrire $v(t)=\varphi\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$. Puis on fait varier la constante $\varphi=\varphi(t)$. On déduit de l'équation d'évolution la relation $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{RC}\,u(t)\exp\big(\frac{t}{RC}\big)$. De plus $\varphi(0)=0$ car $v(0)=0$. Donc
$\varphi(t)=\frac{1}{RC}\int_0^t\exp\big(\frac{\theta}{RC}\big)\,u(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $v(t)=\frac{1}{RC}\int_0^t\exp\big(\frac{-(t-\theta)}{RC}\big)\,u(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. On a exprimé la sortie du circuit électrique en fonction de l'entrée avec une intégrale.

- Filtre linéaire

Le circuit électrique est un cas particulier de filtre linéaire. Par définiion, un filtre linéaire T est une fonctionnelle qui à un signal d'entrée u associe un signal de sortie $v\equiv T(u)$ [noté aussi $v=Tu$ quand il n'y a pas ambiguité sur la notation] de sorte que la réponse $v=T(u)$ est une

---

François Dubois, octobre 2020.

fonction linéaire de u. On a donc $T(u+v) = Tu + Tv$ pour tous les signaux d'entrée u et v. De plus, si α est un nombre fixé, on a $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.
Remarquer ici qu'un filtre est d'un ordre de grandeur plus complexe qu'une fonction ou un signal. En effet, une fonction f associe à un argument t, qui est en général un nombre, un nouveau nombre $f(t)$. Un filtre T associe à une fonction u ou "signal d'entrée" une nouvelle fonction v ou "signal de sortie". Un filtre est une application (on dit aussi une fonctionnelle) où les éléments de départ et d'arrivée ne sont plus des nombres mais des fonctions !

- Réponse impulsionelle du filtre "RC"

Le circuit électrique "RC" constitue un exemple de filtre linéaire, appelé parfois "filtre RC". On introduit la fonction de Heaviside H et la fonction h, appelée réponse impulsionelle du filtre "RC", définie par la relation $h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$. Compte tenu du fait que l'entrée u et la réponse impulsionnelle h sont toutes deux des fonctions causales, la sortie v du filtre "RC" peut s'écrire $v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\theta)\, u(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

- Convolution

Si on se donne deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, le produit de convolution $f * g$ est une nouvelle fonction définie par la relation $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$.
Si on se donne un signal h, l'application $u \longmapsto v = h * u$ définit un filtre linéaire. Un cas particulier important est le filtre "RC" introduit plus haut.

- Commutativité de la convolution

On a $f*g = g*f$ dès que l'un des deux produits est bien défini.

- Une convolution classique

On définit la porte $\chi(t)$ par la relation $\chi(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $\chi(t) = 0$ sinon. C'est une fonction discontinue en $t = 0$ et $t = 1$. Le "carré de convolution" $\chi * \chi$ permet d'expliciter une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de type "chapeau chinois". On a $\chi*\chi(t) = 0$ si $t \leq 0$, $\chi*\chi(t) = t$ si $0 \leq t \leq 1$, $\chi*\chi(t) = 2-t$ pour $1 \leq t \leq 2$ et $\chi*\chi(t) = 0$ lorsque $t \geq 2$.

- Filtre à entrée bornée et sortie bornée

Un filtre linéaire T est à entrée bornée et sortie bornée si pour tout signal borné ($u \in \mathrm{L}^\infty$), la sortie $v = Tu$ est encore bornée : $v \in \mathrm{L}^\infty$. De plus, le filtre T est stable ; la norme de la sortie est contrôlée par la norme de l'entrée et il existe une constante $C \geq 0$ qui ne dépend pas du signal d'entrée telle que pour tout signal borné $u \in \mathrm{L}^\infty$, $\|Tu\|_\infty \leq C\, \|u\|_\infty$.

- Convolution par un signal intégrable

On se donne un signal $h \in \mathrm{L}^1$ intégrable : $\|h\|_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. Alors le filtre T défini par la convolution $Tu \equiv h*u$ est linéaire. De plus, il est à entrée bornée et sortie bornée et on a $\|Tu\|_\infty \leq \|h\|_1\, \|u\|_\infty$. La constante de stabilité C peut être précisée : $C = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, \mathrm{d}t$.

- Filtre causal

Un filtre causal T transforme par définition un signal causal u en un autre signal causal. Si le filtre T est causal et le signal d'entrée u causal, alors le signal de sortie $v = Tu$ est encore causal.

- Convolution causale

Si le filtre T est défini par la convolution $Tu \equiv h * u$ et si le signal h est causal, alors le filtre T est causal. Nous retenons aussi que le produit de convolution de deux fonctions causales est une fonction causale.

- Notion de réponse impulsionelle

On se donne un filtre défini par convolution : $Tu \equiv h * u$ et une famille de signaux d'entrée u_ε de type "percussion", ou "coup de marteau", paramétrée par $\varepsilon > 0$. On pose $u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ si $0 < t < \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ dans les autres cas. On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} u_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Alors $(Tu_\varepsilon)(t)$ est exactement la valeur moyenne de la réponse impulsionnelle sur l'intervalle $]t-\varepsilon, t[$. Si ε tend vers zéro, $(Tu_\varepsilon)(t)$ converge vers $h(t)$.
Si $\varepsilon \longrightarrow 0$, u_ε se rapproche de plus en plus d'une "impulsion" : signal d'entrée dont l'intégrale vaut 1 tel que l'ensemble des points où le signal est non nul est de plus en plus réduit. La réponse à un signal de plus en plus voisin de cette impulsion se rapproche de plus en plus de la réponse à cette impulsion, appelée pour cette raison "réponse impulsionnelle".

- Dérivation sous le symbole d'intégration

On se donne une fonction de deux variables $\psi(t, \theta)$ définie pour t et θ réels. On suppose que la fonction partielle relativement à θ est intégrable sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t, \theta)|\,\mathrm{d}\theta < \infty$, que la fonction ψ est dérivable par rapport à la première variable et que la dérivée partielle est dominée, c'est à dire qu'il existe une fonction positive $g(\theta)$ indépendante de t et intégrable (on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\theta)|\,\mathrm{d}\theta < \infty$) de sorte que $|\frac{\partial\psi}{\partial t}(t, \theta)| \leq g(\theta)$ pour tout t et essentiellement pour tout θ. Alors la fonction de t définie en intégrant ψ par rapport à θ est fonction dérivable de t et on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t, \theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t, \theta)\,\mathrm{d}\theta$. On a pu échanger le symbole de dérivation par rapport à t et le symbole d'intégration par rapport à θ.

- Dérivation d'un produit de convolution

Si le produit de convolution $f * g$ est tel que la fonction g est une fonction dérivable et qu'on peut appliquer la règle de dérivation précédente à la fonction $\psi(t, \theta) = f(\theta)\,g(t-\theta)$, alors le produit de convolution $f * g$ est une fonction dérivable et on a $(f*g)' = f * g'$.
Dans le cas où la fonction f est dérivable, on a $(f*g)' = f' * g$. Pour dériver un produit de convolution, on dérive l'un ou l'autre facteur. On remarque que cette règle de dérivation est encore plus simple que la règle de Leibniz de dérivation d'un produit ordinaire de deux fonctions !

Exercices

- Signal intégrable

On note H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$.
Montrer que le signal défini pour t réel par $h(t) = \frac{1}{RC}\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)\,H(t)$ est un signal intégrable : $\int_{\mathbb{R}} |\,h(t)\,|\;\mathrm{d}t \,<\, \infty$.

• Causalité

On se donne une fonction h et le filtre T défini par son action sur un signal analogique u : $Tu = h * u.$ Montrer que si la réponse impulsionnelle h est causale, c'est à dire $h(t) = 0$ dès que $t < 0,$ il en est de même du filtre $T.$

• Parité

Soit f une fonction paire et g une fonction impaire. On suppose que le produit de convolution $f * g$ est bien défini.

a) Montrer que le produit de convolution $f * g$ est une fonction impaire.

b) Reprendre la question lorsque f et g sont toutes deux paires.

c) Même question si f et g sont toutes deux impaires.

• Dérivation

Soient f et g deux signaux tels que le produit de convolution $f * g$ est bien défini. On suppose f dérivable et le produit de convolution $f' * g$ défini. Quelle relation proposez-vous pour calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f * g\big)$?

• Calcul d'un produit de convolution

On se donne $a > 0$ et la porte χ par les conditions $\chi(t) = 1$ pour $-a < t < a$ et $\chi(t) = 0$ sinon.

a) Calculer le produit de convolution $f = \chi * \sin.$

b) Montrer que c'est une fonction impaire.

c) Pouvait-on prévoir le résultat ?

d) Calculer d'une part la dérivée f' et d'autre part la convolée $g = \chi * \cos.$

e) Pouvait-on prévoir le résultat ?

• Un autre produit de convolution

Si χ désigne la porte introduite à l'exercice précédent et sgn la fonction "signe" définie par $\mathrm{sgn}(t) = 1$ pour $t > 0$ et $\mathrm{sgn}(t) = -1$ pour $t \leq 0.$

a) Calculer le produit de convolution $\chi * \mathrm{sgn}.$

b) Est-il continu ?

c) Est-il dérivable ?

d) Quelle est la valeur de la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\chi * \mathrm{sgn}\big)$ lorsqu'elle est définie ?

e) Les fonction χ et sgn sont-elles continues ?

f) Sont-elles dérivables ?

On note χ' et sgn' les fonctions dérivées lorsqu'elles sont définies,

g) Calculer les produits de convolution $\chi' * \mathrm{sgn}$ et $\chi * \mathrm{sgn}'.$

h) Que constatez-vous ?

• Produit de convolution et équation différentielle

On se donne deux réels $0 < a < b$. On pose $f(t) = \exp(-t\,a)\,H(t)$ où H est la fonction de Heaviside définie au premier exercice de ce chapitre. On pose aussi $g(t) = \exp(-t\,b)\,H(t)$.

a) Calculer le procuit de convolution $f * g$ et représenter graphiquement cette fonction.

b) Même question lorsque $b = a$.

c) En déduire la solution de l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 5\exp(-t\,a)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.

• Convolution [novembre 2013]

On se donne deux nombres réels a et ω et on désigne par H la fonction de Heaviside. On pose
$f(t) = H(t)\,\exp(a\,t)$ et
$g(t) = H(t)\,\exp(i\,\omega\,t)$.

a) La fonction convolée $f * g$ de f et de g est-elle définie ? Est-elle causale ?

b) Calculer pour tout nombre réel t l'expression $\big(f * g\big)(t)$.

c) Pour $a = \omega = 1$ calculer les parties réelle et imaginaire de la fonction $f * g$.

d) En déduire l'expression de la convolée $\big(H(t)\,\mathrm{e}^t\big) * \big(H(t)\,\sin t\big)$.

• Convolution de deux gaussiennes

On admet que pour $\alpha > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\frac{(t-a)^2}{2\alpha^2}\big)\,\mathrm{d}t = \alpha\sqrt{2\pi}$. Pour $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on introduit la gaussienne $g_{\sigma,\mu}$ d'écart type σ de moyenne μ grâce à la relation
$g_{\sigma,\mu}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\big)$.

a) Démontrer que $\int_{-\infty}^{\infty} g_{\sigma,\mu}(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

b) Établir que $g_{s,m} * g_{s',m'} = g_{\sigma,\mu}$ avec $\sigma^2 = s^2 + (s')^2$ et $\mu = m + m'$.