le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 11 Echantillonnage

• Transformée de Fourier du peigne de Dirac

On se donne $a > 0$. Nous avons vu lors de la leçon précédente que le peigne de Dirac $\Delta_a \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\,a}$ peut aussi s'écrire $\Delta_a = \frac{1}{a} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \exp\big(\frac{2i\pi\ell}{a}\big)$. On peut en déduire que la transformée de Fourier du peigne de Dirac est un autre peigne de Dirac : $\widehat{\Delta_a} = \frac{2\pi}{a}\, \Delta_{\frac{2\pi}{a}}$.

• Une propriété de la convolution des fonctions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution $f * g$ est défini (presque partout) par la relation $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$. On le teste contre une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'on évalue l'intégrale $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. On a en appliquant le théorème de Fubini : $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\, \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, g(t)\, \varphi(t+\theta)$. On pose $\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \varphi(t+\theta)\, \mathrm{d}t$ et on a : $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \psi(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

• Convolution des distributions

Pour passer aux distributions, les fonctions f et g sont remplacées par des distribution T et U. La relation précédente se généralise en $< T*U,\, \varphi >=< T,\, \psi >$ avec une fonction ψ telle que $\psi(\theta) =< U,\, \varphi_\theta >$ et $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$.

Attention ! La convolution $T*U$ des distributions T et U n'est pas toujours définie. Pour calculer $< T*U,\, \varphi >$, on suit l'algorithme suivant :

(i) définir une nouvelle fonction $\varphi_\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$

(ii) faire agir U sur cette fonction : $\psi(\theta) =< U,\, \varphi_\theta >$

(iii) si la fonction ψ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas toujours vrai !) alors il suffit de faire agir T sur la fonction ψ et $< T*U,\, \varphi >=< T,\, \psi >$. Si la fonction ψ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, le processus s'arrête et le produit de convolution $T*U$ n'est pas défini.

• La masse de Dirac est un élément neutre pour la convolution

Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, les produits de convolution $T*\delta$ et $\delta*T$ sont bien définis et on a $T*\delta = \delta*T = T$.

• Convolution d'une fonction par la masse de Dirac au point a

On se donne $a \in \mathbb{R}$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La translatée $\tau_a f$ de la fonction f par le "vecteur" a est définie par $\tau_a f(t) = f(t-a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On a alors $f*\delta_a = \delta_a * f = \tau_a f$.

• Signal échantillonné

On se donne un pas d'échantillonnage a et une fonction continue f à croissance lente de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose connues les valeurs $f(ka)$ de la fonction f aux points multiples entiers ka du pas d'échantillonnage a. On appelle signal échantillonné le produit de f par le peigne de Dirac Δ_a : $f\,\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\, \delta_{k\,a}$.

François Dubois, décembre 2017.

- Spectre du signal échantillonné

Quand on échantillonne un signal, on rend périodique sa transformée de Fourier. On se donne $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ continue ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Alors la fransformée de Fourier $\widehat{f\,\Delta_a}$ est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{a}$. On a les deux expressions suivantes $\widehat{f\,\Delta_a}(\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\frac{2\ell\pi\,\omega}{a}\big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\,\exp(-i\,ka\,\omega)$. On a bien $\widehat{f\,\Delta_a}\big(\omega + \frac{2\pi}{a}\big) = \widehat{f\,\Delta_a}(\omega)$.

- Signal à bande limitée

On se donne $\Omega > 0$ et $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On dit que le signal f est à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ si sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est nulle dès que $|\omega|$ est assez grand en valeur absolue :
$|\omega| > \Omega \Longrightarrow \widehat{f}(\omega) = 0$.

- Critère de Nyquist

On dit que le pas d'échantillonnage a respecte le critère de Nyquist pour un signal f à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ si et seulement si $a\,\Omega < \pi$.

- Désaliasing

On se donne un signal f à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ et un pas d'échantillonnage a qui respecte le critère de Nyquist $a\,\Omega < \pi$. Alors la somme $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\frac{2\ell\pi\,\omega}{a}\big)$ ne comporte qu'un seul terme non nul. On a dans ce cas $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\frac{2\ell\pi\,\omega}{a}\big) = \widehat{f}(\omega)$ si $|\omega| \leq \Omega$.
Echantillonner un signal f "replie" le spectre et mélange les fréquences ; on parle alors d'"aliasing". Le critère de Nyquist permet de lever cette indétermination.

- Thérème de Shannon

On se donne une fonction continue f qui appartient aussi à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et on la suppose à bande limitée dans l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$. On échantillonne ce signal avec un pas a qui respecte le critère de Nyquist : $a\,\Omega < \pi$. Alors pour tout réel t, on a $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\,\mathrm{sinc}\big(\big(\frac{t}{a} - k\big)\,\pi\big)$.
La preuve de ce résultat utilise le désaliasing et un préliminaire technique :
$\big(\overline{\mathscr{F}}\big[\exp(-ika\,\omega)\,P_{\frac{2\pi}{a}}(\omega)\big]\big)(t) = \frac{2\pi}{a}\,\mathrm{sinc}\big(\big(\frac{t}{a} - k\big)\,\pi\big)$.
Pour un signal à bande limitée et un échantillonnage qui respecte le critère de Nyquist, on peut reconstruire de manière unique l'ensemble du signal à partir du signal échantillonné. Il n'existe qu'une seule façon d'interpoler entre les valeurs données $f(ka)$ pour k entier, tout en gardant la contrainte de limitation de la bande spectrale.