le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 6 Transformée de Laplace

• Définition

On se donne une fonction causale à valeurs réeles ou complexes : $f(t) = 0$ si $t < 0$. La transformée de Laplace $(\mathscr{L}f)(p)$ de la fonction f pour l'argument p est définie par l'intégrale $(\mathscr{L}f)(p) = \int_0^\infty f(t)\, \exp(-pt)\, \mathrm{d}t$. Le nombre p est *a priori* un nombre complexe mais l'expression $(\mathscr{L}f)(p)$ n'est définie que pour les valeurs de l'argument p pour lesquelles l'intégrale $\int_0^\infty |f(t)|\, |\exp(-pt)|\, \mathrm{d}t$ est finie.

• Transformée de Laplace de la fonction de Heaviside

On rappelle que la fonction de Heaviside H est définie par $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. Comme $|\exp(-pt)| = \exp(-(\mathrm{Re}p)\,t)$ où $\mathrm{Re}p$ est la partie réelle du nombre complexe p, l'intégrale $\int_0^\infty |H(t)|\, |\exp(-pt)|\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \exp(-(\mathrm{Re}p)\,t)\, \mathrm{d}t$ converge pour $\mathrm{Re}p > 0$. On a alors $\int_0^\infty H(t)\, \exp(-pt)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{p}$ et $(\mathscr{L}H)(p) = \frac{1}{p}$ si $\mathrm{Re}p > 0$.

• Fonction à croissance au plus exponentielle

On dit que la fonction causale f est à croissance au plus exponentielle si il existe $\alpha \geq 0$ et $M \geq 0$ de sorte que pour tout $t \geq 0$, $|f(t)| \leq M \exp(\alpha t)$. C'est le bon cadre pour définir la transformée de Laplace.

Si f est à croissance au plus exponentielle, alors $(\mathscr{L}f)(p)$ est bien défini pour $\mathrm{Re}p > \alpha$.

• Transformée de Laplace de l'exponentielle causale

On se donne $a \in \mathbb{C}$. L'exponentielle causale est définie par $\varphi_a(t) = H(t)\, \exp(at)$. Sa transformée de Laplace est définie pour $\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}a$ et on a $(\mathscr{L}\varphi_a)(p) = \frac{1}{p-a}$.

• Transformée de Laplace des fonctions circulaires

Le cas particulier $a = i\,\omega$ de l'exponentielle causale montre que $(\mathscr{L}\cos(\omega t))(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $(\mathscr{L}\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

• Linéarité de la transformée de Laplace

Si $(\mathscr{L}f)(p)$ et $(\mathscr{L}g)(p)$ sont bien définis, il en est de même de $(\mathscr{L}(f+g))(p)$ et $(\mathscr{L}(f+g))(p) = (\mathscr{L}f)(p) + (\mathscr{L}g)(p)$. De façon analogue, si λ est un nombre complexe arbitraire, $(\mathscr{L}(\lambda f))(p) = \lambda\, (\mathscr{L}f)(p)$.

• Retard

On se donne f causale et $a > 0$. Alors $(\mathscr{L}(H(t-a)\, f(t-a)))(p) = \exp(-pa)\, (\mathscr{L}f)(p)$.

• Retard de la transformée de Laplace

On se donne f causale et $a \in \mathbb{C}$. Si les deux nombres $(\mathscr{L}f)(p-a)$ et $(\mathscr{L}(\exp(at)\, f(t)))(p)$ sont bien définis, alors ils sont égaux : $(\mathscr{L}f)(p-a) = (\mathscr{L}(\exp(at)\, f(t)))(p)$.

François Dubois, novembre 2017.

- Changement d'échelle

On se donne f causale et $a > 0$. On a $(\mathscr{L}(f(at)))(p) = \frac{1}{a}(\mathscr{L}f)(\frac{p}{a})$.

- Transformée de Laplace d'une dérivée

On se donne une fonction causale f dérivable pour tout $t \geq 0$ telle que les fonctions f et f' sont à croissance au plus exponentielle. On note $f(0^+)$ la limite de $f(t)$ si t tend vers zéro par valeurs supérieures : $f(0^+) = \lim_{t\to 0, t>0} f(t)$. Alors $(\mathscr{L}(f'(t)))(p) = p\,(\mathscr{L}f)(p) - f(0^+)$. On peut itérer cette relation : $(\mathscr{L}(f''(t)))(p) = p^2\,(\mathscr{L}f)(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$, *etc.*

- Dérivée de la transformée de Laplace

On se donne une fonction causale f à croissance au plus exponentielle : $|f(t)| \leq M \exp(\alpha t)$ pour tout $t \geq 0$ pour une certaine valeur de $M \geq 0$ et une certaine valeur de $\alpha \geq 0$. Alors pour $p > \alpha$, la transformée de Laplace $(\mathscr{L}f)(p)$ est une fonction dérivable de p et on a $\frac{\mathrm{d}(\mathscr{L}f)}{\mathrm{d}p} = (\mathscr{L}(-t\,f(t)))(p)$.
On peut itérer cette relation pour les dérivées d'ordre supérieur et $\frac{\mathrm{d}^n(\mathscr{L}f)}{\mathrm{d}p^n} = (-1)^n\,(\mathscr{L}(t^n\,f(t)))(p)$. En particulier, si on dérive n fois la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside, on obtient : $(\mathscr{L}(t^n\,H(t)))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

- Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Si on se donne deux fonctions causales f et g, on sait que le produit de convolution $f * g$ est encore une fonction causale et pour $t > 0$ on a $(f*g)(t) = \int_0^t f(\theta)\,g(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$. Si f et g sont de plus à croissance au plus exponentielle, il en est de même du produit de convolution $f * g$ et si $\mathrm{Re}p$ est assez grand, on a $(\mathscr{L}(f*g))(p) = (\mathscr{L}f)(p)\,(\mathscr{L}g)(p)$. La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.

- Valeur initiale

On se donne une fonction causale f à croissance au plus exponentielle. Alors $p\,(\mathscr{L}f)(p)$ tend vers $f(0^+)$ si $p \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$.

- Valeur finale

On se donne une fonction causale f telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe. Alors $(\mathscr{L}f)(p)$ est bien défini pour tout $p > 0$ et $p\,(\mathscr{L}f)(p)$ tend vers $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ si $p \in \mathbb{R}$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

- Injectivité de la transformation de Laplace

On se donne un nombre réel $\alpha \geq 0$. Si deux fonctions causales ont même transformée de Laplace $F(p)$ pour tout nombre complexe p tel que $\mathrm{Re}p > \alpha$, alors les fonction f et g sont égales. En d'autres termes, la transformation de Laplace est injective. La fonction f telle que $\mathscr{L}f = F$ est appelée "originale" de la donnée F.

- Résolution analytique d'une équation différentielle modèle

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On cherche $y(t)$ solution du système dynamique suivant : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \alpha\,y(t) = 0$ pour $t > 0$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$. On réécrit ce probleme avec la transformation de Laplace. On multiple l'équation différentielle pour la fonction de Heaviside, on prend la transformée de Laplace de l'ensemble et on pose $Y(p) = (\mathscr{L}(H(t)\,y(t)))(p)$. On obtient alors $p\,Y(p) - y_0 + \alpha\,Y(p) = 0$ et la transformée de Laplace de la solution pour $t > 0$ est complètement explicitée : $Y(p) = \frac{y_0}{p+\alpha}$. Compte tenu de la valeur de la transformée de Laplace de l'exponentielle causale, on en déduit que $y(t) = \exp(-\alpha t)\, y_0$ pour $t > 0$.

- Résolution d'équations différentielles à l'aide de la transformée de Laplace

Dans le cas très général d'équations différentielles linéaires, la méthode précédente permet d'exprimer la transformée de Laplace de la solution sous la forme d'une fraction rationnelle : $Y(p) = \frac{P(p)}{Q(p}$, où P et Q sont des polynômes de la variable p. On doit ensuite décomposer cette fraction sous la forme d'une somme d'"éléments simples". Pour cela, on cherche d'abord les valeurs α_j qui annulent le dénominateur $Q(p)$ (ce sont les "pôles" de la fraction rationnelle), avec leur ordre de multiplicité n_j. On en trouve un nombre k pour fixer les idées. On peut alors écrire la fraction $Y(p)$ sous la forme $Y(p) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n_j} \frac{\beta_{j,m}}{(p-\alpha_j)^m}$ et la valeur de la fonction $y(t)$ originale s'obtient pour $t > 0$ en explicitant les originales des fonctions $\frac{1}{(p-\alpha_j)^m}$ [exercice !].