le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 3 Espaces de fonctions

- Signaux analogiques et signaux numériques

Un signal analogique modélise le temps par un continuum. Si on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, un signal analogique est une fonction f définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.
Un signal numérique considère le temps comme discret, multiple entier d'un pas de temps de référence $\Delta t > 0$. Un signal numérique peut se réduire à une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$.

- Signaux bornés

Un signal borné a des valeurs qui ne peuvent pas sortir d'un intervalle donné. Il existe $M \geq 0$ tel que, pour un signal analogique, $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in I$ et pour un signal numérique, $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les signaux $t \longmapsto \sin(\omega t)$ et $t \longmapsto \cos(\omega t)$ sont bornés sur $\mathbb{R}$. Les signaux $t \longmapsto \exp(t)$ et $t \longmapsto \log(t)$ sont non bornés sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$ respectivement.

- Espaces $\mathrm{L}^\infty(I)$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des signaux bornés

On regroupe tous les signaux bornés sur un intervalle I dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(I)$ défini par $\mathrm{L}^\infty(I) \equiv \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\text{ou}\,\mathbb{C}),\, \exists M \geq 0,\, \forall t \in I,\, |f(t)| \leq M\}$ et l'ensemble des signaux numériques bornés dans l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}) \equiv \{\text{suites}\, u_n\,,\, \exists M \geq 0,\, \forall n \in \mathbb{N},\, |u_n| \leq M\}$.

- Les ensembles $\mathrm{L}^\infty(I)$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sont des espaces vectoriels

La somme $f+g$ de deux fonctions de $\mathrm{L}^\infty(I)$ appartient encore à $\mathrm{L}^\infty(I)$. Le produit λf du nombre λ par la fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(I)$ appartient encore à $\mathrm{L}^\infty(I)$. De même, la somme $u+v$ de deux suites de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et le produit $\lambda\, u$ du nombre λ par la suite $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

- Signaux intégrables

On peut faire "la somme" des valeurs prises par un signal intégrable.
Dans le cas analogique, l'intégrale $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est "convergente", ou finie ; c'est un nombre réel. On écrit $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ pour exprimer cette propriété. Notons aussi que si $f(t)$ est un nombre complexe, $|f(t)|$ est le module du nombre $f(t)$.
Pour un signal numérique intégrable, la série de terme général u_n est absolument convergente : la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ est finie, ce qu'on exprime *via* l'inégalité stricte $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| < \infty$: le symbole $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ n'est pas égal a l'infini, donc c'est un nombre positif fini et la série de terme général $|u_n|$ converge.
Par exemple, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ alors que la fonction $t \longmapsto 1$ ne l'est pas. Attention, si on change l'intervalle pour $]0, 1[$, les propriétés s'inversent. En effet, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ alors que la fonction $t \longmapsto 1$ l'est.

François Dubois, octobre 2017.

• Espaces $\mathrm{L}^1(I)$ et $\ell^1(\mathbb{N})$ des signaux intégrables
On suit la même méthodologie que pour les signaux bornés. On pose
$\mathrm{L}^1(I) \equiv \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C}), \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t\, < \infty\}$ et $\ell^1(\mathbb{N}) \equiv \{\text{suites}\; u_n\,, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\, < \infty\}$. Ce sont aussi des espaces vectoriels : La somme $f+g$ de deux fonctions intégrables est encore intégrable et la somme $u+v$ de deux séries absolument convergentes est encore absolument convergente. Nous laissons au lecteur le soin de preciser ce qui se passe quand on multiplie un signal intégrable par une constante.

• Une inclusion entre espaces fonctionnels : $\mathrm{L}^\infty(0, T) \subset \mathrm{L}^1(0, T)$.
On se donne un réel $T > 0$. Alors toute fonction bornée sur l'intervalle $]0, T[$ est intégrable sur cet intervalle.
Attention, l'hypothese $T < \infty$ est essentielle. Ainsi, les espaces $\mathrm{L}^\infty(0, +\infty)$ et $\mathrm{L}^1(0, +\infty)$ n'ont aucune relation d'inclusion entre eux. Il existe des fonctions bornées qui ne sont pas intégrables à l'infini. De plus, on ne peut même pas affirmer que si une fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$, alors elle tend vers zéro à l'infini ou est bornée [exercice !].

• Une autre inclusion entre espaces fonctionnels : $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.
En effet, toute série absolument convergente tend vers zéro à l'infini, donc elle est bornée.

• Signaux et espaces d'énergie finie
Un signal est d'énergie finie si son carré (ou le carré de son module dans le cas d'un signal à valeurs complexes) est lui-même intégrable.
L'ensemble de tous les signaux analogiques d'énergie finie sur l'intervalle I est noté $\mathrm{L}^2(I)$ et l'ensemble de tous les signaux numériques d'énergie finie $\ell^2(\mathbb{N})$. On a
$\mathrm{L}^2(I) \equiv \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C}), \int_I |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\, < \infty\}$ et $\ell^2(\mathbb{N}) \equiv \{\text{suites}\; u_n\,, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2\, < \infty\}$. On dit pour cette raison qu'un signal d'énergie finie est de carré intégrable. Les ensembles de fonctions $\mathrm{L}^2(I)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ sont des espaces vectoriels pour l'addition des fonctions et leur multiplication par une constante.

• Deux doubles inclusions entre espaces fonctionnels
On a d'une part, si T est un paramètre fixé strictement positif,
$\mathrm{L}^\infty(0, T) \subset \mathrm{L}^2(0, T) \subset \mathrm{L}^1(0, T)$ et d'autre part $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.

• Signaux analogiques continus
On se donne un point t_0 de l'intervalle non vide et non réduit à un point I. Un signal analogique $f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C})$ est continu en t_0 si et seulement si, une barre d'erreur ε étant donnée de façon arbitraire, on peut toujours trouver un voisinage de t_0 sous la forme d'un intervalle centré $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$ (avec $\eta > 0$) de sorte que l'erreur commise sur $f(t)$ si on l'approche par $f(t_0)$ est inférieure à ε lorsque l'argument t est suffisamment proche de t_0. Avec des quntificateurs logiques : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t \in I,\ |t - t_0| < \eta \Longrightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$.
Lorsque la fonction f est continue en tout point de l'intervalle I, on dit que'elle est continue sur I et on note $f \in \mathscr{C}(I)$.
Toutes les fonctions "usuelles" comme l'exponentielle ou les fonctions circulaires sont continues en tout point où elles sont définies.

- Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[0, T]$ sont bornées.

Avec les notations introduites plus haut, on peut écrire $\mathscr{C}([0, T]) \subset \mathrm{L}^\infty(0, T)$. Il est important de remarquer que l'hypothèse de considérer un intervalle fermé est essentielle pour conclure. Ainsi, la fonction $]0, 1] \ni t \longmapsto \frac{1}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$ mais elle n'y est pas bornée.

- Fonction de Heaviside

Pour modéliser le comportement du courant électrique dans un interrupteur au début du 20e siècle, Oliver Heaviside a introduit une fonction discontinue H telle que $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t > 0$. En $t = 0$, on peut compléter cette définition de façon arbitraire. Ce qui importe est que la fonction de Heaviside est (toujours) discontinue en $t = 0$.

- Espace vectoriel normé

Tous les espaces de fonctions vus plus haut entrent dans la catégorie très générale des espaces verctoriels normés. Par définition, un tel espace E muni d'une norme $\| \ \|$ est la donnée $(E, \| \ \|)$ d'un espace vectoriel E muni d'une norme. Pour tout $f \in E$, le nombre $\|f\|$ est bien défini. De plus, on a les propriétés suivantes de positivité : $\|f\| \geq 0$ pour tout $f \in E$, inégalité triangulaire : $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, homogénéité : $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$ et hypothèse de séparation : $\|f\| = 0$ implique $f = 0$.

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (respectivement complexes $\mathbb{C}$) est normé avec comme norme associée la valeur absolue (respectivement le module).

Une norme peut être interprétée comme une longueur. Elle permet aussi de définir une distance par $d(f, g) = \|f - g\|$.

- Normes des espaces usuels de fonctions

Les normes dans les espaces $\mathrm{L}^1(I)$, $\ell^1(\mathbb{N})$, $\mathrm{L}^2(I)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ se définissent naturellement :
$\|f\|_1 \equiv \int_I |f(t)| \, \mathrm{d}t$, $\|u\|_1 \equiv \sum_{n=0}^\infty |u_n|$, $\|f\|_2 \equiv \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$ et $\|u\|_2 \equiv \sqrt{\sum_{n=0}^\infty |u_n|^2}$.

Les normes dans $\mathscr{C}([0, T])$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ utilisent la borne supérieure : $\|f\|_\infty \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$ et $\|u\|_\infty \equiv \sup_{n \geq 0} |u_n|$.

La norme dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(I)$ est peu plus délicate à définir. On peut considérer dans une première approche que la relation $\|f\|_\infty \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$ est essentiellement valable dans $\mathrm{L}^\infty(I)$.

Munis de ces définitions, les sept espaces de fonctions $(\mathrm{L}^\infty(I), \| \ \|_\infty)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \| \ \|_\infty)$, $(\mathrm{L}^1(I), \| \ \|_1)$, $(\ell^1(\mathbb{N}), \| \ \|_1)$, $(\mathrm{L}^2(I), \| \ \|_2)$, $(\ell^2(\mathbb{N}), \| \ \|_2)$ et $\mathscr{C}([0, T]), \| \ \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

- Convergence d'une suite de fonctions dans un espace vectoriel normé

Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (de fonctions) d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ converge vers un point (une fonction, un vecteur) $\varphi \in E$ si et seulement si la suite de nombres positifs $\|\varphi_n - \varphi\|$ tend vers zéro si l'entier n tend vers l'infini.

Exemple. On se donne $T > 0$. La suite de fonctions $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$ converge vers $\varphi(t) = \exp(t)$ dans l'espace $\mathscr{C}([0, T])$ si n tend vers l'infini.

- Suite de Cauchy (de fonctions) dans un espace vectoriel normé

Une suite de Cauchy est une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont arbitrairement proches les uns des autres, à condition d'aller assez loin dans la numérotation de la suite :
$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall p, q \geq N, \ |\varphi_p - \varphi_q| < \varepsilon.$

- Toute suite convergente est de Cauchy

La preuve est un exercice qui utilise simplement la définition de la convergence d'une suite de fonctions.

- Espace complet

Un espace normé est complet par définition si pour toute suite de Cauchy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, il existe $\varphi \in E$ telle que converge vers φ si n tend vers l'infini.
De façon plus intuitive, un tel espace "n'a pas de trou". C'est le cas pour l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Mais ce n'est pas vrai pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
Dans un espace complet, les suites de Cauchy convergent vers un point de l'espace ; on peut prouver qu'une suite (de fonctions pour fixer les idées) a une limite sans avoir à l'expliciter.

- Théoreme important : les espaces de fonctions présentés plus haut sont complets.

On se donne un nombre réel $T > 0$. Les sept espaces de fonctions $(\mathrm{L}^\infty(I), \|\ \|_\infty)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\ \|_\infty)$, $(\mathrm{L}^1(I), \|\ \|_1)$, $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\ \|_1)$, $(\mathrm{L}^2(I), \|\ \|_2)$, $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\ \|_2)$ et $\mathscr{C}([0,T]), \|\ \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés complets.
Ces espaces ont une structure saine du point de vue du passage à la limite, même si c'est parfois au prix d'une définition qui peut ne pas être élémentaire. Nous allons voir que la notion naïve de convergence "point par point" ou ponctuelle n'est pas toujours suffisante pour avoir une véritable convergence au sens des espaces de fonctions.

- Convergence ponctuelle

Pour fixer les idées, on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une suite φ_n de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions φ_n converge ponctuellement (ou converge simplement) vers la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout nombre $t \in I$, la suite numérique $\varphi_n(t)$ converge vers le nombre $\varphi(t)$.
Avec des quantificateurs logiques : $\forall\varepsilon > 0$, $\forall t \in I$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.
Un exemple très intéressant est le cas où $I = [0,\,1]$ et $\varphi_n(t) = t^n$. La limite simple de cette suite de fonctions s'explicite sans difficulté et on trouve la fonction $\varphi(t) = 0$ pour $0 \leq t < 1$ et $\varphi(1) = 1$. La limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues peut être une fonction discontinue !

- Convergence uniforme

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions φ_n converge uniformément vers la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ si et seulement si lorsqu'on se donne une marge d'erreur $\varepsilon > 0$, tous les écarts $|\varphi_n(t) - \varphi(t)|$ sont inférieurs à ε dès que l'on est assez loin dans la numérotation de la suite : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall t \in I$, $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$.
Par rapport à la convergence simple, on a juste déplacé la suite de symboles "$\forall t \in I$" dans la définition sous forme de phrase logique. Ainsi, dans le cas de la convergence ponctuelle, l'entier N de la séquence "$\exists N \in \mathbb{N}$" dépend de l'argument t dans l'intervalle I, alors qu'il n'en dépend pas dans le cas de la convergence uniforme.
La convergence uniforme est essentiellement une autre façon de nommer la convergence dans l'espace $(\mathrm{L}^\infty(I)$ ou dans l'espace des fonctions continues.

- La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et une suite de fonctions φ_n continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite φ_n converge uniformément vers une fonction φ sur l'intervalle I. Alors la fonction φ est continue de I dans $\mathbb{R}$.