le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 2 Séries de Fourier

- Polynôme trigonométrique

Dans tout ce cours, on se fixe la période $T>0$ du phénomène à étudier. On se donne aussi un entier $N \geq 1$, une famille de $2N+1$ réels (ou de complexes) α_k pour $0 \leq k \leq N$ et β_k pour $1 \leq k \leq N$. Un polynome trigonométrique est une fonction g périodique et de période T de la forme $g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} \big(\alpha_k \cos\big(\frac{2k\pi}{T} t\big) + \beta_k \sin\big(\frac{2k\pi}{T} t\big)\big)$.

- Calcul des coefficients

On a $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(kt)\,\mathrm{d}t$ et $\beta_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(kt)\,\mathrm{d}t$. Ce calcul, assez long, demande l'évaluation des intégrales $I_{k\ell}^{\mathrm{cc}} \equiv \int_0^T \cos\big(\frac{2k\pi}{T} t\big) \cos\big(\frac{2\ell\pi}{T} t\big)\,\mathrm{d}t$, $I_{k\ell}^{\mathrm{sc}} \equiv \int_0^T \sin\big(\frac{2k\pi}{T} t\big) \cos\big(\frac{2\ell\pi}{T} t\big)\,\mathrm{d}t$ et $I_{k\ell}^{\mathrm{ss}} \equiv \int_0^T \sin\big(\frac{2k\pi}{T} t\big) \sin\big(\frac{2\ell\pi}{T} t\big)\,\mathrm{d}t$. On a $I_{k\ell}^{\mathrm{cc}} = I_{k\ell}^{\mathrm{sc}} = I_{k\ell}^{\mathrm{ss}} = 0$ si $k \neq \ell$. De plus, on a $I_{kk}^{\mathrm{cc}} = I_{kk}^{\mathrm{ss}} = T$ et $I_{kk}^{\mathrm{sc}} = 0$.

Notons que, dans les expressions précédentes, on peut remplacer toutes les intégrales entre 0 et T par des intégrales entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$ puisque la fonction g est périodique de période T.

- Parité

Un polynôme trigonométrique pair n'a que des termes en cosinus et un polynôme trigonométrique impair n'a que des termes en sinus. Le polynôme trigonométrique $g(t)$ est une fonction paire [respectivement impaire] de la variable t si et seulement si $\beta_k = 0$ [respectivement $\alpha_k = 0$] pour tout k.

- Ecriture complexe d'un polynôme trigonométrique

On introduit une notation spécifique pour l'exponentielle complexe : $\mathrm{e}_k(t) \equiv \exp\big(\frac{2ik\pi}{T} t\big)$. Un polynôme trigonométrique g peut aussi s'écrire $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k\, \mathrm{e}_k(t)$.

On a les relations suivantes entre les coefficients : $a_0 = \alpha_0$ et si $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\beta_k)$, $a_{-k} = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\beta_k)$. Les coefficients a_k pour k entier tel que $-N \leq k \leq N$ s'obtiennent *via* la relation $a_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \exp(-ikt)\,\mathrm{d}t$.

- Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période T : $f(t+T) = f(t)$ pour tout nombre réel t. Les coefficients de Fourier $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ sont définis par $\alpha_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\big(\frac{2k\pi}{T} t\big)\big)\,\mathrm{d}t$ et
$\beta_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\big(\frac{2k\pi}{T} t\big)\big)\,\mathrm{d}t$.

- Série de Fourier d'une fonction périodique

Avec les hypothèses précédentes, on se donne un entier $N \geq 1$. On définit la somme partielle de la série de Fourier de f grâce au polynôme trigonométrique
$g_N(t) = \alpha_0(f) + \sum_{k=1}^{N} \big(\alpha_k(f) \cos\big(\frac{2k\pi}{T} t\big) + \beta_k(f) \sin\big(\frac{2k\pi}{T} t\big)\big)$.

François Dubois, octobre 2017.

- Fonctions périodiques de carré intégrable sur leur période

On se donne un nombre réel T strictement positif. Une fonction f périodique et de période T est dite de carré intégrable si et seulement si l'intégrale $\int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$ est finie. On note alors $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$.

- Espace des fonctions de carré intégrable

L'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$ des fonctions de carré intégrable est un espace vectoriel. La somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable et le produit d'une fonction de carré intégrable par un scalaire est encore de carré intégrable : si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(f+g) \in \mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda f \in \mathrm{L}^2(0, T)$.

- Produit scalaire

Si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0, T)$, le nombre complexe $\int_0^T f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$ est toujours bien défini et on pose $(f, g) = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$.
On remarque que la base des exponentielles complexes définit une famille orthogonale :
$(\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_\ell) = 0$ si $k \neq \ell$. De plus, $(\mathrm{e}_k, \mathrm{e}_k) = T$.

- Quelques propriétés du produit scalaire

Pour f, g, h appartenant à $\mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$, $(f, g+h) = (f, g) + (f, h)$, $(\lambda f, g) = \lambda (f, g)$, $(f, \lambda g) = \overline{\lambda} (f, g)$, $(g, f) = \overline{(f, g)}$. De plus, $(f, f) \geq 0$ et si $(f, f) = 0$, alors la fonction f est (essentiellement) nulle.

- Norme

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, on pose $\| f \| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t}$. L'application de $\mathrm{L}^2(0, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{L}^2(0, T) \ni f \longmapsto \| f \| \in \mathbb{R}$ est une norme sur l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$. La norme est positive : $\| f \| \geq 0$. Si $\| f \| = 0$, alors $f = 0$. Si λ est un nombre complexe et si $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, alors $\| \lambda f \| = |\lambda| \, \| f \|$. Enfin, pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$, on a l'inégalité triangulaire $\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \|$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$, on a $|(f, g)| \leq \| f \| \, \| g \|$. De plus, si on est dans le cas d'égalité, c'est à dire si $|(f, g)| = \| f \| \, \| g \|$, alors les deux fonctions f et g sont proportionnelles : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de sorte que pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) = \lambda g(t)$.

- Théorème de Pythagore

Si $(f, g) = 0$, alors $\| f+g \|^2 = \| f \|^2 + \| g \|^2$.

- Sous-espace des polynômes trigonométriques

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 0. On note E_N le sous-espace de $\mathrm{L}^2(0, T)$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N. Une fonction $g_N(t)$ qui appartient à E_N s'écrit de façon unique sous la forme $g_N(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \, \mathrm{e}_k(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \exp\!\left(\frac{2ik\pi t}{T}\right)$, où les coefficients a_k $(-N \leq k \leq N)$ forment une famille de $(2N+1)$ nombres complexes indépendants.

- Projecteur sur les polynômes trigonométriques

Si $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, il existe un unique polynôme trigonométrique $S_N(f) \in E_N$ de sorte que pour tout $g \in E_N$, $(f - S_N(f), g) = 0$. On a $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k(f) \, \mathrm{e}_k$ où les nombres $a_k(f)$ sont les

coefficients de Fourier de la fonction f : $a_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\big(-\frac{2ik\pi t}{T}\big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}(f\,,\mathrm{e}_k)$.
On remarque que les coefficients de Fourier $a_k(f)$ ne dépendent pas de l'indice N de l'espace E_N.

- Inégalité de Bessel-Parseval

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et $S_N(f) \in E_N$ défini au point précédent, on a l'inégalité $\parallel S_N(f) \parallel \leq \parallel f \parallel$, c'est à dire $\sum_{|k|\leq N} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.
La série de terme général $|a_k|^2$ (indexée par $k \in \mathbb{Z}$) converge et on a en passant à la limite dans l'inégalité précédente : $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.

- Théorème de Parseval

Soit $T > 0$ et $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$. La suite de fonctions $S_N(f)$ converge vers f dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$: $\parallel S_N(f) - f \parallel$ tend vers 0 si l'entier N tend vers l'infini. On peut alors écrire : $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ qui signifie que la norme de la différence $\big(f - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k\big)$ est nulle. En pratique, on peut écrire, pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^2(0,T)$, l'égalité des produits scalaires : $(f\,,g) = (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k\,,g)$. En particulier, les deux fonctions f et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ ont même norme et on a l'égalité de Bessel-Parseval : $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.
Dans le cas où on utilise la base réelle de $\mathrm{L}^2(0,T)$ des fonctions sinus et cosinus et les coefficients $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ introduits plus hauts, l'égalité de Bessel-Parseval prend la forme
$|\alpha_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\big(|\alpha_k(f)|^2 + |\beta_k(f)|^2\big) = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.