le cnam

MAA107 - Mathématiques du Signal Déterministe

Examen seconde session, 17 avril 2017

Enseignant responsable :

François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours,

sous forme papier

et à l'exclusion de tout autre document.

Les téléphones mobiles et autres équipements communicants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée de l'épreuve.

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

Département de Mathématiques et Statistiques
Cours de "Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal"
(MAA107)

Examen du 17 avril 2018 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Espaces de fonctions

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f intégrables sur $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions f de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées.

a) On pose $f_1(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction f_1 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?

b) Appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?

c) Appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Justifier avec soin toutes vos réponses.

d) Mêmes questions avec f_2 définie par la relation $f_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\mid t \mid}\,(1+t^4)}$.

Exercice 2) Equation différentielle ordinaire

Avec la méthode de votre choix, calculer les valeurs $y(t)$ (pour $t > 0$) de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 3) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$ si $0 < t < 1$ et $f(t) = \frac{1}{6}$ si $t \geq 1$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.

b) Montrer que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf pour $t = 0$ et $t = 1$.

c) Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ au sens des distributions.

d) Montrer que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$.

e) Calculer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}t^3}$ au sens des distributions.

Exercice 4) Transformation de Fourier

On se donne un réel a strictement positif et la fonction $f(t) = \exp(-a\ |t|)$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathcal{F}f)(\omega)$?

b) Démontrer que la fonction $(\mathcal{F}f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.

c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

d) Pour t réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\ \exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$ est bien définie.

e) A l'aide de quel opérateur la fonction $\Phi(t)$ est-elle reliée à la fonction f ?

f) Calculer une expresion analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel t.

Exercice 5) Transformée en z

On désigne par h le signal discret $h = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_a + \frac{1}{8}\delta_{2a} + \frac{1}{8}\delta_{3a} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_k\,\delta_{ka}$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \mid h_k \mid = 1$.

b) En déduire que si x est un signal borné, alors le signal $h * x$ est également borné.

c) Le filtre discret T qui à x associe $y \equiv h * x$ est-il stable dans ℓ^∞ ?

d) Le filtre T est-il causal ?

e) Calculer l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T, c'est à dire la transformée en z du signal h.

f) Dans quelle région du plan complexe cette fonction de transfert est-elle définie ?