Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe”

Examen du 29 janvier 2013 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou transmises via le site du département d'ingénierie mathématique du CNAM sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Equations différentielles
Dans tout l'exercice, on désigne par τ une constante réelle strictement positive.
a) Montrer que si la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\varphi(t) = 0 \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante C telle que $\varphi(t) = C \exp(-\frac{t}{\tau})$.
b) En déduire si la fonction φ est solution de (1) avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, alors elle est nulle.
c) Proposer une expression pour la solution $\psi(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\psi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $\psi(0) = 0$.
d) On désigne par $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Quelle est la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f(t) = H(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $f(0) = 0$? On pourra utiliser les questions précédentes ou bien la formule de Duhamel.

Exercice 2) Dérivation au sens des distributions
Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = -t^2$ si $t \leq 0$ et $f(t) = t^2$ si $t > 0$.
a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf pour $t = 0$. Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ au sens des distributions.
c) Montrer que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}t^3}$ au sens des distributions.

Exercice 3) Equation différentielle avec second membre distribution
On pose $f(t) = \exp(-\,|t|)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf en $t = 0$. Calculer la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

b) Monter en dérivant la dérivée première au sens des distributions que la fonction f vérifie $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2} - f(t) = -2\,\delta$, où δ désigne la masse de Dirac en zéro.

Exercice 4) Signaux analogiques

Dans cet exercice, la lettre T désigne un réel strictement positif et P_T la fonction "porte" : $P_T(t) = 1$ si $|\,t\,| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|\,t\,| > \frac{T}{2}$. On introduit aussi un réel strictement positif a et on pose $Q(t) = 1$ si $|\,t-a\,| \leq \frac{T}{2}$ et $Q(t) = 0$ si $|\,t-a\,| > \frac{T}{2}$. De plus, on désigne par $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier : $(\mathcal{F}f)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\exp(-i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathcal{F}P_T)(\omega)$?

b) Quelle est l'expression de $(\mathcal{F}Q)(\omega)$?

c) Si δ_a désigne la masse de Dirac au point a, montrer que

(2) $\quad \delta_a * P_T \,=\, Q\,.$

d) Quelle est l'expression de la transformée de Fourier $\mathcal{F}\delta_a$ de la masse de Dirac au point a ?

e) Déduire de la question précédente et de la relation (2) un nouveau calcul de la transformée de Fourier $\mathcal{F}Q$ de la fonction Q.

Exercice 5) Signaux discrets

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif.

a) Rappeler l'expression du produit de convolution $\delta_{na} * \delta_{ma}$ des masses de Dirac δ_{na} et δ_{ma} pour deux entiers n et m.

b) Soit $h_1 = \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{1}{2}\delta_a$ et $h_2 = \delta_0 - \delta_a$ deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution $h \equiv h_1 * h_2$.

c) On introduit le filtre discret T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\delta_{ka}$ associe $y \equiv h * x$. Quelle est l'expression de y_n en fonction des x_k ?

d) Le filtre introduit à la question précédente est-il causal ? Est-il stable ?

Exercice 6) Transformée en z

Dans cet exercice, $\alpha > 0$ est un réel strictement positif fixé. On désigne par h le signal discret $h \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k+1}}\,\delta_{ka}$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{(1+\alpha)^{k+1}} = 1$. En déduire que si x est un signal borné, alors le signal $h * x$ est également borné.

b) Le filtre discret T qui à x associe $y \equiv h * x$ est-il stable dans ℓ^∞ ? Est-il causal ?

c) Calculer l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T, c'est à dire la transformée en z du signal h. Dans quelle région du plan complexe est-elle définie ?

d) Quel(s) est le (ou les) pôle(s) de cette fonction de transfert ? Sa (leur) situation dans le plan complexe est-elle cohérente avec les résultats précédents ?