

Examen du 09 avril 2013 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou transmises via le site du département d'ingénierie mathématique du CNAM sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$ si $0 < t < 1$ et $f(t) = \frac{1}{6}$ si $t \geq 1$.

- Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa fonction dérivée $\frac{df}{dt}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.
- Montrer que $\frac{df}{dt}$ est une fonction continue sur \mathbb{R} et dérivable sauf pour $t = 0$ et $t = 1$. Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{d^2f}{dt^2}$ au sens des distributions.
- Montrer que $\frac{d^2f}{dt^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de \mathbb{R} . Calculer la dérivée troisième $\frac{d^3f}{dt^3}$ au sens des distributions.

Exercice 2) Equations différentielles

Dans tout l'exercice, on désigne par a une constante réelle strictement positive.

- Montrer que si la fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est telle que

$$(1) \quad \frac{d\varphi}{dt} - a\varphi(t) = 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante C telle que $\varphi(t) = C \exp(at)$.

- En déduire si la fonction φ est solution de (1) avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, alors elle est nulle.
- Proposer une expression pour la solution $\psi(t)$ de l'équation différentielle $\frac{d\psi}{dt} - a\psi(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $\psi(0) = 0$.
- On désigne par $H(\bullet)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Quelle est la solution de l'équation différentielle $\frac{df}{dt} - af(t) = tH(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $f(0) = 0$? On pourra utiliser les questions précédentes ou bien la formule de Duhamel.

Exercice 3) Signaux analogiques

Dans cet exercice, la lettre T désigne un réel strictement positif et P_T la fonction “porte” : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$. De plus, on désigne par \mathcal{F} la transformée de Fourier : $(\mathcal{F}f)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$ pour $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- Quelle est l’expression de $(\mathcal{F}P_T)(\omega)$?
- Quelle relation classique existe-t-il entre $\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}P_T)(\omega)|^2 d\omega$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |P_T(t)|^2 dt$?
- Montrer que l’intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |(\mathcal{F}P_T)(\omega)|^2 d\omega$ peut s’exprimer en fonction de l’intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right|^2 d\theta$.
- Déduire des questions précédentes la valeur de l’intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin \theta}{\theta} \right|^2 d\theta$.

Exercice 4) Signaux discrets

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α . Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif.

- Rappeler l’expression du produit de convolution $\delta_{na} * \delta_{ma}$ des masses de Dirac δ_{na} et δ_{ma} pour deux entiers n et m .
- Soit $h_1 = 4\delta_0 - \delta_a$ et $h_2 = \delta_0 - \delta_a$ deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution $h \equiv h_1 * h_2$.
- On introduit le filtre discret T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$ associe $y \equiv h * x$. Quelle est l’expression de y_n en fonction des x_k ?
- Le filtre introduit à la question précédente est-il causal ? Est-il stable ?

Exercice 5) Transformée en z

On désigne par h le signal discret $h = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_a + \frac{1}{8}\delta_{2a} + \frac{1}{8}\delta_{3a} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta_{ka}$.

- Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} |h_k| = 1$. En déduire que si x est un signal borné, alors le signal $h * x$ est également borné.
- Le filtre discret T qui à x associe $y \equiv h * x$ est-il stable dans ℓ^∞ ? Est-il causal ?
- Calculer l’expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T , c’est à dire la transformée en z du signal h . Dans quelle région du plan complexe est-elle définie ?