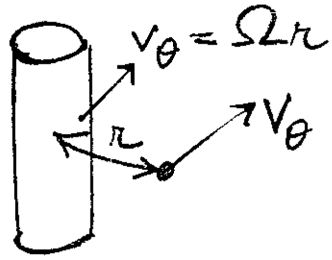
# Chapitre (V) Effets tourbillonnaires

1) Vortex de Rankine
2) Théorème de Kelvin
3) Diffusion de la vorticité d'un fluide incompressible
4) Création de vortex en aval d'un choc courbe
5) Instabilité du fluide stationnaire
6) Transition vers le chaos
7) Turbulence développée
8) Couche limite turbulente
9) Modélisation de la turbulence

## 1) Vortex de Rankine (Guyon p289)

• 

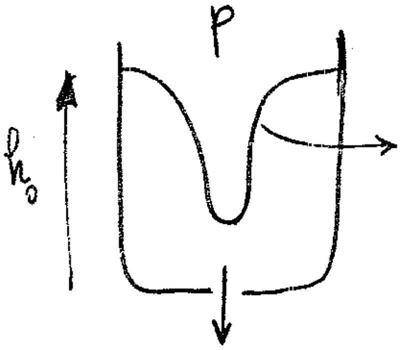

$V_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$ → irrotationnel

continuité de $v_\theta$ : $\Gamma = 2\pi \Omega r_0^2$

cœur du tourbillon $r < r_0$

$$\mathrm{rot}(\Omega r \vec{e_\theta}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\Omega r)\,\vec{k} = 2\,\Omega\,\vec{k}\,.$$

• Application à la vidange d'un réservoir circulaire




surface libre . $p = p_0$

$$\underbrace{p + \rho g z}_{p_0 + \rho g h(r) \text{ sur la surface libre}} + \frac{1}{2}\rho v_\theta^2 = p_0 + \rho g h_0$$

$r \geq r_0$ $\quad h(r) = h_0 - \dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \dfrac{1}{r^2}$ profil hyperbolique

$r \leq r_0$ $\quad p(r,z) = ?$

fluide au repos dans le repère tournant à la vitesse $\Omega$ → force centrifuge $\Omega^2 r$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \Omega^2 r \; ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

$p = \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 - \rho g (z - h_1)$ $\quad h_1$ / $p$ continue en $r = r_0$

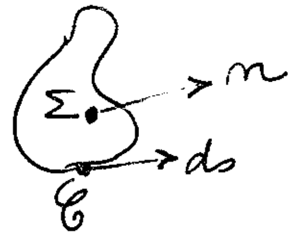
surface libre : $p = p_0$ → parabole.

## 2) Théorème de Kelvin (W. Thomson, 1869).

• Circulation et tourbillon

$$\omega = \mathrm{rot}\, u .$$

$$\int_{\mathcal{C}} u\cdot ds = \iint_{\Sigma} \omega\cdot n \, d\sigma \quad \text{(Stokes)}.$$




• (Th) fluide parfait incompressible ou en évolution barotrope. La circulation le long d'une courbe qu'en suit dans son mouvement est constante (forces dérivant d'un potentiel)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega\times u + \nabla\left(\frac{1}{2}|u|^2\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\Phi .$$

$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) = 0$ par hypothèse de barotropie

$\mathrm{rot}(\omega\times u)_i = \partial_j(\omega_i u_j) - \omega_j \partial_j u_i$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathrm{rot}(\omega\times u) = 0 \longrightarrow \text{à garder en mémoire}$$

• formule d'analyse vectorielle.

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{C}(t)} \vec{\varphi}\cdot\vec{ds} = \int_{\mathcal{C}(t)} \left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt} + {}^t\nabla u\cdot\vec{\varphi}\right)\vec{ds}$$

car $\frac{d}{dt}\vec{ds} = \nabla v\cdot\vec{ds}$

- Preuve du th de Kelvin.

$$\frac{d}{dt}\oint \vec{u}.\vec{ds} = \oint \frac{du}{dt}\cdot ds$$

car $\qquad (\nabla u)_{ij} = \partial_j u_i$

$$({}^t\nabla u \cdot u)_i = {}^t\nabla u_{ij}\, u_j = (\partial_i u_j)\, u_j = \frac{1}{2}\nabla(u^2)_i$$

$$\text{et } \oint_{\mathcal{C}(t)} \nabla(u^2)\, ds = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(\nabla u^2) = 0.$$

Par ailleurs $\frac{du}{dt} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla p$ qui est un gradient par hypothèse. D'où le résultat ∎

- Th de Lagrange.

Si à un instant particulier $t_0$ l'écoulement est irrotationnel dans un domaine $V_0$, il reste irrotationnel lorsqu'on suit $V(t)$ dans son mouvement.

- Transport de $\frac{\omega}{\rho}$ par le mouvement.

fluide parfait incompressible ou en évolution barotrope $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega}{\rho}\right) = (\nabla u)\cdot\frac{\omega}{\rho}$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \underbrace{(\operatorname{div} u)}_{-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}}\,\omega_i + (u\cdot\nabla)\omega - (\omega\cdot\nabla)u = 0$$

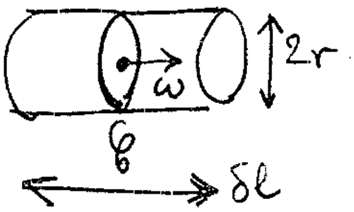
$$\frac{d\omega_i}{dt} - \frac{\omega_i}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \omega_j \underbrace{(\partial_j u_i)}_{(\nabla u)_{ij}}$$

puis on divise par $\rho$. ∎

• Interprétation physique du Th de Kelvin

C'est la conservation du moment cinétique !

ex du vortex de Rankine




$$\Gamma = \oint_C v\,dl = \pi r^2 \omega \qquad \Omega = \frac{\omega}{2}$$

J = inertie du cylindre de longueur $\delta l$

$$J = \delta m \frac{r^2}{2} \quad \text{où } \delta m = \rho \pi r^2 \delta l$$

$$\pi r^2 \omega = \frac{4\pi}{\underbrace{\delta m}_{\text{cste}}} \; \underbrace{\delta m \frac{r^2}{2}}_{J} \; \underbrace{\Omega}_{\frac{\omega}{2}} = K \cdot \underbrace{J\Omega}_{\text{moment cinétique}}$$

la masse de fluide dans un tube de vorticité est constante → $K = $ cste.

{ Conservation de $\Gamma$ ⟷ conservation du moment cinétique $J\Omega$.

## 3) Diffusion de la vorticité d'un fluide incompressible

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \omega \times u + \nabla\left(\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{P}{\rho}\right) - \nu \Delta u = -\nabla \Phi \end{cases}$$

→ équation de Helmholtz pour le tourbillon.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot}(\omega \times u) - \nu \Delta \omega = 0 .$$

ou $$\frac{d\omega}{dt} = \underbrace{(\nabla u) \cdot \omega}_{\text{terme d'étirement - rotation}} + \underbrace{\nu \Delta \omega}_{\text{diffusion du tourbillon}}$$

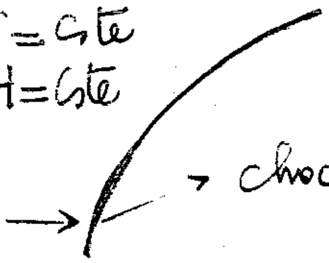
terme d'étirement - rotation → $\neq 0$ en 2D !

diffusion du tourbillon

## 4) Création de vortex en aval d'un choc courbe

Hadamard (1903)
Crocco (1937)

$\begin{cases} S = C^{te} \\ H = C^{te} \end{cases}$



→ choc $\nabla s$ non trivial en aval

$$\omega_{aval} = \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ en général}}}{\omega_{amont}} + \overrightarrow{\operatorname{rot}}_{\Gamma} \left[ \vec{u} \cdot \vec{n} \right]$$

pas de tourbillon singulier sur le choc mais une discontinuité du tourbillon

↑ car $[u \cdot \tau] = 0$

lieu $\left\langle \begin{matrix} \omega \\ \nabla s \end{matrix} \right.$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \times u + \nabla\left(h + \frac{u^2}{2}\right) - T\,\nabla s = 0 .$$

car $dh = T\,ds + \frac{1}{\rho}\,dp$

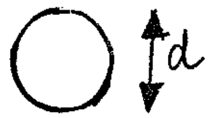
ce n'est plus un écoulement barotrope !

alors (si $\nabla H = \text{cste}$ et $\frac{\partial}{\partial t} \to 0$)

$$\omega \times u = T\,\nabla s \qquad \text{(Crocco)} .$$

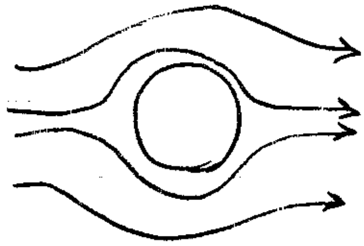
## 5) Instabilité du fluide stationnaire

• exemple : écoulement autour d'un cylindre.

$\rho, \vec{u}_\infty$ 


$$Re = \frac{\rho u_\infty d}{\mu} = \frac{u_\infty d}{\nu}$$

• $Re \ll 1$



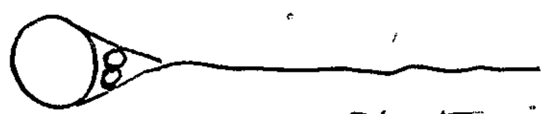
la solution est potentielle incompressible essentiellement.
En effet, $u = \nabla \varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sur $\partial \Omega$.

$$\underbrace{\omega \times u}_{0} + \underbrace{\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right)}_{\text{cste si Bernoulli}} - \nu \Delta u = 0 .$$

$$\Delta u \to \Delta u_x = \Delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\Delta \varphi)}_{=0}$$

• $Re \simeq 30$ décollement de la couche limite laminaire et sillage stationnaire

• $Re \simeq 40$



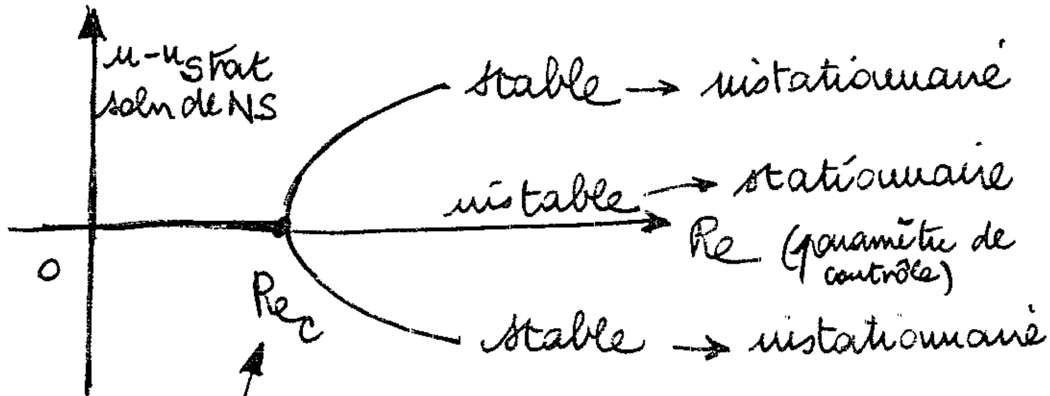
le sillage devient instationnaire

- $Re = 47$ oscillations clairement visibles en aval du sillage.

- $Re = 70$ formation de l'allée de Von Karman.

- $Re = 100$ Allée tourbillonnaire de Benard. V. K 1910.

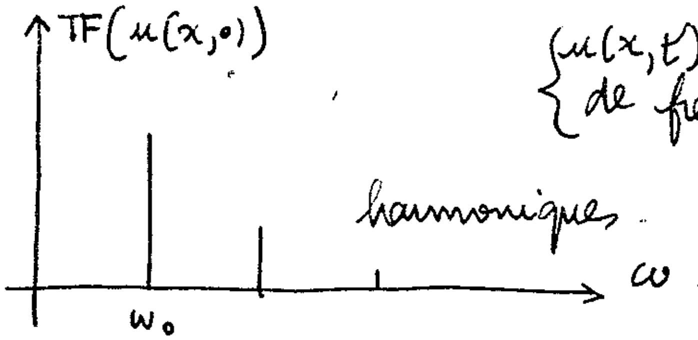
- Bifurcation




seuil d'émission des tourbillons

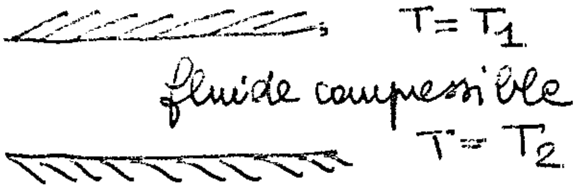
Modèle de Landau (voir Landau p 129 ; Guyon p 89 et suivants)

- spectre de vitesse




$\{$ $u(x,t)$ périodique de fréquence $\omega$

• Instabilité de Rayleigh - Bénard

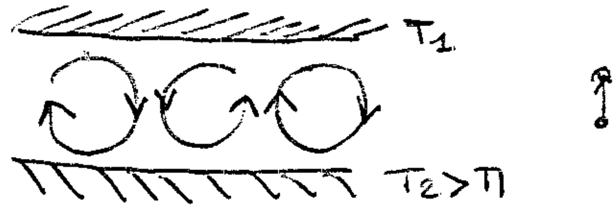



$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T - \nu \Delta T = 0$$

* $T_2 - T_1 = \Delta T$
  $\Delta T < 0$ la stratification de densité (fluide dense en dessous) est stable → pas de mouvement

* $0 < \Delta T < \Delta T_c$ échanges de chaleur purement diffusifs

* $\Delta T = \Delta T_c$ apparition de rouleaux contrarotatifs de convection.




fluctuation de température → mouvement convectif vertical. Si pas assez d'échange de chaleur avec l'extérieur, la particule après un certain temps subit un gradient de température encore plus important

• Taylor-Couette (deux cylindres)
• Bénard Marangoni (avec surface libre) → cellules hexa (casserole qu'on chauffe)
• Kelvin-Helmholtz ($\nabla$ de vitesses tgentielles)
• Poiseuille (pm!)

## 6) Transition vers le chaos

Aller du très simple à l'infiniment (?) complexe, ie du prédictible au non prédictible.

- Ecoulement stationnaire stable pas de fréquence propre du système.

- Ecoulement à une fréquence propre (avec ses harmoniques).
  Une instabilité non linéaire apparait (cf paragraphe précédent) Elle donne lieu à un cycle limite (comportement périodique) de fréquence "fondamentale" $f_1$.

  spectre = $f_1$ et ses harmoniques.
  → l'écoulement reste prédictible
  cf Rayleigh-Bénard à $\Delta T \gtrsim \Delta T_c$
  cylindre avec allée de Von Karman.

- Trois scénarios possibles vers la turbulence, ie système dynamique non prédictible dans ses moindres détails.

① Apparitions d'au moins trois fréquences incommensurables entre elles

(Ruelle-Takens 1971)

ex de Rayleigh-Bénard (Libchaber 1978)

$\Delta T \geqslant \Delta T_C^2 > \Delta T_C^1 \equiv \Delta T_C$

→ nouvelle fréquence $f_2$ $\quad \frac{f_1}{f_2} \notin \mathbb{Q}$

oscillations des rouleaux

bouffées de chaleur

→ 2 fréquences avec leurs harmoniques $f = n f_1 + m f_2$

$n, m \in \mathbb{Z}$

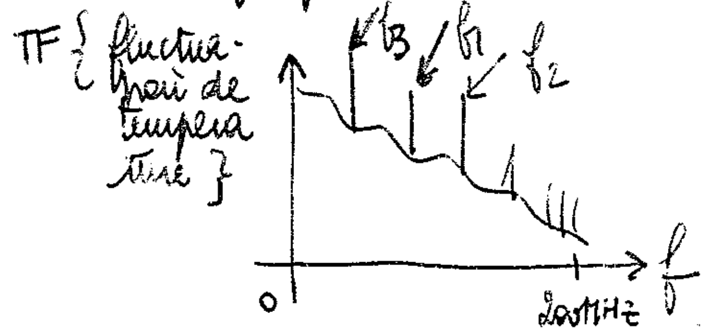
le spectre reste discret → mvt pseudo périodique.

Une 3° fréquence $f_3$

* Landau (1940) ou en met de plus en plus d'incommensurables entre elles → chaos

→ scénario abandonné aujourd'hui !

* 3° fréquence va créer un spectre continu




les composantes discrètes deviennent de moins en moins visibles

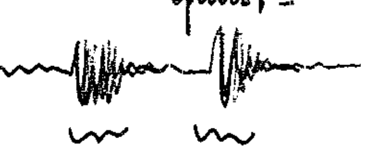
modèle discret : 3 équations différentielles couplées non linéairement entre elles (deux oscillateurs couplés non linéairement)

ex Lorenz 1963 → atmosphère

Comportement stochastique des systèmes déterministes

(R) Composante continue du spectre (Bergé p60)
apparaît pour des fonctions a-périodiques, i.e différentes d'un signal comportant deux fréquences fondamentales avec leurs harmoniques.
(ex) bruit blanc
lumière blanche, bruit d'une cascade
→ spectre plat.

(2) apparition du chaos par "intermittence".
les oscillations quasi-apériodiques (2 fréquences) se dégradent (bouffée chaotique de grande amplitude)
→ intermittence.



intermittence

La durée des bouffées augmente avec le paramètre "d'ordre" (Re, Ra).

(3) Doublements successifs de fréquence (Feigenbaum, Coullet 1978)

$Re^0 \to f_1 \quad Re^1 \to f_1/2 \quad Re^2 \to f_1/2^2$, etc....

Apparition de la fréquence moitié lors du passage d'une valeur critique pour le paramètre d'ordre
(phénomène d'oscillation paramétrique → cf balançoire entretenue ...)

$R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1} \rightarrow R_\infty$ fini !

et $\delta_n = \dfrac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+2} - R_{n+1}} \rightarrow \delta^* = 4{,}67$ nb de Feigenbaum

## 7) Turbulence développée

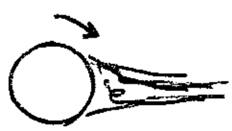
- exemple du cylindre dans un écoulement uniforme.

$Re \simeq 100$ allée de Benard Von Karmann

$100 \leq Re \leq 200$ transition turbulence.

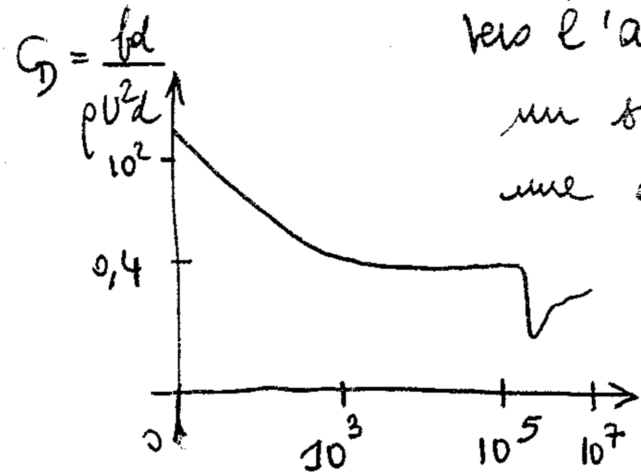
$Re \geq 200$ écoulement turbulent.

photo : guyon p 414



sillage turbulent

Le point de décollement se déplace vers l'aval à $Re \simeq 10^5$, entraînant un sillage arrière réduit, d'où une diminution brutale de la traînée




$Re = \dfrac{Ud}{\nu}$

• Echelles. (Landau p150) (Kolmogorov 1941)

* loin des parois → turbulence isotrope
  $l \simeq$ taille du domaine d'étude
  $\lambda_0 \simeq$ échelle où la viscosité du fluide agit (dissipation)
  $\varepsilon =$ énergie (turbulente) dissipée par unité
  de temps et de masse.

* $v_\lambda$ = variation de vitesse du mvt turbulent en fonction
  de $\lambda$, $\rho$ (densité), $\varepsilon$.
  ↪ une seule combinaison a la bonne dimension
  c'est $(\varepsilon\lambda)^{1/3}$ ! $\quad v_\lambda \sim (\varepsilon\lambda)^{1/3}$

  $$\varepsilon : \frac{\text{énergie}}{\text{masse. temps}} \simeq \frac{m^2}{s^3}$$

  $v_\lambda$ = vitesse des mouvements turbulents dont l'échelle est de l'ordre de $\lambda$.

* $\lambda \simeq \tau u$ ← vitesse moyenne
  ↑
  échelle de tps petite devant
  le tps caractéristique d'ensemble $T \sim \frac{l}{v}$
  $v_\tau \sim (\varepsilon u \tau)^{1/3}$
  ↑ variation de vitesse (moyenne ?) dans un laps
  de temps $\tau$.

② on peut aussi former $v'_\tau = (\varepsilon\tau)^{1/2}$ à partir
  de $\rho, \varepsilon, \tau$ → ordre des fluctuations de vitesse ...

* or $\varepsilon \sim \frac{(\Delta u)^3}{\ell}$ (seule grandeur ayant la bonne dimension qu'on peut former avec $\rho, \ell, \Delta u$)

et $v_\tau \sim \Delta u \left(\frac{\tau}{T}\right)^{1/3} \sim \Delta u \left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^{1/3}$

* nb de Reynolds $R_\lambda = \frac{\lambda v_\lambda}{\nu}$

$$R_\lambda \sim R_\ell \left(\frac{\lambda}{\ell}\right)^{4/3}$$

$\lambda_0$ ? $Re_{\lambda_0} \simeq 1$ !
A cette échelle de vitesse et de longueur, la viscosité est active.

Donc $\lambda_0 \sim \frac{\ell}{R_\ell^{3/4}}$

D'où $v_{\lambda_0} \sim \frac{\Delta u}{R_e^{1/4}}$ $\quad \omega_0 \sim \frac{u}{\lambda_0} = \frac{u}{\ell} R_e^{3/4}$

* nb de ddl d'un mouvement turbulent.

$n$ = nb de ddl / unité de volume
dépend de $\rho, \varepsilon, \nu$ seulement
seule grandeur de dimension $1/m^3$ $\left(\frac{\varepsilon}{\nu^3}\right)^{3/4}$

$$n \sim \frac{1}{\lambda_0^3} \sim \frac{1}{\ell^3} R_\ell^{9/4}$$

$$N = n\ell^3 \sim R_e^{9/4}$$

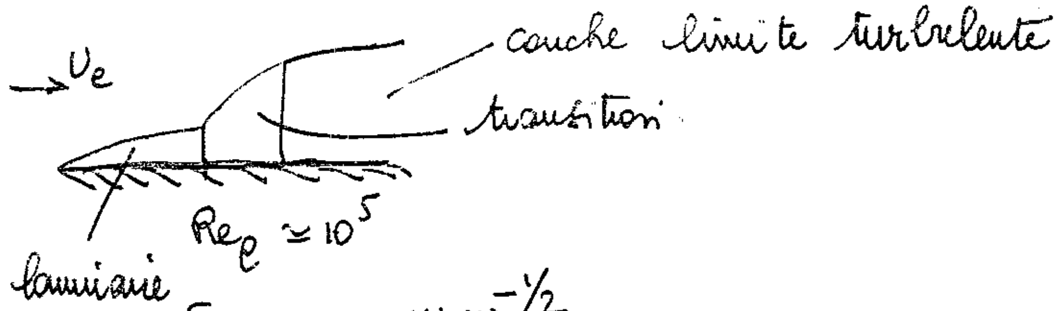
* Cascade de Kolmogorov

l'énergie cinétique est transférée des grosses structures vers les plus petites, puis est dissipée par viscosité à l'échelle où la viscosité devient active (nb de Reynolds associé à cette échelle de l'ordre de 1)

# 8) Couche limite turbulente

- 

Poiseuille (laminaire) (turbulent)

- 


$$\frac{\delta}{x} = 5\left(\frac{U_e x}{\nu}\right)^{-1/2}$$

- Echelles (cf Comte-Bellot p 100)

  * vitesse $\tau_0$ = frottement à la paroi

    $\tau_0 = \rho U_f^2$ $U_f$ = vitesse de frottement

  * longueur

    ① D diamètre de la conduite
    ou $\delta$ épaisseur de la couche limite

    ② Echelle où la viscosité (moléculaire) $\nu$ joue :

    $\nu / U_f$

- Zone de paroi (interne) et zone centrale (externe)

$$\frac{\overline{u}}{u_f} = f\left(\frac{y}{\delta}, \frac{y u_f}{\nu}\right)$$

$y =$ distance à la paroi

$\overline{U} =$ profil de vitesse moyenne

dans la paroi $\frac{y}{\delta} \ll 1$

—— zone centrale $\frac{y}{\nu} u_f \gg 1$

↳ deux cas limites :

* paroi : $\frac{\overline{U}}{U_f} = f\left(\frac{y U_f}{\nu}\right)$

* zone centrale : $\frac{U_e - \overline{U}}{U_f} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$

- Loi en logarithme.

Existence simultanée des deux développements proposés ci-dessus, ie $\overline{U}$ et $\frac{d\overline{U}}{dy}$ coïncident !

$$\frac{U_e}{U_f} - f\left(y\frac{U_f}{\nu}\right) = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

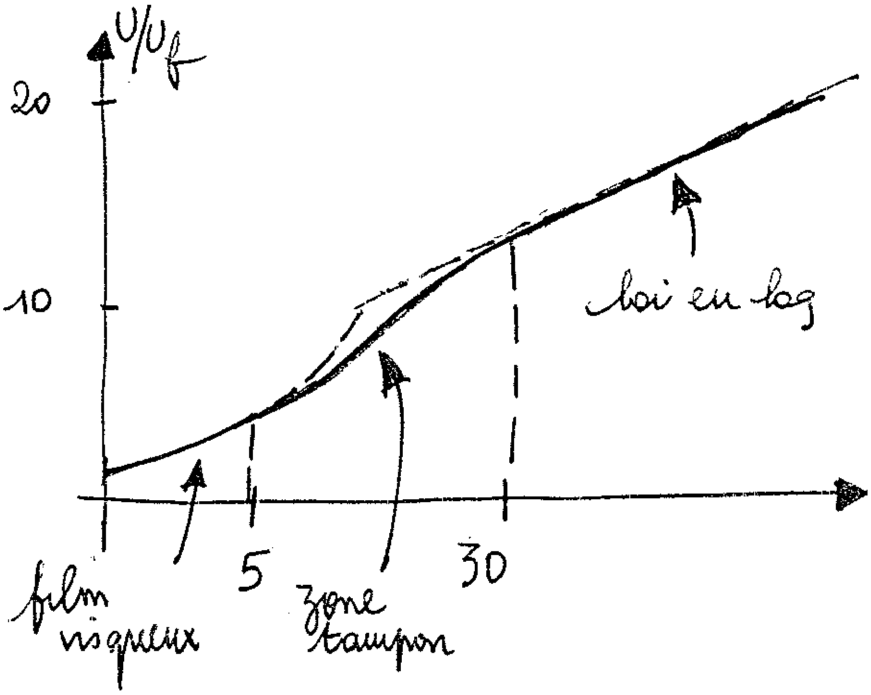
$$-\frac{U_f}{\nu}\frac{df}{d(yU_f/\nu)} = \frac{1}{\delta}\frac{dF}{d(y/\delta)}$$

deux fonctions de deux variables indépendantes sont égales

d'où $-y\frac{U_f}{\nu}\frac{df}{d(yU_f/\nu)} = \frac{y}{\delta}\frac{dF}{d(y/\delta)} = $ cste (de Karman)

$f\left(y\frac{U_f}{\nu}\right) = \frac{1}{K}\log\left(\frac{yU_f}{\nu}\right) + $ cste $\quad K = 0{,}4$ cste de Karman

OK si $30\frac{U_f}{\nu} \leqslant y \leqslant 0{,}2\,\delta$




{ Reichardt 1951
{ Laufer 1954

- Film visqueux $\dfrac{\overline{U}}{U_f} = \dfrac{y\, U_f}{\nu}$

  car $\tau_0 \simeq \mu \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \rho\, U_f^2$ $\underline{\underline{\text{OK}}}$

- Viscosité turbulente → se calcule dans la ~~zone~~ en log

$$-\overline{uv} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{viscosité turbulente}}}{\nu_T}\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}$$

$$\nu_T = \frac{U_f D}{2{,}5}\ \frac{y}{D}\left(1 - \frac{y}{D}\right) \quad (\text{pm}).$$

## 9) Modélisation de la turbulence

- Opérateur de moyenne

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ p = \bar{p} + p' \end{cases}$$

$\bar{p}$ : moyenne ; $p'$ : fluctuations

moyenne en temps $\bar{\phi} = \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \phi(x,t)\,dt$

— d'expériences $E(\phi) = \lim_{N \uparrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \phi_k(x,t)$.

Les deux coïncident : hypothèse ergodique

- Equations de Reynolds (Candel p 395 par ex)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{u} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho \bar{u} + \operatorname{div}(\rho \bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \bar{p} = \operatorname{div} \bar{\tau} + \operatorname{div} \tau_t + \rho g \end{cases}$$

$\bar{\tau}$ = tenseur visqueuses pour l'écoulement moyen $= \mu(\partial_i \bar{u}_j + \partial_j \bar{u}_i) + (K - \frac{2}{3}) \operatorname{div} \bar{u}\, \delta_{ij}$

$\tau_t$ = tenseur des contraintes de Reynolds

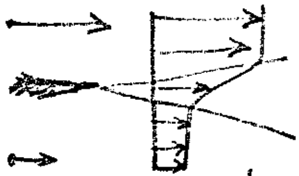
$(\tau_t)_{ij} = -\rho\, \overline{u'_i u'_j}$

mesure des corrélations entre composantes

- Viscosité turbulente

Boussinesq

Cas d'une couche de mélange



$$-\rho\,\overline{u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Viscosité turbulente

cisaillement turbulent

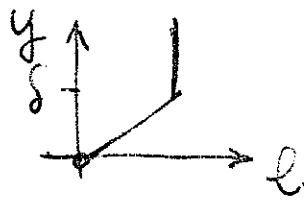
(hyp) $$-\rho\,\overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

$k = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'}$ énergie cinétique turbulente

- Longueur de mélange (Prandtl, 1925).

$\mu_t$ relié au gradient de vitesse moyenne grâce à la longueur de mélange $l_m$

$$\mu_t = \rho\, l_m^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|$$



$l_m$ déterminé empiriquement !

$l_m = K y$ $K = 0{,}41$ (Karman)

(couche limite turbulente)

Modèles récents Cebeci - Smith (1969)

Baldwin - Lomax

- Modèle à une équation de transport
(Prandtl Kolmogorov)

$\mu_t =$ fn de $k$, $\rho$, $l$ lg caractéristique
alors via l'analyse dimensionnelle, on n'a pas le choix, et $\mu_t = C_\mu \rho \sqrt{k}\, l$.

↳ Nécessité de connaître le champ de l'énergie cinétique turbulente $k$

$$\rho\Big(\underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla k}_{①}\Big) = -\partial_j\Big(\underbrace{\overline{p'v'_j} + \frac{1}{2}\overline{v'_i v'_i v'_j} - 2\mu\,\overline{s_{ij} v'_i}}_{②}\Big)$$
$$-\underbrace{\rho\overline{v'_i v'_j}\,\partial_j \bar{v}_i}_{③} - \mu\underbrace{\overline{\partial_j v'_i\, \partial_j v'_i}}_{④}$$

① Variation de l'énergie cinétique turbulente par unité de volume

② terme conservatif → une diffusion
$② = \partial_j\big((\mu + \mu_t/\sigma_k)\,\partial_j k\big)$. $\sigma_k$ empirique

③ terme $\geq 0$ $= \frac{1}{2}\mu_t\left(\partial_j \bar{v}_i + \partial_i \bar{v}_j\right)^2$. production

④ $-\rho\varepsilon$ terme $\leq 0$ Dissipation d'énergie cinétique turbulente $\varepsilon = C_D \frac{1}{l} k^{3/2}$ (Kolmogorov)

empiriquement : $\sigma_k = 1$, $C_D = 0{,}08$.

- Modèle $(k,\varepsilon)$ à deux équations de transport (populaire !)

Quid de la détermination de l'échelle $l$ ? La déterminer en utilisant une variable composite du genre $\phi = k^m l^n$

classiquement, $\phi = k^{3/2}/l \to \varepsilon$ !

Bcp d'hypothèses pour modéliser

$$\hookrightarrow \rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}\cdot\nabla\varepsilon\right) = \partial_i\left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right) + C_1^\varepsilon \frac{\varepsilon}{k}P - \rho \underbrace{C_2^\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k}}_{\text{dissip}^n}$$

$P = -\rho\overline{u_i' u_j'}\,\partial_j \bar{u}_i$ production d'é. turbulente

$C_1^\varepsilon = 1{,}44$ ; $C_2^\varepsilon = 1{,}92$, $C_\mu = 0{,}09$, $\sigma_k = 1$ ; $\sigma_\varepsilon = 1{,}3$

* Ça marche là où les hypothèses sont vérifiées : jets libres, sillages, zones de mélange
* Ça ne marche pas en écoulement plus complexe et près des parois.