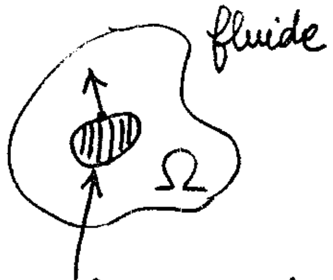
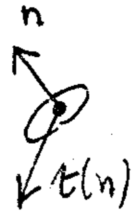
Chapitre (III) Interaction fluide-paroi

1) Généralités
2) Théorème d'Archimède
3) Coefficients aérodynamiques
4) Poussée d'un moteur-fusée
5) Masse ajoutée
6) Circulation et portance
7) Notion de couche limite
8) Théorie de Prandtl
9) Solution de Blasius
10) Décollement de la couche limite

1) Généralités

- bilan impulsion : $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \, dx = \int_\Omega \rho f \, dx + \int_{\partial\Omega} t \, d\gamma$





Σ : solide immobile : $u \cdot n = 0$

définition de $\vec{t}$ = force exercée par le fluide sur une plaquette de normale n (pointant vers le fluide).

- force $\quad F = \int_\Sigma t(n) \, d\gamma \qquad n$ = normale extérieure à Σ

$$F = \int_\Sigma -pn + \int_\Sigma \tau \cdot n \, d\gamma$$

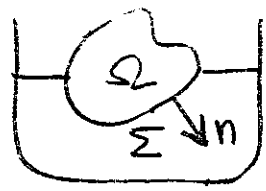
(!) à la convention de signe pour n.
cela change si on prend la normale extérieure à Ω (opposée à la normale extérieure à n)

- moment $\quad M = \int_\Sigma x \times t(n) \, d\gamma$

$$M = -\int_\Sigma x \times pn \, d\gamma + \int_\Sigma (x \times \tau \cdot n) \, d\gamma$$

2) Théorème d'Archimède (de Syracuse en Sicile, 250 avant J.C).

•



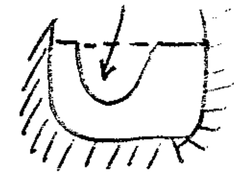
Efforts en hydrostatique.

$$\vec{f} = -\int_\Sigma p\vec{n}\, d\sigma \qquad \vec{f} + \vec{f}_{vol} = 0$$

Σ = section mouillée.

On remplace Ω par S, corps rigide maintenu en équilibre de sorte que le fluide extérieur à Ω reste dans le même état.

Le fluide agit sur S encore via la force $-p\vec{n}$ sur Σ. En particulier si on met pour S le fluide de départ, alors



$$f = -f_{vol}(\text{fluide}) = -\int_{\Omega'} -\rho g \vec{k}\, dx$$

$$\vec{f}_{pres} = m_{\Omega'}\, g\, \vec{k}$$

• (Th) Un corps en équilibre dans un fluide reçoit de la part de celui-ci une poussée dirigée vers le haut de module égal au poids du volume fluide déplacé.

(R) On a aussi (cf Bernoulli, ou Pascal)

$$f = -\int_\Sigma p\vec{n}\, d\sigma = \int_\Sigma \rho g z\, \vec{n}\, d\sigma$$

3) Coefficients aérodynamiques

$V_\infty \rightarrow$ définit une direction x

$\rho_\infty, V_\infty \rightarrow$ pression dynamique $\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2$

S : section coupée par le profil au sein de l'écoulement amont

$$\underbrace{\vec{f} = L\vec{j}}_{\text{portance}} + \underbrace{D\vec{i}}_{\text{traînée}} \qquad \begin{cases} L : \text{lift} \\ D : \text{drag} \end{cases}$$

$$L = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_L \longleftarrow \text{coefficient de portance}$$

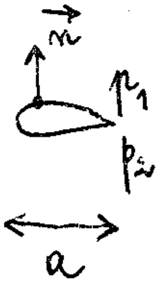
$$D = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S C_D \longleftarrow \text{coefficient de traînée}$$

M = moment, dirigé dans la direction perpendiculaire $\vec{k}$.

$$M = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S \ell \; C_M$$

ℓ : échelle de longueur le long de $\vec{k}$; C_M : coefficient de moment

- portance créée par une dépression à l'extrados.



$p_1 < p_2$ $\qquad \vec{f} = -\int p\vec{n}\, d\gamma \simeq a(-p_1 + p_2)\vec{k}$

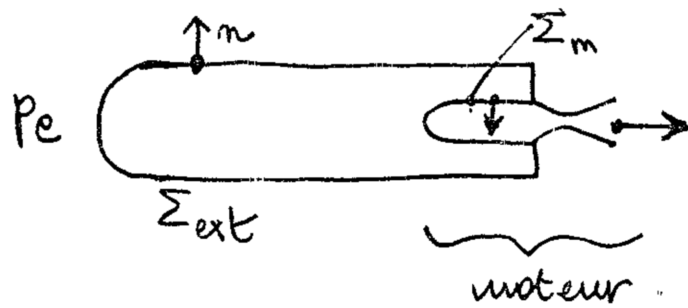
$$\vec{f}\cdot\vec{k} > 0 \Leftrightarrow p_2 > p_1$$

- Centre de poussée

  cf éléments de réduction d'un torseur

4) Poussée d'un moteur fusée

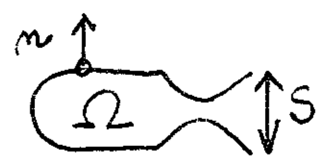
- Configuration géométrique



p_e pression dans le jet
V_e vitesse éjection des gaz
$\dot m$ débit massique

surface de contrôle Σ : toute la structure sans le fluide $\Sigma = \Sigma_{ext} + \Sigma_{moteur}$

- Bilan d'impulsion dans le moteur



fluide parfait stationnaire

$$\int_{\partial\Omega} \{\rho u(u\cdot n) + p n\}\, d\gamma = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} \rho u(u\cdot n) \simeq \int_S \rho u(u\cdot n)\, d\gamma$$

on néglige l'impulsion du gaz froid sur la paroi débitante ou le jet arrivant dans la chambre de combustion.

$$\dot m = \int_S \rho(u\cdot n)\, d\gamma \qquad \text{Donc} \quad \int_{\partial\Omega} \rho u(u\cdot n) = \dot m V_e$$

$$\underbrace{\int_{\Sigma_m} p\vec n\, d\gamma} = -\dot m V_e - p_e S$$

force propulsive, structure interne du moteur
attention au signe de la normale

- Astuce : introduire la pression atmosphérique p_0 à l'infini (air non perturbé par l'écoulement de la fusée) et la surface extérieure $\Sigma_{ext} + S$ formée de la structure <u>et</u> des gaz jusqu'à la sortie tuyère.

$$\int_{\Sigma_{ext}} p_0 \vec{n}\, d\sigma + \int_S p_0 \vec{n}\, d\sigma = 0$$

{car $\Sigma_{ext} + S$ délimite une surface fermée}

en projection sur Ox : $p_0 S = -\left(\int_{\Sigma_{ext}} p_0 \vec{n}\, d\sigma\right) \cdot \vec{i}$

- Faire le bilan de <u>tous</u> les fluides agissant sur la structure : air <u>et</u> gaz de combustion

$$\vec{f} = -\int_{\Sigma_{ext}} p_e \vec{n}\, d\sigma - \int_{\Sigma_m} p \vec{n}\, d\sigma$$

$$\vec{f} \cdot \vec{i} = -\int_{\Sigma_{ext}} \vec{i} \cdot p_e \vec{n}\, d\sigma - \dot{m} V_e - p_e S$$

$$= \underbrace{-\int_{\Sigma_{ext}} (p_e - p_0)(\vec{n} \cdot \vec{i})\, d\sigma}_{D\vec{i} \text{ traînée}} - \dot{m} V_e + (p_0 - p_e) S$$

$$\underbrace{-\vec{f} \cdot \vec{i}}_{\geq 0} = \dot{m} V_e + (p_e - p_0) S \underbrace{- D}_{\leq 0}$$

$p_e = p_0$: tuyère adaptée

$p_e < p_0$ recompression après la sortie tuyère (chocs)
régime qui dégrade la poussée
$p_e > p_0$ détente externe ↳ cf tuyère Shuttle
régime qui favorise la poussée

- Impulsion spécifique
terme ppal : $\dot{m} V_e$.

$$I_{sp} = \frac{V_e}{g}$$ en secondes !

5) <u>Masse ajoutée</u>

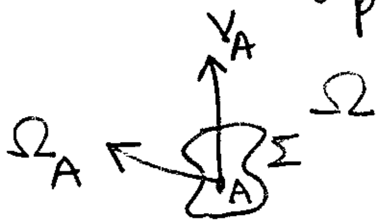
- au paragraphe précédent, il y a des choses pas rigoureuses car on applique à un solide (uniformément) accéléré un bilan valable dans un repère galiléen
↳ Attention !

- Ecoulement potentiel
Quel entraînement du fluide par l'objet en mouvement si celui-ci est accéléré ?
{≠ effet d'entraînement entre les particules fluides d'un fluide visqueux}
↳ entraînement par effet inertiel du fluide incompressible déplacé par le solide.
solide accéléré → le fluide qu'il déplace est <u>aussi</u> accéléré.

Phénomène d'habillage du solide par le fluide environnant → augmentation de l'effet d'inertie

→ masse ajoutée !

- Modèle {Germain p 254} solide en mouvement



→ vitesse V_A, vecteur rotation Ω_A

champ de vitesse du solide :

$$V(M) = V_A + \Omega \times AM$$

Ω : extérieur du solide contenant le fluide

A l'infini, la vitesse est nulle.

$u = \nabla\varphi$ écoulement potentiel à tout instant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{si } x \to \infty \qquad \nabla\varphi \to 0 \text{ si } x \to \infty \,? \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = u \cdot n = V(M)\cdot n = V_A \cdot n + (\Omega, AM, n) \end{cases}$$

fluide incompressible → $\Delta\varphi = 0$

soit $W = \begin{bmatrix} V_A \\ \Omega_A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 = {}^t(W_1, \dots, W_6)$

$$\mu = \begin{bmatrix} n \\ AM \times n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6 = {}^t(\mu_1, \dots, \mu_6)$$

alors $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} W_j \, \mu_j$

Par linéarité, $\varphi = \displaystyle\sum_{j=1}^{6} W_j \, \varphi_j$

avec $\Delta\varphi_j = 0 \quad \Omega$

$$\begin{cases} \nabla \varphi_j \to 0 & \text{à l'infini} \\ \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial n} = \mu_j(M) & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

- Energie cinétique du fluide

$$K = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho (\nabla \varphi)^2 dx \qquad \text{(a un sens; cf hyp à l'}\infty\text{)}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k W_j W_k \underbrace{\rho \int_\Omega \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_k \, dx}_{I_{jk}}$$

Alors $\dfrac{dK}{dt} = \sum_j \sum_k I_{jk} W_j \dfrac{dW_k}{dt}$

Or $\dfrac{dW_k}{dt} = \left(\gamma_A , \dfrac{d\Omega_A}{dt} \right)$

L'énergie cinétique perdue par le fluide est gagnée par le solide, donc la force généralisée, ie le couple (force, moment cinétique) agissant sur le fluide a pour k^o composante

$$\sum_{j=1}^{6} I_{jk} W_j'$$

tenseur d'inertie de l'obstacle induit par le fluide.

• Cas de la sphère. (Germain p254 ; Guyon p252)

On reprend l'ensemble du calcul dans le cas d'un mouvement sans rotation (ou avec,

de toute façon $AM \times n = 0$ pour la sphère)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = V_A \cdot n = V_A \cos\theta$$

alors φ = potentiel dipolaire

$$\varphi = -\frac{R^3}{2r^2} V_A \cos\theta = -\frac{R^3}{2r^3} V_A \cdot AP = -\frac{R^3}{2} \frac{V_A \cdot AP}{(AP)^3}$$

* force globale $= -\int p \vec{n}\, d\sigma$

Bernoulli : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C(t) - gh$

quelle contribution ? force nulle par symétrie altitude

$gh \to$ redonne la poussée d'archimède en hydrostatique.

$\frac{\partial}{\partial t} AM = -V_A$ car M est fixe et A bouge.

Donc $$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{R^3}{2}\left(\frac{1}{r^3} \frac{dV_A}{dt} \cdot AM - \frac{V_A^2}{r^3} + 3\frac{(V_A \cdot AM)^2}{r^5} \right)$$

d'intégrale nulle contre n.

$$-\int_\Sigma p \vec{n}\, d\sigma = -\rho \frac{R^3}{2} \frac{1}{R^3} \int_\Sigma (\gamma_A \cdot AM) \frac{\overrightarrow{AM}}{r} d\sigma$$

$$= -\rho \frac{1}{2R} \vec{\gamma}_A R^4 \underbrace{\int_0^\pi \cos^2\theta\, 2\pi \sin\theta\, d\theta}_{2 \times \frac{2\pi}{3}} = -\rho R^3 \vec{\gamma}_A \frac{2}{3}\pi$$

résultante des actions du fluide sur la sphère = poussée d'archimède plus force d'inertie $-m'\,\overrightarrow{\gamma_A}$

$$m' = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)}_{\text{masse de la sphère remplie de fluide}}$$

* ballon

qui contient un gaz dix fois plus léger que l'air

poids $-mg\vec{k}$

archimède $10\,mg\vec{k}$

force d'inertie $-5m\,\gamma_A$

bilan $m\gamma_A = -mg + 10mg - 5m\gamma_A$

$$\gamma_A = \frac{3}{2}g$$

* si $\rho_{corps} <$ ou $\simeq \rho_{a\,fluide}$, alors la force d'inertie devient non négligeable

Ex antennes du satellite N*

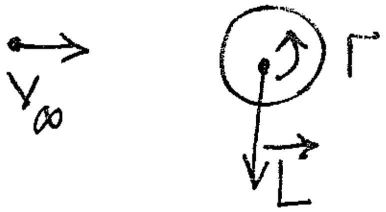
essais dans l'air → le fondamental est décalé de 25% !

6) Circulation et portance

- Etude bidimensionnelle
  fluide parfait potentiel

(Th) de Joukovski (1906).

Dans un écoulement $\underbrace{\text{bidimensionnel}}^{\text{irrotationnel}}$ de fluide parfait autour d'un contour fermé et de circulation Γ, dont la vitesse à l'infini est V_∞, la pression aérodynamique agit sur le contour avec une force perpendiculaire à la vitesse, de module $|L| = \rho_\infty V_\infty \Gamma$; la direction est obtenue en tournant $\vec{V}_\infty$ de $\pi/2$ dans la direction contraire de Γ.



$$\vec{L} = \rho_\infty \vec{V}_\infty \times \Gamma \vec{k}$$

$$L = -\rho_\infty V_\infty \Gamma \quad \text{si} \quad \vec{V}_\infty = V_\infty \vec{\imath}\,.$$

Preuve du th de Joukovski

- Il faut d'abord établir la formule de Blasius (cf Germain p 225) qui exprime la force (complexe) $F = F_1 - i F_2$ en fonction du potentiel complexe des vitesses.

$$F = F_1 - i F_2 = -\oint_{\text{profil}} p(n_1 - i n_2)\, d\gamma .$$

$f = \varphi + i\psi$ holomorphe

$$\frac{df}{dz} = u - iv \qquad -p = \frac{\rho}{2}|\nabla\varphi|^2 + \text{cste} \quad \text{(Bernoulli)}$$

$$(n_1 - i n_2)\, d\gamma = dy + i dx$$

Donc $F = \dfrac{\rho}{2}\oint (u-iv)(u+iv)(dy + i dx)$

$\to$ nul car $(u \cdot n) = 0$

$$(u+iv)(dy+idx) = (u dy - v dx) + i(u dx + v dy)$$

$$= (v dx - u dy) + i(u dx + v dy)$$

$$= i(u - iv)(dx + i dy).$$

$$F = i\frac{\rho}{2}\oint_{\text{profil}} \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$$

(R) formule analogue pour le moment

- on calcule F en déformant le contour, en pratique en prenant une frontière loin du profil, où le champ de vitesse est connu, ainsi que la circulation.

$$f = V_\infty z - i\frac{\Gamma}{2\pi}\log z + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{z^k}$$

$$\frac{df}{dz} = V_\infty - i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} k\,\alpha_k \frac{(-1)}{z^{k+1}}$$

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^2 = -\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{z^2} - i\frac{\Gamma}{\pi}V_\infty \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \frac{1}{z^k}$$

$\oint\left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz$ est donné par la formule des résidus, c'est à dire $2i\pi \times$ coef de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ en puissances de $\frac{1}{z}$.

$$F = i\frac{\rho}{2}(2i\pi)\left(-i\frac{\Gamma}{\pi}V_\infty\right) = i\rho V_\infty \Gamma = F_1 - i F_2$$

$$F_1 = \text{traînée} = 0$$

$$F_2 = \text{portance} = L = -\rho V_\infty \Gamma. \quad \blacksquare$$

- que vaut la portance ? la circulation ? pb du cylindre → ∞té d'écoulements, paramétrés par la circulation Γ !

Profil à pointe

Condition de Kutta-Joukovski (1902, 1906, 1894)
Kutta Joukovski Lanchester

□ Condition KJ : la vitesse est finie (donc nulle pour un angle $\alpha \neq 0$) au bord de fuite.

↳ fixe la circulation, donc la portance !

- Cas tridimensionnel :

Paradoxe de d'Alembert (1744)

- (Th) La résultante des efforts d'un fluide parfait stationnaire autour d'un domaine D simplement connexe et potentiel est nulle !

preuve : voir Germain p257, Serrin p158.
outil = dvp asymptotique de fonctions harmoniques tridimensionnelles.

- Donc les effets de la viscosité doivent être pris en compte de manière essentielle.

- Etablissement de la circulation

$t=0$ fluide au repos $\rightarrow \Gamma=0$

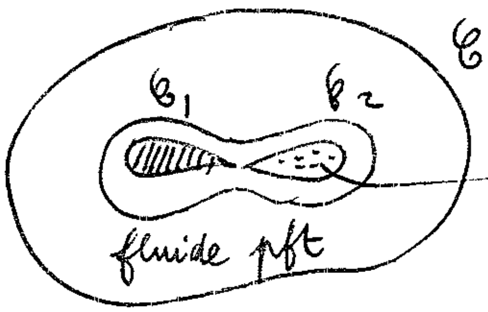
$t>0$ $\Gamma\neq 0$

viscosité

gradients très grands au voisinage de F

$\rightarrow$ effets de viscosité importants.

$\rightarrow$ existence d'un sillage rotationnel.

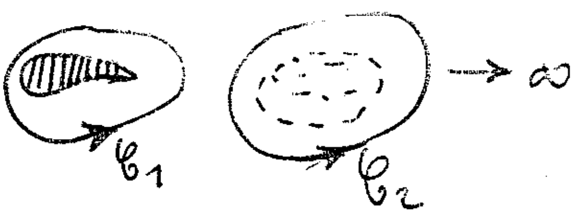


$\rightarrow$ sillage rotationnel.

$0<t<T<\infty$

$$\int_{\mathcal{C}} v.t\,ds=0.$$

$$\int_{\mathcal{C}_1} v.t\,ds=\Gamma\neq 0 \qquad \int_{\mathcal{C}_2} v.t\,ds=-\Gamma$$

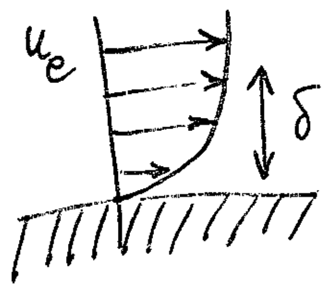


7) Notion de couche limite

- Ecoulement près d'une paroi plane

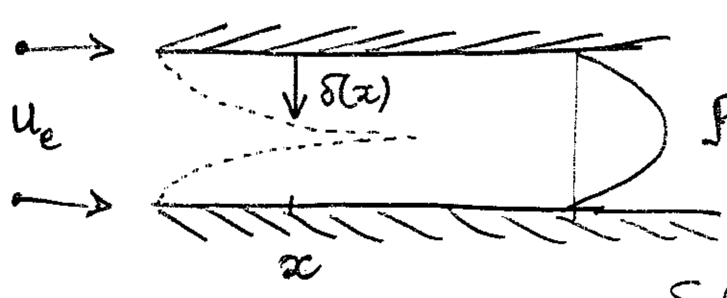
  * fluide parfait : $u \cdot n = 0$
    non pénétration du fluide
    glisse sans frottement le long de la paroi

  * fluide visqueux : $u = 0$
    pas de vitesse tangentielle à la paroi
    frottement le long de celle-ci.



on a une variation importante du champ de vitesse sur une épaisseur δ
→ Couche limite

- Développement de la couche limite
  ex d'un écoulement entre deux plaques



Poiseuille
↑
Solution exacte des équations de Navier-Stokes : profil parabolique de vitesse

- Ordres de grandeur.

$$\underbrace{\rho u . \nabla u}_{\text{inertie}} + \underbrace{\nabla p}_{\text{pression}} \underbrace{- \operatorname{div} \tau}_{\text{viscosité}} = 0 .$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy}$$

cf couche de cisaillement

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{U}{x} \qquad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \rho \frac{u^2}{x}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \mu \frac{u}{\delta^2}$$

* équilibre entre forces d'inertie et de viscosité

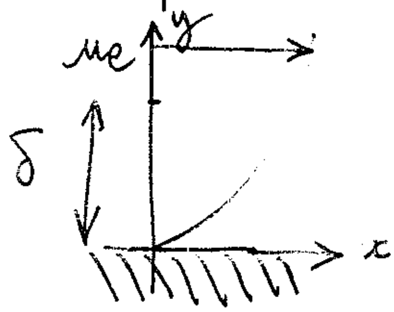
$$\rho \frac{u^2}{x} \sim \mu \frac{U}{\delta^2}$$

$$\delta \sim x \sqrt{\frac{\mu}{\rho u x}} \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$Re_x = \dfrac{\rho u x}{\mu}$ nombre de Reynolds basé sur la distance au bord d'attaque de la plaque.

* $\delta(x) = O(\sqrt{x})$ et $\dfrac{\delta(x)}{x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{Re_x}}$.

- Epaisseur de la couche limite



$u(x,y)$ dans le fluide

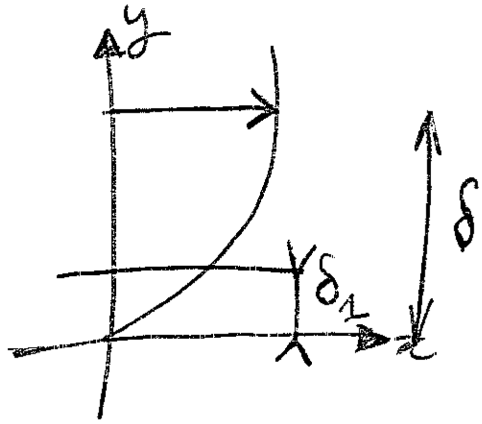
$y \to +\infty \quad u(x,y) \to u_e(x)$.

Continuité $\to \exists \delta \,/\, u(x,\delta) = \underbrace{0{,}99}_{\text{convention}}\ u_e(x)$

δ : épaisseur de la couche limite.

- Epaisseur de déplacement.

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$$

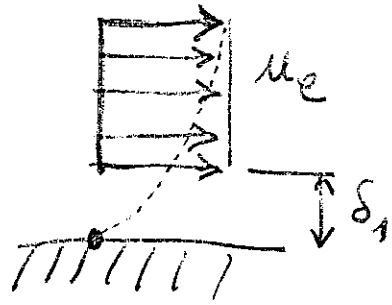


débit dans la couche limite

$$q = \int_0^\delta \rho u \, dy = \rho_e u_e \int_0^\delta \left[1 - \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right)\right] dy$$

$$q = \rho_e u_e (\delta - \delta_1)$$

défaut de débit $= \rho_e u_e \delta_1$



modèle de couche limite :

écoulement extérieur (pas 0,99 fois celui-ci !)

sur épaisseur $\delta - \delta_1$; rien après

équivalent à déplacer la paroi de δ_1 et d'imaginer que l'on a un fluide parfait.

- Epaisseur de quantité de mouvement

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$$

débit de quantité de mouvement

$$J = \int_0^\delta \rho u^2 \, dy$$

Quid si on a le même débit de masse, mais avec pour vitesse u_e au lieu de u ?

$$J_e = \dot{m}\, u_e = \left(\int_0^\delta \rho u \, dy\right) u_e$$

$$J_e - J = \int_0^\delta \rho u (u_e - u)\, dy = \rho_e u_e^2 \, \delta_2$$

- Paramètre de forme H (facteur de forme).

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

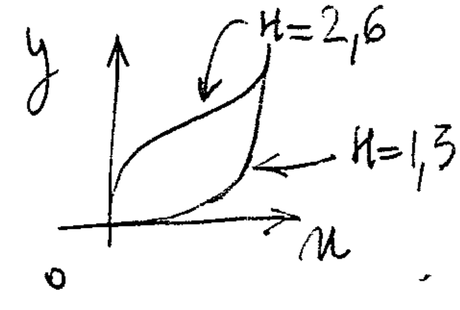
$H_{\text{profil linéaire}} = 3$

$H_{\text{laminaire}} = 2{,}61$

$H_{\text{Poiseuille}} = ?$

H turbulent : 1,2 à 2,6.

$H > 2{,}6$: décollement de la couche limite



8) Théorie de Prandtl

(1905)

- fluide incompressible stationnaire le long d'une plaque plane

Deux échelles de longueur très différentes

$$x, \quad \delta(x) \ll x$$

- continuité $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0.$

$$v \simeq u \frac{\delta(x)}{x} = \frac{u}{\sqrt{Re}} \ll u.$$

Donc la composante sur y est d'un ordre de grandeur plus petite que la composante de la vitesse sur x.

- impulsion selon x.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \frac{u}{\delta^2} \gg \frac{u}{x^2} \simeq \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\text{mais} \quad v\frac{\partial u}{\partial y} \simeq u \frac{\delta(x)}{x} \frac{u}{\delta(x)} \simeq \frac{u^2}{x} \simeq u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Donc il reste $\quad u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

- impulsion selon y

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

les termes en v sont d'un ordre de grandeur plus petits que les termes en u de l'équation précédente ; donc on les enlève

Il reste $\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \longrightarrow \quad p = p_e(x)$ donné

- Energie (pour mémoire)

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + u \frac{dp_e}{dx} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 .$$

- Système d'équations à résoudre.

$$u(x,\infty) = u_e(x) \qquad\qquad p + \frac{1}{2}\rho u_e^2 = \text{cste}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp_e}{dx} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{pm}) \end{cases}$$

$$u(x,0) = v(x,0) = 0$$

9) Solution de Blasius (1908)

- Chercher une solution autosemblable dans le cas où $u_e(x) = U = cste$

$$\begin{cases} \text{deux échelles de longueur} & x_0 & \delta(x_0) = \dfrac{x_0}{\sqrt{Re(x_0)}} \\ \text{—————— vitesse} & u & v = \dfrac{u}{\sqrt{Re(x_0)}} \end{cases}$$

- Introduire les deux échelles dans les équations on fixe x_0 ; $\delta(x_0)$.

$$x = x_0 x' \qquad y = \delta(x_0)\, y' = \frac{x_0}{\sqrt{Re(x_0)}}\, y'$$

$$u = U u' \qquad v = \frac{U}{\sqrt{Re(x_0)}}\, v' \qquad Re = \frac{U x_0}{\nu}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

échelle de $u\dfrac{\partial u}{\partial x} : \dfrac{U^2}{x_0}$; $v\dfrac{\partial u}{\partial y} : \dfrac{U}{\sqrt{Re}}\,\dfrac{U}{\frac{x_0}{\sqrt{Re}}} = \dfrac{U^2}{x_0}$

échelle de $\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$: $\nu\,\dfrac{U}{\frac{x_0^2}{Re(x_0)}} = \dfrac{U^2}{x_0}$

$$\longrightarrow u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = 0 \qquad \text{car } \frac{dp}{dx} = 0 \text{ ici}$$

équilibre entre la convection (non linéaire) et la diffusion (linéaire)

- Fabriquer avec les deux échelles de longueur adimensionnées une grandeur qui ne dépende pas de x_0, qui ne joue aucun rôle dans le problème.

$$x' = \frac{x}{x_0} \qquad y' = \frac{y}{\delta(x_0)} = \qquad y\sqrt{\frac{U}{\nu x_0}}$$

$\theta = \dfrac{y'}{\sqrt{x'}}$ ne dépend plus de x_0. $\qquad \theta = \dfrac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}$

Donc on cherche $\begin{cases} u = U f'(\theta) \\ v = U\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\ h(\theta) \end{cases}$ [traditionnel]

- Equation de Blasius : $2f''' + f f'' = 0$.

plus précisément $\quad \psi'' = -\frac{1}{2}\psi'(\theta)\int_0^\theta \psi(\xi)\,d\xi$

où $\psi = f'$. $\quad f(0) = 0$

passer en (x,θ)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = U\psi'(\theta)\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{2}U\psi'(\theta)\frac{\theta}{x} \qquad \frac{u}{U} = \psi(\theta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial y}\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

Donc $\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \sqrt{\dfrac{\nu U}{x}}\ \theta\ \dfrac{\psi'(\theta)}{2}$

ie $\quad v = \sqrt{\dfrac{\nu U}{x}}\left(\dfrac{1}{2}\theta\psi(\theta) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\psi(\xi)\,d\xi\right)$

* $\quad u\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\theta}{x}u\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{U^2}{x}\theta\,\psi(\theta)\psi'(\theta)$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\frac{\nu U}{x}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}U\left(\frac{1}{2}\theta\psi(\theta) - \frac{1}{2}\int\psi(\xi)\,d\xi\right)\psi'(\theta)$$

$$v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U^2}{x}\psi'(\theta)\left(\frac{1}{2}\theta\psi(\theta) - \frac{1}{2}\int\psi(\xi)\,d\xi\right)$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}\frac{1}{\sqrt{\frac{\nu x}{U}}}U\psi''(\theta) = \frac{U^2}{x}\psi''(\theta)$$

Donc l'équation d'impulsion donne $-\frac{1}{2}\psi'\int\psi\,d\xi = \psi''$.

* on fixe les bornes d'intégration
Conditions aux limites

$y=0 \qquad \frac{u}{U} = \qquad \psi(0)=0$

$$\frac{v}{\sqrt{\frac{\nu U}{x}}} = \frac{v(0)}{\sqrt{\frac{\nu U}{x}}} = 0 .$$

Donc $v = \sqrt{\frac{\nu U}{x}} \left(\frac{1}{2}\theta \psi(\theta) - \frac{1}{2}\int_0^\theta \psi(\xi) d\xi \right)$.

$y=\infty \qquad \frac{u}{U} = f(\theta) \to 1$ si $\theta \to \infty$.

- Résolution approchée de l'équation de Blasius

{ forme classique: $\psi = f'$, ie $\quad f''' = -\frac{1}{2} f'' f$

* $\psi'' = -\frac{1}{2}\psi' \int_0^\theta \psi \, d\xi \qquad \to \psi''(0) = 0$

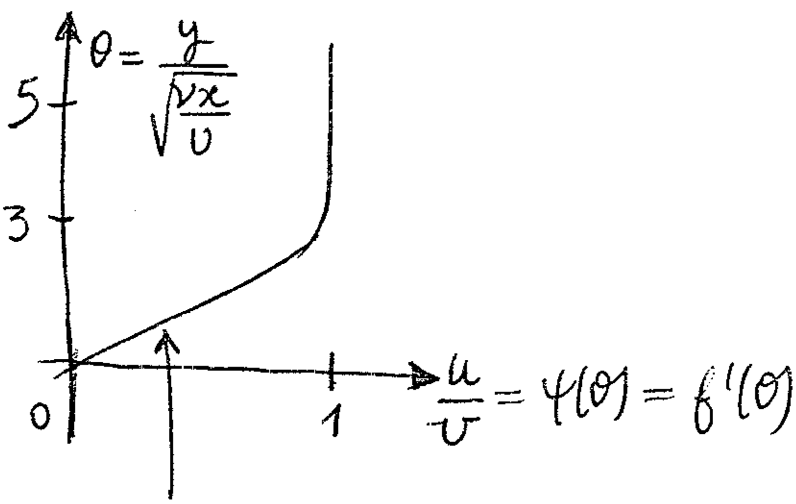
je dérive: $\psi''' = -\frac{1}{2}\left(\psi'\psi + \psi''\int_0^\theta \psi \, d\xi\right)$

je fais $\theta = 0$. $\psi'''(0) = 0 \qquad$ car $\psi(0)=0$.

$$\frac{u}{U} = \theta f'(0) + b\theta^4 + O(\theta^5)$$

* on reporte dans l'équation de Blasius
$b = -\frac{1}{48}\left(\psi'(0)\right)^2$

* $\theta \to \infty \qquad \int_0^\theta \psi \, d\xi \sim \theta$.
alors $\psi'' \simeq -\frac{1}{2}\theta\psi'$
ie $\psi'(\theta) \sim k \exp\left(-\frac{1}{4}\theta^2\right)$



$\psi'(0) = 0{,}334 \simeq \frac{1}{3}$.

$\psi(\theta=5) = 0{,}99$

- Epaisseurs caractéristiques

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= 1{,}720 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \\ \delta_2 &= 0{,}664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \end{aligned}\right\} H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \simeq 2{,}59 .$$

contrainte pariétale $\leftarrow$ le nouveau terme dans l'interaction du fluide sur la paroi !

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} . \qquad c_f = \frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho U^2}$$

$$c_f = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_x}}$$

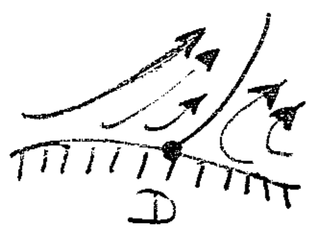
10) Décollement de la couche limite

- Couche limite soumise à un "gradient de pression adverse" i.e. $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$

  $u_e(x)$ diminue

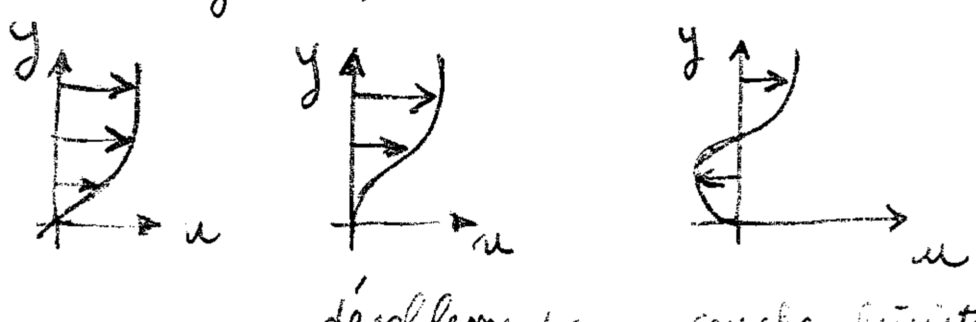
  → les particules fluides décélèrent.

  après un moment, il y a un point où la vitesse s'annule!



- Critère classique $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$.

  $\frac{\partial u}{\partial y}(y=0) = 0$



décollement   couche limite décollée.

- Application : décrochage des ailes d'avion