



Introduction aux systèmes hyperboliques non linéaires

Villetaneuse, 2005

Cours 04

Ondes de choc

- Relations de Rankine et Hugoniot
- Invariance de Galilée
- Condition d'entropie faible
- Chocs entropiques

François Dubois
avril 2005, 25 pages

Ondes de choc

1) Relations de Rankine et Hugoniot.

- on cherche à donner un sens à des solutions de la loi de conservation

$$(1.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w) = 0$$

qui ne sont plus dérivables. Pour cela, on écrit l'équation (1.1) sous une forme qui n'utilise pas explicitement les dérivées partielles $\frac{\partial w}{\partial t}$ et $\frac{\partial w}{\partial x}$. On multiplie l'équation (1.1) par une fonction test φ , régulière, à support compact dans $\mathbb{R} \times]0, \infty[$:

$$(1.2) \quad \varphi \in (\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R} \times]0, \infty[))^N$$

où l'exposant N rappelle que $w(x,t)$ est un vecteur:
 $w(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Après intégration par parties, il vient

$$(1.3) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} w + \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(w) \right) dt dx = 0, \quad \forall \varphi \in (\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R} \times]0, \infty[))^N$$

et cette expression a un sens dès que $w \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[$, ce que nous supposons implicitement dans la suite.

- Lorsque $w \in (L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[))^N$ satisfait la relation (1.3) (qui opère pour tous les fonctions test φ assez réguliers et à support compact), on dit que $w(x,t) \in \Omega$ est solution faible de la loi de conservation (1.1). Nous nous demandons

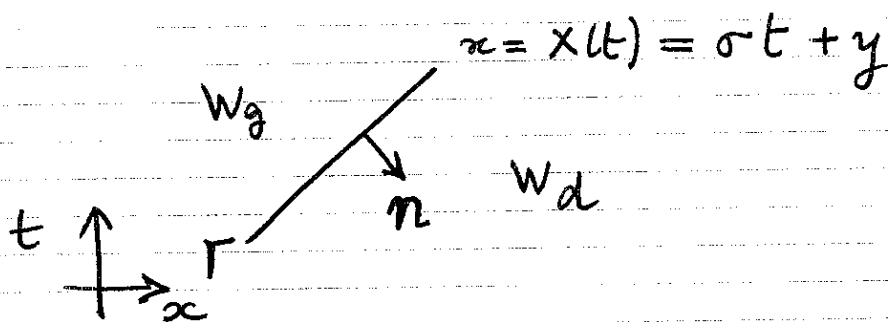


Figure 1 Solution discontinue de la loi de conservation (1.1).

* ————— *

dans la suite de ce paragraphe à quelle condition une fonction w discontinue à la traversée d'une courbe Γ (rectiligne pour simplifier l'exposé) est constante de part et d'autre de ce dioptré (voir la figure 1) est solution faible de (1.1). On introduit une fonction test φ tel que $\text{supp } \varphi \cap \Gamma$ n'est pas vide. on évalue le membre de gauche de la relation (1.3) en séparant l'intégrale sur $D_g \equiv \{(x, t), x < \sigma t + y\} \cap \text{supp } \varphi$ et l'intégrale sur $D_d \equiv \{(x, t), x > \sigma t + y\} \cap \text{supp } \varphi$.

• Il vient

$$\begin{aligned} \int_{D_g \cup D_d} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} w + \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(w) \right) dt dx &= - \int_{D_g \cup D_d} \varphi \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dt dx \\ &+ \int_{\partial D_g} \varphi (w n_t + f(w) n_x) d\gamma + \int_{\partial D_d} \varphi (\tilde{w} \tilde{n}_t + f(\tilde{w}) \tilde{n}_x) d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} \varphi \left((w_g - w_d) n_t + (f(w_g) - f(w_d)) n_x \right) d\gamma. \end{aligned}$$

l'intégrale sur $D_g \cup D_d$ de la loi de conservation multi-

placé par φ est nulle car w_g et w_d sont des états constants. De plus, l'intégrale sur le bord de D_g se réduit à une intégrale sur Γ car φ est nulle au bord de son support. Il en est de même pour D_d , de normale extérieure \tilde{n} , opposée à n : $n + \tilde{n} = 0$. Le domaine de "gauche"

D_g est choisi de sorte que $n_x > 0$ (voir la figure 1!) et on a la relation classique entre $n = (n_x, n_t)$ et la célérité $\sigma = \frac{dx}{dt}$:

$$(1.4) \quad n_t + \sigma n_x = 0, \quad n_x > 0.$$

on injecte ces relations dans le calcul précédent et on prend en compte la définition (1.3) d'une solution faible. Il vient

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma} \varphi n_x (f(w_d) - f(w_g) - \sigma (w_d - w_g)) d\sigma = 0 \\ \forall \varphi \in (C_0^2(\mathbb{R} \times]0, \infty[))^N. \end{array} \right.$$

La relation (1.5) n'est vraie pour toute fonction test φ régulière que si le multiplicateur de φ dans l'intégrale sur Γ est nul. Nous venons de montrer la

Proposition ① Relation de Rankine et Hugoniot
Soit $(x,t) \mapsto w(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ une fonction constante par morceaux, discontinue à travers la courbe $x = x(t)$ de sorte que

$$(1.6) \quad w(x,t) = \begin{cases} w_g, & x < \sigma t + y \\ w_d, & x > \sigma t + y. \end{cases}$$

Alors w est solution faible de la loi de conservation (1.1) (au sens de la définition (1.3)) si et seulement si la relation de Rankine et Hugoniot est satisfaite :

$$(1.7) \quad f(w_d) - f(w_g) = \sigma(w_d - w_g)$$

- La réciproque est laissée au lecteur on note aussi la relation (1.7) sous la forme

$$(1.8) \quad [f(w)] = \sigma[w]$$

où $[f(w)]$ désigne, pour un champ ψ arbitraire, la différence $\psi_d - \psi_g$:

$$(1.9) \quad [f] \equiv \psi_d - \psi_g$$

2) Invariance de Galilée

- Nous devons maintenant exploiter la relation algébrique (1.8) dans le cas des équations de Saint Venant, où

$$(2.1) \quad w = \begin{pmatrix} p \\ pu \\ pv \end{pmatrix}, \quad f(w) = \begin{pmatrix} pu \\ pu^2 + p \\ puv \end{pmatrix}$$

Nous fixons un état "à gauche" w_0 et nous cherchons à quelle condition sur l'état (variable!) w "à droite", il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ de sorte que (1.8) a lieu, ce qui s'écrit dans notre cas par :

$$(2.2) \quad [\rho u] = \sigma [\rho]$$

$$(2.3) \quad [\rho u^2 + p] = \sigma [\rho u]$$

$$(2.4) \quad [\rho u v] = \sigma [\rho v]$$

- on peut simplifier l'écriture des relations (2.2) à (2.4) en utilisant l'invariance de Galilée des lois de la physique: si on se place dans le repère lié à la discontinuité, la vitesse de ce repère est nulle (on prend $\sigma = 0$ au membre de droite des relations (2.2) à (2.4)) mais la vitesse u doit être remplacé par $u - \sigma$ (on remplace u par $u - \sigma$ dans le membre de gauche de (2.2) à (2.4)).

Proposition (2) Invariance de Galilée.

Les deux états W_0 et W sont liés par les relations de Rankine et Hugoniot si et seulement si

$$(2.5) \quad [\rho(u - \sigma)] = 0$$

$$(2.6) \quad [\rho(u - \sigma)^2 + p] = 0$$

$$(2.7) \quad [\rho(u - \sigma)v] = 0.$$

Preuve de la proposition (2)

- Nous montrons les relations (2.5) à (2.7) à partir de (2.2) à (2.4), la réciproque étant facile (donc laissé au lecteur...). Seule

La relation (2.6) demande d'effectuer un calcul algébrique, les relations (2.5) et (2.7) étant une simple conséquence du fait que, par essence, σ est une grandeur qui n'a pas de saut à travers la discontinuité, on a donc

$$\begin{aligned} [\rho(u-\sigma)^2 + p] &= [\rho(u^2 - 2\sigma u + \sigma^2) + p] \\ &= [\rho u^2 + p] - 2\sigma [\rho u] + \sigma^2 [\rho] \\ &= \sigma [\rho u] - 2\sigma [\rho u] + \sigma^2 [\rho] \quad (\text{cf (2.3)}) \\ &= \sigma (-[\rho u] + \sigma [\rho]) = 0 \quad (\text{cf (2.2)}) \end{aligned}$$

□

- Nous pouvons introduire le flux de masse m qui traverse la discontinuité de la gauche vers la droite:

$$(2.8) \quad m = \rho(u - \sigma)$$

et la relation (2.5) exprime que m est continu à la traversée du choc (de la discontinuité plus exactement). Nous avons alors

Proposition ③ Saut de la vitesse tangentielle.

Soit $(w_0, w) \in \Omega^2$ une paire d'états liés par les relations de Rankine et Hugoniot (2.2) à (2.4), et m défini par (2.8).

On a alors

$$(2.9) \quad m \neq 0 \Rightarrow [v] = 0.$$

• le saut de la vitesse tangentielle est nul si le flux de masse à travers la discontinuité est non nul. On parle dans ce cas d'onde de choc. Une onde de choc est une discontinuité qui satisfait aux relations de Rankine et Hugoniot et telle que le flux de masse m défini en (2.8) est non nul. Dans la suite de cette leçon, nous ferons implicitement l'hypothèse que $m \neq 0$. La preuve de la proposition 3 est facile. Elle est laissée au lecteur.

Proposition (4) Calcul du flux de masse.

on désigne par τ le volume spécifique, inverse de la masse volumique.

$$(2.10) \quad \tau \equiv \frac{1}{\rho}$$

Alors le flux de masse m d'un choc entre w_0 et w satisfait à

$$(2.11) \quad m^2 [\tau] + [\rho] = 0$$

c'est à dire

$$(2.12) \quad m = \pm \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\tau_0 - \tau}} = \pm \sqrt{\rho_0 \rho} \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0}}$$

Preuve de la proposition 4.

• on écrit la relation (2.6) sous la forme $[m^2 \tau + \rho] = 0$, compte tenu de la définition (2.8) de flux de masse en ensuite continu, d'en (2.11). □

• on tire donc de (2.8)

les deux relations

$$(2.13) \quad u = \sigma + m \tau$$

$$(2.14) \quad u_0 = \sigma + m \tau_0.$$

D'où par différence

$$(2.15) \quad [u] = m [\tau],$$

et en utilisant la relation (2.12):

$$(2.16) \quad u = u_0 \mp \frac{1}{\sqrt{\rho \rho_0}} \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0}} (\rho - \rho_0)$$

avec le signe - lorsque $m > 0$ et le signe + si $m < 0$.

- Avant d'aller plus avant, nous devons sélectionner parmi les discontinuités (chocs!) admissibles (c'est-à-dire qui satisfont aux relations de Rankine-Hugoniot, donc à (2.16)), celles qui ont lieu physiquement, qui satisfont au second principe de la thermodynamique, ce qui nécessite un détour par la construction des "solutions faibles entropiques" de la loi de conservation (1.1).

3) Condition d'entropie faible

- Nous savons que la recherche de solutions faibles pour l'équation de Burgers

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, u(x, t) \in \mathbb{R}$$

permet de donner un sens au problème de Cauchy formé de (3.1) et d'une condition initiale

le telle que

$$(3.2) \quad u(x,0) = \begin{cases} u_g, & x < 0 \\ u_d, & x > 0. \end{cases}$$

- Pour $u_g = 0$ et $u_d = 1$, on vérifie sans difficulté que l'onde de détente $u^d(x,t)$ définie par

$$(3.3) \quad u^d(x,t) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{t} \leq 0 \\ \frac{x}{t}, & 0 \leq \frac{x}{t} \leq 1 \\ 1, & \frac{x}{t} \geq 1 \end{cases}, t > 0$$

est solution faible (3.1)(3.2) du problème de Cauchy.

On peut construire aussi une autre solution faible discontinue $u^c(x,t)$ définie par

$$(3.4) \quad u^c(x,t) = \begin{cases} 0, & \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{x}{t} > \frac{1}{2} \end{cases}, t > 0$$

où la vitesse de la discontinuité σ est choisie de sorte de satisfaire à la relation de saut de Rankine-Hugoniot qui s'écrit ici

$$(3.5) \quad \left[\frac{u^2}{2} \right] = \sigma [u],$$

donc $\sigma = \frac{1}{2}(u_g + u_d)$ si $[u] \neq 0$. La coexistence de deux solutions faibles u^d et u^c (relations (3.3) et (3.4)) montre que cette notion n'est pas suffisante pour garantir l'unicité du problème de Cauchy. Il importe d'enrichir l'approche développée au premier paragraphe.

- Nous avons vu dans la leçon d'introduction aux équations de Saint Venant qu'il existe une fonction $\Omega \ni \mathbb{R}^3 \rightarrow \eta(w) \in \mathbb{R}$ strictement convexe, définie algébriquement par

$$(3.6) \quad \eta(w) = \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) + \frac{p}{\gamma - 1}$$

et appelé entropie mathématique, de sorte qu'il existe un flux d'entropie $\Omega \ni w \mapsto \xi(w) \in \mathbb{R}$ qui s'écrit facilement:

$$(3.7) \quad \xi(w) = \eta(w) u + p u, \quad w = (p, \rho u, \rho v)^t \in \Omega$$

tel que toute solution régulière de (1.1) satisfait de plus à la loi de conservation supplémentaire

$$(3.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(w) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(w) = 0.$$

Nous avons remarqué que le passage de (1.1) à (3.8) s'effectue facilement en multipliant (1.1) à gauche par la jacobienne de l'entropie $d\eta(w)$, compte tenu de la relation algébrique

$$(3.9) \quad d\xi(w) = d\eta(w) \cdot df(w), \quad \forall w \in \Omega.$$

- Nous nous restreignons maintenant à des perturbations visqueuses de la loi de conservation (1.1), paramétrées par $\varepsilon > 0$.

$$(3.10) \quad \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w^\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2} = 0, \quad \varepsilon > 0$$

et nous supprimons $w^\varepsilon \rightarrow w$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, avec w fonction localement bornée de l'espace et du temps.

Proposition 5 Inégalité d'entropie pour une perturbation visqueuse. Soit $(x,t) \mapsto w^\varepsilon(x,t) \in \Omega$ une solution régulière de (3.10). On a alors, pour (η, ξ) couple (entropie, flux d'entropie) défini aux relations (3.6) et (3.7):

$$(3.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(w^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(w^\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(w^\varepsilon) \leq 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Preuve de la proposition 5

- On multiplie (3.10) à gauche par la jacobienne $d\eta(w^\varepsilon)$ or on a facilement, compte tenu de la relation (3.9):

$$\begin{aligned} d\eta(w^\varepsilon) \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(w^\varepsilon)}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \eta(w^\varepsilon) + d\eta(w^\varepsilon) \cdot \frac{df(w^\varepsilon)}{dw^\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \eta(w^\varepsilon)}{\partial t} + d\xi(w^\varepsilon) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \eta(w^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \xi(w^\varepsilon)}{\partial x}. \end{aligned}$$

- on a par ailleurs, en intégrant le terme visqueux par parties:

$$\begin{aligned} d\eta(w^\varepsilon) \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(d\eta(w^\varepsilon) \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x} \right) - d^2 \eta(w^\varepsilon) \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta(w^\varepsilon)}{\partial x} \right) - d^2 \eta(w^\varepsilon) \cdot \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x}, \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x} \right) \\ &\leq \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(w^\varepsilon) \end{aligned}$$

Car η est convexe, donc la Hessienne satisfait

à la relation

$$(3.12) \quad d^2\eta(w) \cdot (\varphi, \varphi) \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}^N.$$

• On déduit des deux calculs précédents

$$\begin{aligned} 0 &= d\eta(w^\varepsilon) \cdot \left(\frac{\partial w^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(w^\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 w^\varepsilon}{\partial x^2} \right) \\ &\geq \frac{\partial \eta(w^\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial \xi(w^\varepsilon)}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 \eta(w^\varepsilon)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

ce qui constitue exactement l'inégalité (3.11). \square

• on peut maintenant déduire une condition nécessaire sur la limite éventuelle w (localement bornée) de la famille w^ε ($\varepsilon > 0$).

Proposition (6) Inégalité d'entropie faible

Soit w^ε une famille de solutions régulières de la perturbation visqueuse (3.10) de sorte que $w^\varepsilon \rightarrow w$ presque partout avec w bornée localement. Soit $\varphi \geq 0$ régulière à support compact arbitraire :

$$(3.13) \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R} \times]0, \infty[, \mathbb{R}_+).$$

Alors la limite w satisfait en plus de la relation (1.3) l'inégalité suivante

$$(3.14) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi(w) \right) dt dx \geq 0, \quad \varphi \geq 0,$$

où (η, ξ) est le couple (entropie, flux) défini en (3.6)-(3.7).

- Nous appelons solution faible entropique de la loi de conservation (1.1) une fonction w bornée sur les compacts ($w \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \times]0, \infty[; \Omega)$) de sorte que (1.3) a lieu pour toute fonction test et (3.14) a lieu pour toute fonction test positive.

Preuve de la proposition (6)

- on multiplie l'inégalité (3.11) par $\varphi \geq 0$ à support compact dans $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ (ce qui annule tous les termes de bord) et on intègre par parties, deux fois pour le terme en $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(w^\varepsilon)$. Il vient :

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w^\varepsilon) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi(w^\varepsilon) \right) dt dx \\ - \varepsilon \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \eta(w^\varepsilon) dt dx \leq 0. \end{array} \right.$$

- on peut passer à la limite dans les termes tels que $\int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w^\varepsilon) dt dx$. L'intégrale a lieu sur un compact où φ est non nulle, donc w^ε y est localement bornée, donc η , fonction continue d'une partie bornée (donc localement compacte) de \mathbb{R}^N vers \mathbb{R} y est bornée :

$$(3.16) \quad \forall \varphi \in \mathcal{B}_0^2, \exists C > 0, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w^\varepsilon) \right| \leq C \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|,$$

ce qui montre qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée, ayant majoré la fonction à intégrer qui dépend de ε par une fonction fixe intégrable :

$$(3.17) \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w^\varepsilon) dt dx \rightarrow \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w) dt dx, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

et il en est de même pour les autres termes $\int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \xi(w^\varepsilon)$
et $\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \eta(w^\varepsilon)$.

- on remarque enfin que $\varepsilon \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \eta(w^\varepsilon)$ est composé de $\varepsilon \rightarrow 0$ et d'une intégrale qui converge, donc le produit tend vers zéro. d'inégalité (3.14) est alors conséquence directe de (3.15) et des passages à la limite du type (3.14). \square

- Il nous reste maintenant à écrire à quelle condition une discontinuité (w_0, w) séparée par une courbe de célérité σ est solution faible entropique de la loi de conservation (1.1). on doit d'une part disposer d'une solution faible, i.e. des relations de Rankine et Hugoniot (voir la relation (1.8)) et d'autre part écrire qu'elle est entropique, c'est à dire écrire l'inégalité (3.14) pour toute fonction régulière $\varphi \geq 0$ à support compact.

Proposition 7 Inégalité de Rankine et Hugoniot pour l'entropie. Soit $(x,t) \mapsto w(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ une fonction constante par morceaux discontinue à travers la courbe $x = X(t) = \sigma t + y$ (relation (1.6)). Alors w est solution faible entropique de (1.1) si et seulement si (1.8) a lieu ainsi que

$$(3.18) \quad \Xi(w_d) - \Xi(w_g) - \sigma(\eta(w_d) - \eta(w_g)) \leq 0$$

appelée inégalité de Rankine-Jugoniot pour l'entropie.

Preuve de la proposition (7)

- on déplie l'inégalité (3.14) en supposant comme pour la proposition 1, que le support de φ est traversé par la courbe Γ de pente σ . on a :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \eta(w) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Xi(w) \right) dt dx = - \int_{\Gamma_g \cup D_d} \varphi \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Xi}{\partial x} \right) \\ &\quad + \int_{\partial D_g} \varphi (n_t \eta + n_x \Xi(w)) d\sigma - \int_{\partial D_d} \varphi (n_t \eta(w) + n_x \Xi(w)) d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \varphi \left((\eta_g - \eta_d) n_t + (\Xi_g - \Xi_d) n_x \right) d\sigma \\ &= - \int_{\Gamma} \varphi n_x \left[\Xi_d - \Xi_g - \sigma (\eta_d - \eta_g) \right] d\sigma \end{aligned}$$

avec $n_x > 0$ (cf (1.4)) par convention des notations "gauche" et "droite". Comme $\varphi \geq 0$ est arbitraire, l'inégalité ci-dessus a lieu si et seulement si le crochet est négatif, ce qui exprime la relation (3.18). \square

- Pour une discontinuité (w_0, w) de pente σ , on introduit la dissipation d'entropie \mathcal{D} , définie par

$$(3.19) \quad \mathcal{D} \equiv \Xi(w) - \Xi(w_0) - \sigma(\eta(w) - \eta(w_0)) = [\Xi] - \sigma[\eta].$$

L'inégalité de Rankine-Hugoniot exprimée alors simplement que

16

$$(3.20) \quad \mathcal{D} \leq 0$$

4) Chocs entropiques

- on reprend l'étude d'une discontinuité admissible pour les équations de Saint Venant à l'endroit où nous l'avons laissée à la fin du paragraphe 3. Nous disposons entre l'état W_0 (à gauche, au moins pour le moment) et l'état W (à droite) des relations (2.5) à (2.7), qui s'expriment aussi sous la forme (2.8), (2.11) et (2.16).

Proposition 8 Expression de la dissipation d'entropie. Avec les conditions appelées plus haut, la dissipation d'entropie \mathcal{D} définie en (3.19) à l'aide de (3.6) et (3.7) s'évalue grâce à la relation

$$(4.1) \quad \mathcal{D} = \left[\left(\frac{1}{2} \rho (u-\sigma)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) (u-\sigma) \right]$$

Preuve de la proposition 8

- on commence par établir l'analogie pour l'entropie du raisonnement qui a été mené à la proposition 2 pour l'invariance de Galilée. On se place dans le repère du choc. On doit

donc, compte tenu de (3.6) et (3.7), avoir

$$(4.2) \quad \mathcal{D} = \left[\left(\frac{1}{2} \rho (u-\sigma)^2 + v^2 \right) + \frac{p}{\gamma-1} \right] (u-\sigma) + [p(u-\sigma)]$$

Calculons le membre de droite de (4.2) :

$$\begin{aligned} & \left[\rho (u - \left[\left(\frac{1}{2} \rho (u-\sigma)^2 + v^2 \right) + \frac{p}{\gamma-1} \right] (u-\sigma) \right) + [p(u-\sigma)] \\ &= \left[\left(\frac{1}{2} \rho (u^2 - 2u\sigma + \sigma^2 + v^2) + \frac{p}{\gamma-1} \right) (u-\sigma) \right] + [p u] - \sigma [p] \\ &= [\gamma(u-\sigma)] - \sigma [p u (u-\sigma)] + \frac{1}{2} \sigma^2 [p(u-\sigma)] \\ & \quad + [p u] - \sigma [p] \\ &= [\gamma u + p u] - \sigma [\gamma] - \sigma [p u^2 + p] + \sigma^2 [p u] \\ & \quad \text{compte tenu de (2.5)} \\ &= \mathcal{D} \quad \text{compte tenu de (2.6)} \end{aligned}$$

- Le seul écart entre (4.2) et (4.1) est dû au terme $[p v^2 (u-\sigma)]$ qui s'écrit aussi $[m v^2] = m [v^2] = m (v+v_0) [v]$ qui est nul compte tenu de (2.7). La proposition en résulte. \square

- On doit enfin faire un peu d'algèbre (d'origine bien sûr à Hugoniot, dans son article (à 25 ans) dans le Journal de l'École Polytechnique en 1889)

Proposition 3 Factorisation de la dissipation d'entropie.
Soit (W_0, W) une discontinuité admissible pour les relations de Rankine-Hugoniot. On pose

$$(4.3) \quad x \equiv \frac{p}{p_0} \in]0, +\infty[$$

et

$$(4.4) \quad \varphi(x) \equiv (\gamma-1)x^{\gamma+1} - (\gamma+1)x^\gamma + (\gamma+1)x - (\gamma-1).$$

alors

$$(4.5) \quad \mathcal{D} = - \frac{m p_0}{2(\gamma-1)\rho_0 x} \varphi(x).$$

De plus,

$$(4.6) \quad \text{si } m > 0, \quad \mathcal{D} \leq 0 \iff \frac{\rho}{\rho_0} > 1$$

$$(4.7) \quad \text{si } m < 0, \quad \mathcal{D} \leq 0 \iff \frac{\rho}{\rho_0} < 1.$$

Preuve de la proposition 9

- on part de l'expression (4.1), en utilisant sans ménagement la continuité du flux de masse m défini (2.8) et la conservation de l'impulsion sous la forme (2.11). On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left[\frac{1}{2} \rho (u-\sigma)^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p (u-\sigma) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \tau^2 m^3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \tau m \right] \\ &= m \left(\frac{m^2}{2} [\tau^2] + \frac{\gamma}{\gamma-1} [p\tau] \right) \\ &= m \left(\frac{1}{2} (\tau + \tau_0) m^2 [\tau] + \frac{\gamma}{\gamma-1} [p\tau] \right) \\ &= m \left(-\frac{1}{2} (\tau + \tau_0) (p - p_0) + \frac{\gamma}{\gamma-1} (p\tau - p_0\tau_0) \right) \\ &= - \frac{m p_0 \tau_0}{2(\gamma-1)} \left((\gamma-1) \left(\frac{1}{x} + 1 \right) (x^\gamma - 1) - 2\gamma (x^{\gamma-1} - 1) \right) \\ &= - \frac{m p_0}{2(\gamma-1)\rho_0} \frac{1}{x} \left\{ (\gamma-1)x^{\gamma+1} - (\gamma+1)x^\gamma + (\gamma+1)x - (\gamma-1) \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{m p_0}{2(\gamma-1)\rho_0 x} \varphi(x)$$

ce qui établit la relation (2.5).

- Il reste à étudier le signe de $\varphi(x)$ pour $x > 0$.
On a clairement $\varphi(1) = 0$,

$$\varphi'(x) = (\gamma-1)(\gamma+1)x^\gamma - \gamma(\gamma+1)x^{\gamma-1} + (\gamma+1) \text{ et}$$

$$(4.8) \quad \varphi(1) = 0, \quad \varphi'(1) = 0.$$

on doit donc dériver une nouvelle fois...

$$\varphi''(x) = \gamma(\gamma-1)(\gamma+1)x^{\gamma-2}(x-1), \text{ donc}$$

$$(4.9) \quad \varphi''(1) = 0, \quad \varphi''(x) \geq 0 \text{ si } x \geq 1.$$

On en déduit donc les variations suivantes :

x	0	1	$+\infty$
φ''	-	0	+
φ'	$\oplus \nearrow$	0	$\oplus \nearrow$
φ	$\nearrow \ominus$	0	$\nearrow \oplus$

qui montrent que

$$(4.10) \quad \varphi(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } x \geq 1.$$

Les inégalités (4.6) et (4.7) s'en déduisent immédiatement.



- Nous supposons dans ce paragraphe $m > 0$.
Nous savons que la densité ρ de l'état aval du choc est liée à la vitesse u via la relation (16), à considérer avec le signe -. La condition

d'entropie (4.6) indique que seule la branche $p \geq p_0$ est utilisable physiquement. On en déduit

$$(4.11) \quad m > 0 \Rightarrow u = u_0 - \sqrt{\frac{(p-p_0)(p_0-p)}{\rho\rho_0}}, \quad p > p_0$$

donc en particulier

$$(4.12) \quad m > 0 \Rightarrow p > p_0, \quad u < u_0, \quad p > p_0.$$

La courbe (dans le plan vitesse - pression) des états w en aval d'un choc d'état amont w_0 et de flux de masse $m > 0$ est représentée Figure 2.

- On peut aussi préciser la vitesse du choc σ en fonction de l'état amont w_0 ou de l'état aval w . De plus, les inégalités d'entropie (4.12) entraînent des inégalités entre divers éléments; ce sont les inégalités de Lax (1957).

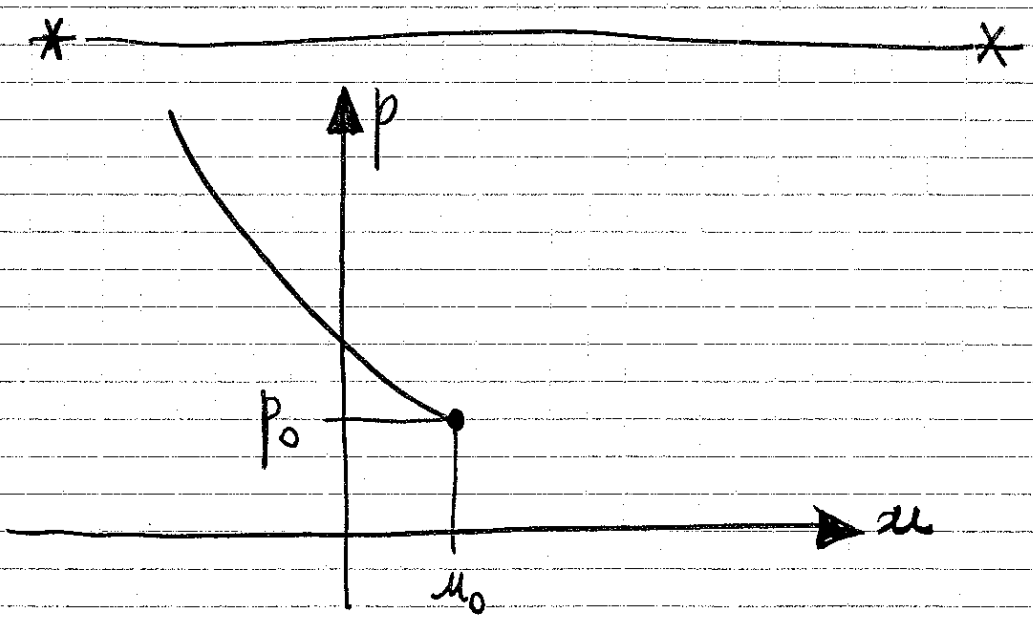


Figure 2. Ensemble des états en aval de w_0 , avec un flux de masse $m > 0$.

Proposition 10 choc entropique de flux de masse positif. Soit w_0 un état en amont d'un choc de flux de masse $m > 0$ et w l'état aval associé, on a alors la célérité σ_1 de la discontinuité donnée par

$$(4.13) \quad \sigma_1 = u_0 - \frac{m}{\rho_0} = u - \frac{m}{\rho}, \quad m = \sqrt{\rho \rho_0} \sqrt{\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0}}$$

et le système d'inégalités

$$(4.14) \quad u - c < \sigma_1 < u_0 - c_0.$$

- Les inégalités de lex (4.14) indiquent que les ondes acoustiques issues de l'état de gauche w_0 se déplacent plus vite que celles issues de l'état de droite w . Elles se focalisent

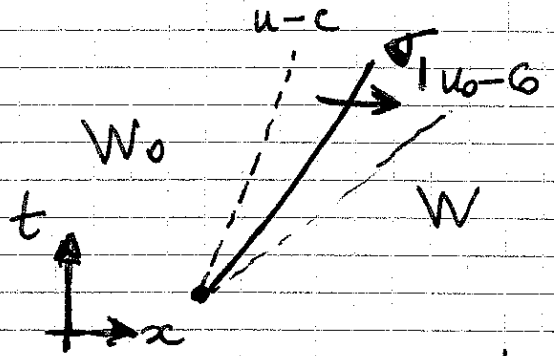


Figure 3. Choc de flux de masse > 0 dans l'espace-temps.

donc en un choc de célérité intermédiaire. Dans le cas contraire où $u_0 - c_0 \leq u - c$, on peut construire une onde de détente (voir la leçon précédente) et la condition d'entropie indique qu'effectivement, on n'a pas à construire d'onde de discontinuité dans ce cas. La figure 3 illustre notre propos.

Preuve de la proposition (10)

22

- La relation (4.13) est une conséquence immédiate de (2.8), (2.10) et (2.12). Par ailleurs, la condition d'entropie $p > p_0$ (ou $m > 0$) et la convexité de $p \mapsto p^{\sigma} \equiv p(e)$ à une constante près impliquent qu'on a

$$(4.15) \quad c_0^2 \leq \frac{p-p_0}{\rho-\rho_0} \leq c^2$$

puisque par définition, la célérité des ondes sonores c satisfait à $c^2 = \frac{dp}{d\rho}$. On déduit alors de (4.13) et (4.15);

$$(4.16) \quad c_0 \leq \sqrt{\frac{p}{\rho_0}} c_0 \leq \frac{m}{\rho} \leq \frac{m}{\rho_0} \leq \sqrt{\frac{p}{\rho_0}} c \leq c$$

et par suite

$$\sigma_1 = u_0 - \frac{m}{\rho_0} \leq u_0 - c_0, \quad \sigma_1 = u - \frac{m}{\rho} \geq u - c,$$

ce qui constitue exactement le jeu des inégalités (4.14) \square

- Nous terminons ce paragraphe par l'étude des chocs de flux de masse $m < 0$. Mais nous changeons de notation, nous nommons W l'état "amont" ou "à gauche" de la discontinuité σ , et W_0 l'état "en aval" "à droite" de cette discontinuité, ainsi qu'il illustre figure 4.

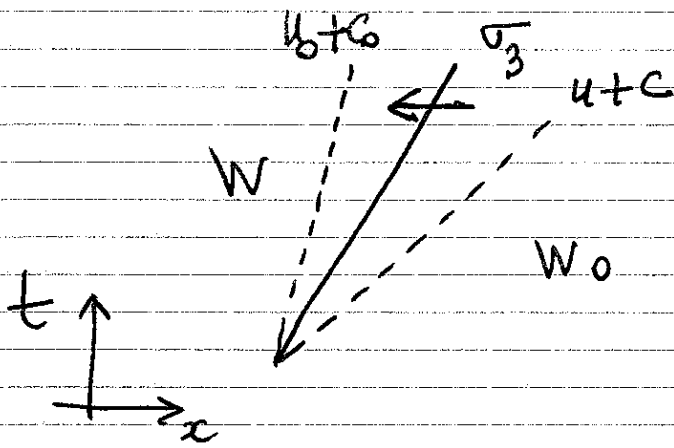
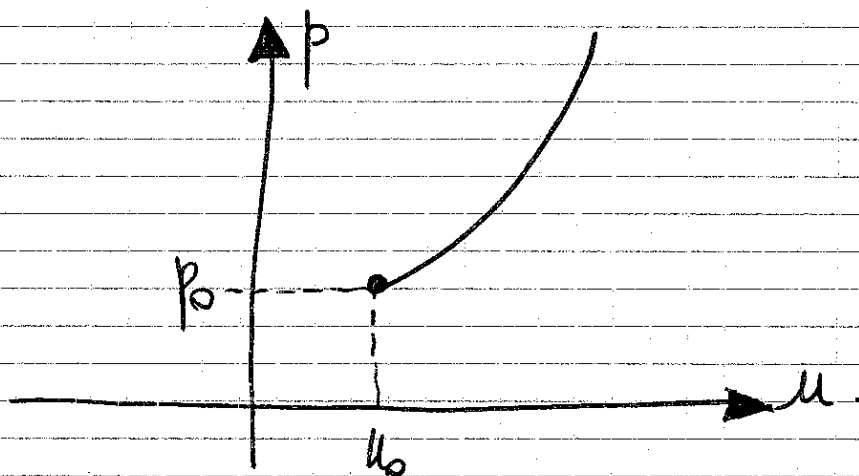


Figure 4 choc de flux de masse $m < 0$ dans l'espace et temps, aboutissant à un état $W_0 \in \Omega$.



Figures Ensemble des états W en amont de W_0 , pour un choc de flux de masse $m < 0$.

* ————— *

- La relation (2.16) doit être considéré avec le signe "+", en échangeant les rôles de u et u_0 , p et p_0 :

$$(4.17) \begin{cases} \text{choc } W \rightarrow W_0 \text{ de flux } m < 0 \Rightarrow \\ u = u_0 + \sqrt{\frac{(p-p_0)(p_0-p)}{\rho\rho_0}}, \quad p > p_0, u > u_0 \end{cases}$$

ainsi qu'illustré à la figure 5. On a en effet:

$$u_0 = u + \frac{1}{\sqrt{\rho\rho_0}} \sqrt{\frac{p-p_0}{\rho_0-\rho}} (\rho_0 - \rho) = u_0 - \frac{1}{\sqrt{\rho\rho_0}} \sqrt{(p-p_0)(\rho-\rho_0)} \text{ car } \rho > \rho_0$$

ou la condition d'entropie (4.7) qui s'écrit maintenant

$$\rho_0 < \rho$$

Proposition (11) Choc entropique de flux de masse négatif.
Soit W_0 un état en aval d'un choc de flux de masse $m < 0$, et W l'état amont associé.
La célérité σ_3 de la discontinuité est donnée par

$$(4.18) \quad \sigma_3 = u_0 + \frac{\tilde{m}}{\rho_0} = u + \frac{\tilde{m}}{\rho}, \quad \tilde{m} = \sqrt{\rho \rho_0} \sqrt{\frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0}}$$

et on a l'ensemble d'inégalités

$$(4.19) \quad u_0 + c_0 < \sigma_3 < u + c, \quad \rho > \rho_0, u > u_0$$

- Le flux de masse vaut simplement $m = -\tilde{m}$ et la preuve de cette proposition, analogue à celle de la proposition 10, est laissée au lecteur.

J, avril 05.