

CHAPITRE 9

Compléments

- 1) Formule d'intégration par parties
- 2) Algorithme du gradient conjugué
- 3) Etude du schéma de Newmark

IX - COMPLÉMENTS

i) Formule d'intégration par parties

Nous établissons la formule d'intégration par parties :

$$(1) \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_{\partial\Omega} uv n_j d\gamma$$

dans le cas où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^2 de frontière polygonale.

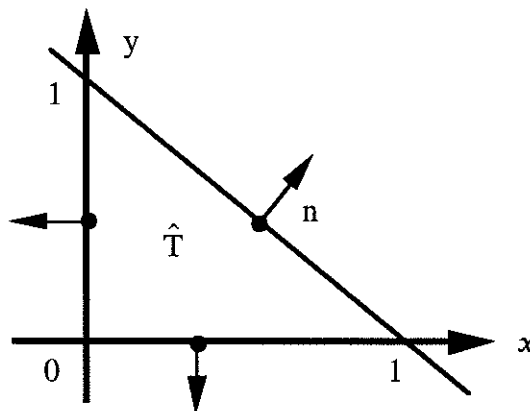
- Nous commençons par écrire la relation (1) sous la forme équivalente suivante :

$$(2) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} w n_j d\gamma.$$

- En effet, prenant $u \equiv 1$, $v \equiv w$ dans la relation (1), nous établissons (2) et réciproquement, si (2) est vrai nous posons $w = uv$, ce qui donne (1) par un simple calcul de la dérivée d'un produit de deux fonctions.

Un ouvert de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale est réunion de triangles donc nous commençons par le cas où Ω est le **triangle de référence** : \hat{T}

$$(3) \quad \hat{T} \{ (x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \}.$$



Triangle de référence

La normale extérieure sur le bord de \hat{T} est donnée par :

$$(4) \quad n = (0, -1) \quad \text{sur } [0,1] \times \{0\}$$

$$(5) \quad n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{sur } \{ (x,y), x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1 \}$$

$$(6) \quad n = (-1, 0) \quad \text{sur } \{0\} \times [0,1] .$$

Nous établissons la relation (2) pour $j = 1$, la propriété s'en déduisant pour $j = 2$ en échangeant les rôles de x et y . Nous montrons donc :

$$(7) \quad \iint_{\hat{T}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy = \int_{\partial \hat{T}} w n_x d\gamma$$

avec :

$$(8) \quad \int_{\partial \hat{T}} w n_x d\gamma = \int_0^1 w(1-t, t) \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} dt) - \int_0^1 w(0, t) dt .$$

Nous calculons l'intégrale double du membre de gauche de (7) par la formule de Fubini, en commençant par l'intégrale en y :

$$(9) \quad \iint_{\hat{T}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dx \frac{\partial w}{\partial x} (x,y)$$

$$(10) \quad \iint_{\hat{T}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy = \int_0^1 dy [w(1-y, y) - w(0,y)]$$

qui est, à la notation près, identique au second membre de (8), ce qui établit la propriété dans ce cas.

• Nous établissons la relation (2) dans le cas où Ω est un **triangle quelconque** $T = (A,B,C)$. Un tel triangle est image de \hat{T} par la transformation suivante :

$$(11) \quad M = (1 - \hat{x} - \hat{y}) A + \hat{x} B + \hat{y} C, \quad \hat{M} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{T}$$

dont la jacobienne $J = \frac{\partial M}{\partial \hat{M}}$ est une constante égale au double de la surface du triangle T :

$$(12) \quad J \equiv \frac{\partial M}{\partial \hat{M}} = 2 |T| .$$

Nous calculons une intégrale sur T par changement de variable en la ramenant sur \hat{T} :

$$(13) \quad \int_T u(M) dx = J \int_{\hat{T}} u(M(\hat{M})) d\hat{x}$$

donc :

$$(14) \quad \int_T \frac{\partial W}{\partial x_j} dx = J \int_{\hat{T}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial w}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j} d\hat{x}$$

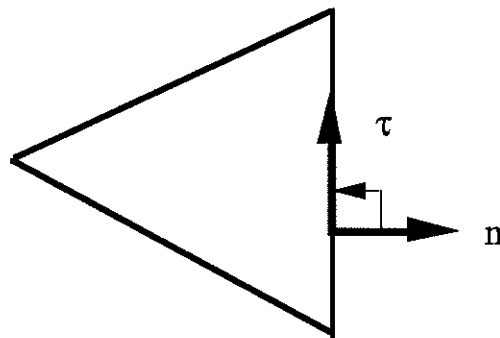
$$(15) \quad \int_T \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = J \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j} \int_{\partial \hat{T}} w \hat{n}_k d\hat{\gamma}$$

compte tenu du fait que la formule de Green est vraie dans le triangle \hat{T} . Nous devons maintenant transformer l'expression de \hat{n}_k et $d\hat{\gamma}$ afin de faire apparaître une intégrale sur le bord du triangle T. Les directions tangentielles de $\partial \hat{T}$ sont images de celles de ∂T dans la transformation $T \rightarrow \hat{T}$ inverse de (11). Nous avons donc :

$$(16) \quad \hat{\tau}_k = \alpha \sum_{m=1}^2 \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_m} \tau_m$$

à un coefficient de proportionnalité près qui assure que $\hat{\tau}$ et τ sont unitaires. Cette relation montre que l'élément de longueur $d\hat{\gamma} = \sqrt{d\hat{M}^2}$ peut s'écrire en fonction de $d\gamma = \sqrt{dM^2}$ le long de ∂T selon le changement de variables

$$(17) \quad d\hat{\gamma} = \left\{ \sum_{k, \ell, m} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_\ell} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_m} \tau_\ell \tau_m \right\}^{\frac{1}{2}} d\gamma$$



Vecteur tangent τ le long de ∂T et vecteur normal n vers l'extérieur

ou en échangeant les rôles de T et \hat{T} :

$$(18) \quad d\hat{\gamma} = \left\{ \sum_{k, \ell, m} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_\ell} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_m} \hat{\tau}_k \hat{\tau}_m \right\}^{-\frac{1}{2}} d\gamma$$

De plus, puisque le produit scalaire $\hat{n} \cdot \hat{\tau}$ est nul, nous avons :

$$(19) \quad \sum_{m=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_m} \hat{n}_k \right\} \tau_m = 0$$

ce qui montre que la $m^{\text{ième}}$ composante n_m du vecteur normal n est proportionnelle à l'expression entre parenthèses dans la relation (19), puisque $n \cdot \tau$ est nul :

$$(20) \quad n_m = \beta \sum_k \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_m} \hat{n}_k$$

avec

$$(21) \quad \beta^2 \left\{ \sum_m \left(\sum_k \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_m} \hat{n}_k \right)^2 \right\} = 1$$

puisque n est un vecteur unitaire. Nous supposons pour simplifier les calculs (et ne pas écrire de signe qui in fine arriveront en nombre pair !) que la transformation $\hat{M} \rightarrow M$ est **directe**, ie conserve l'orientation. Une direction extérieure à \hat{T} se transforme donc en une direction extérieure à T puisque $\hat{\tau}$ se transforme en τ et $(\hat{n}, \hat{\tau})$ d'une part, (n, τ) d'autre part, sont deux angles droits de $+\frac{\Pi}{2}$. Donc β est positif. Nous obtenons donc, en utilisant la relation (20) au sein du second membre de la relation (15) :

$$(22) \quad \int_T \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\hat{T}} J \frac{1}{\beta} n_j w \frac{d\gamma}{\left\{ \sum_{k, \ell, m} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_\ell} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_m} \hat{\tau}_k \hat{\tau}_m \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

compte tenu de la relation (18). La fin de la preuve résulte d'un calcul élémentaire sur l'inverse d'une matrice 2×2 . Nous notons provisoirement la jacobienne de la transformation (11) sous la forme :

$$(23) \quad \frac{\partial M}{\partial \hat{M}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

et détaillons le calcul de $\frac{1}{\beta^2}$ à l'aide de (21), en tenant compte du fait que :

$$(24) \quad \hat{n}_1 = -\hat{\tau}_2, \quad \hat{n}_2 = \hat{\tau}_1$$

et de la propriété classique :

$$(25) \quad \frac{\partial \hat{M}}{\partial M} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} &= \frac{1}{J^2} \left[(d(-\hat{\tau}_2) - c \hat{\tau}_1)^2 + ((-b)(-\hat{\tau}_2) + a \hat{\tau}_1)^2 \right] \\ &= \frac{1}{J^2} \left((a \hat{\tau}_1 + b \hat{\tau}_2)^2 + (c \hat{\tau}_1 + d \hat{\tau}_2)^2 \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(26) \quad \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{J^2} \sum_{k, \ell, m} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_\ell} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_m} \hat{\tau}_k \hat{\tau}_m$$

La relation (22) se simplifie alors en :

$$(27) \quad \int_T \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\partial T} w n_j d\gamma$$

ce qui prouve la propriété dans le cas où Ω est un triangle quelconque du plan.

- Nous abordons maintenant le cas général. L'ouvert Ω étant polygonal, on peut le recouvrir par un maillage de type éléments finis, formé de triangles T :

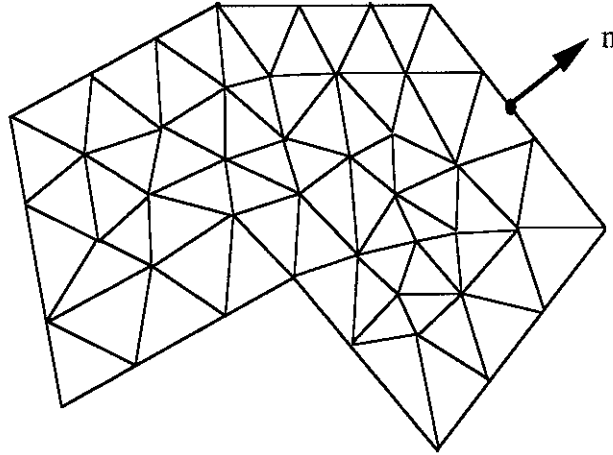
$$(28) \quad \overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau} \overline{T}$$

où l'intersection $\overline{T} \cap \overline{T'}$ de deux triangles de la triangulation τ est formée de l'ensemble vide, d'un sommet de T et T' , d'une arête commune à T et T' ou est égale à T et T' . On découpe alors l'intégrale (2) en autant d'intégrales sur les triangles du maillage.

$$(29) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \sum_{T \in \tau} \int_T \frac{\partial w}{\partial x_j} dx$$

pour lesquelles la relation (2) est applicable :

$$(30) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \sum_{T \in \tau} \int_{\partial T} w n_j d\gamma$$

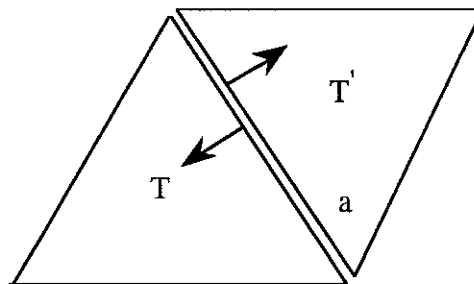


Triangulaire d'un ouvert Ω polygonal du plan

Le membre de droite de la relation (30) est une somme d'intégrales sur les arêtes a du maillage. Si l'arête a est intérieure au domaine, elle appartient au bord de deux triangles T et T' donc contribue par les deux intégrales suivantes :

$$(31) \quad \int_{a \cap \partial T} w n_j d\gamma + \int_{a \cap \partial T'} w n_j d\gamma = 0$$

dont la somme est nulle car les normales extérieures à T et T' sont opposées.



Arête a intérieure au domaine Ω

Si l'arête a est au bord du domaine, la normale extérieure à T coïncide avec la normale extérieure à $\partial\Omega$ et l'arête n'apparaît qu'une seule fois dans la somme (30) puisqu'elle n'appartient qu'à un seul triangle du maillage. Nous avons donc :

$$(32) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \sum_{\substack{a \in \mathcal{T} \\ a \subset \partial\Omega}} \int_a w n_j d\gamma$$

qui peut s'écrire plus simplement (puisque la réunion des arêtes du bord de Ω constitue le bord lui-même) :

$$(33) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} w n_j d\gamma,$$

ce qui montre la propriété.

ii) Algorithme du gradient conjugué

A désigne une matrice carrée d'ordre n symétrique définie positive et b un vecteur de \mathbb{R}^n .

1) Montrer que la résolution du système linéaire

$$(1) \quad A x = b$$

équivalent à rechercher le minimum, pour x appartenant à \mathbb{R}^n , de la fonctionnelle.

$$(2) \quad J(x) = \frac{1}{2} (x, Ax) - (b, x).$$

2) Description de l'algorithme du gradient conjugué

- Initialisation : $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $w^0 = g^0 = Ax^0 - b$.
- Itération de l'algorithme.

On suppose connus l'état x^{k-1} après la k ème itération ainsi que la direction de descente w^{k-1} . L'état suivant x^k de l'algorithme est issu de x^{k-1} via un incrément proportionnel à la direction de descente :

$$(3) \quad x^k = x^{k-1} + \rho^{k-1} w^{k-1}$$

de façon à minimiser la fonctionnelle J :

$$(4) \quad J(x^k) \leq J(x^{k-1} + \rho w^{k-1}) \quad \forall \rho \in \mathbb{R}.$$

On introduit également le gradient de J au point x^k .

$$(5) \quad g^k = Ax^k - b.$$

2.1) Calculer le coefficient ρ^{k-1} en fonction de g^{k-1} , w^{k-1} et A .

2.2) Montrer que l'on a :

$$(6) \quad (g^k, w^{k-1}) = 0.$$

La nouvelle direction de descente w^k est recherchée sous la forme :

$$(7) \quad w^k = g^k + \alpha^k w^{k-1}$$

de sorte que w^k soit orthogonal à la direction w^{k-1} pour le produit scalaire associé à la matrice A , c'est-à-dire :

$$(8) \quad (w^k, A w^{k-1}) = 0$$

2.3) Calculer la valeur de α^k en fonction de g^k, w^{k-1} et A .

On notera que le choix plus simple $\alpha^k = 0$ conduit à la méthode du gradient simple, où la direction de descente de l'algorithme w^k correspond à la ligne de plus grande pente g^k .

3) L'algorithme converge en au plus n étapes

3.1) Remarquer que si les gradients successifs g^0, g^1, \dots, g^{k-1} sont non nuls mais que g^k est nul, alors l'état x^k est la solution du système linéaire (1).

3.2) On suppose dans cette question que tous les gradients g^i sont non nuls jusqu'à l'étape m incluse. Montrer qu'on a alors les relations d'orthogonalité suivantes :

$$(9) \quad (g^k, w^j) = 0, \quad 0 \leq j < k \leq m$$

$$(10) \quad \rho^j \neq 0 \text{ et } w^j \neq 0, \quad 0 \leq j < k \leq m$$

$$(11) \quad (g^k, g^j) = 0, \quad 0 \leq j < k \leq m$$

$$(12) \quad (w^k, A w^j) = 0, \quad 0 \leq j < k \leq m$$

On pourra raisonner par récurrence sur k pour l'ensemble des quatre propriétés et démontrer les relations (9) à (12) dans l'ordre où elles apparaissent.

3.3) Montrer que l'algorithme converge en au plus n itérations.

4) Propriétés auxiliaires

4.1) Montrer que l'on a :

$$(13) \quad \alpha^k = \frac{\|g^k\|^2}{\|g^{k-1}\|^2}$$

En déduire que le calcul très précis des produits scalaires est crucial pour assurer le succès pratique (informatique) de la convergence de la méthode.

4.2) Montrer que l'état x^k réalise le minimum de la fonctionnelle J sur le sous-espace affine $x^0 + \langle w^0, \dots, w^{k-1} \rangle$. Quel commentaire pouvez-vous faire ?

Solution

1) La fonctionnelle a bien un minimum car la matrice A est symétrique définie positive. L'équation d'Euler au minimum s'écrit ici :

$$J'(x) \equiv Ax - b = 0,$$

ce qui montre la propriété.

$$2.1) \quad (14) \quad \rho^{k-1} = - \frac{(g^{k-1}, w^{k-1})}{(w^{k-1}, Aw^{k-1})}$$

2.2) La condition précédente a été obtenue en écrivant qu'au point x^k , la fonctionnelle J est minimale si on la restreint à la droite affine passant par x^{k-1} et dirigée par le vecteur w^{k-1} , ce qui s'exprime en annulant le gradient de J au point x^k dans la direction w^{k-1} , ce qu'exprime exactement la condition (6).

$$2.3) \quad (15) \quad \alpha^k = - \frac{(g^k, Aw^{k-1})}{(w^{k-1}, Aw^{k-1})}$$

3.1) Dès que l'un des gradients g^m est nul, on est en un point x^m qui est solution du système (1) et l'algorithme ne présente plus alors aucun intérêt puisque l'on a résolu le problème posé.

3.2) • La propriété est vraie pour $k = 1$.

On remarque que $w^0 = g^0$ est non nul en vertu de la question précédente. On a ensuite $(g^1, w^0) = 0$ compte tenu de la relation (6). Si on considère la relation (7) pour $k = 1$ et qu'on la multiplie scalairement par g^1 , on obtient $(g^1, w^1) = \|g^1\|^2$ ce qui montre que w^1 est non nul puisque g^1 est non nul et le numérateur comme le dénominateur de l'expression (14) qui permet de calculer ρ^0 sont non nuls, donc ρ^0 est non nul et la relation (10) est vraie à l'ordre $j = 0$. La relation (11) est une conséquence simple du choix de la direction de descente initiale : $(g^1, g^0) = (g^1, w^0) = 0$ compte tenu de la relation (9). Enfin, la relation (12) exprime simplement la relation (8) pour $k = 1$.

• On suppose les relations (9) à (12) vérifiées jusqu'à l'ordre k inclus et on les étend pour l'indice $k+1$, en supposant g^{k+1} non nul.

On remarque d'abord que la relation (3) entraîne clairement :

$$(16) \quad g^{k+1} = g^k + \rho^k A w^k.$$

On a d'une part $(g^{k+1}, w^k) = 0$ compte tenu de la relation (6) et pour $j < k$, on a d'autre part :

$$\begin{aligned} (g^{k+1}, w^j) &= (g^{k+1} - g^k, w^j) + (g^k, w^j) \\ &= \rho^k (A w^k, w^j) \end{aligned}$$

compte tenu de (16) et de l'hypothèse de récurrence (9). Or cette dernière expression est nulle en vertu de l'hypothèse de récurrence (12), donc la relation (9) est établie.

Si on multiplie scalairement l'identité (7) écrite au rang $k+1$ par g^{k+1} , la relation (9) que nous venons de démontrer entraîne que l'on a :

$$(17) \quad (g^{k+1}, w^{k+1}) = \|g^{k+1}\|^2$$

et la relation (10) est alors une conséquence simple de la relation qui permet de calculer ρ^k .

Exprimons g^j grâce à la relation (7) (considérée avec $k = j$). Il vient :

$$(g^{k+1}, g^j) = (g^{k+1}, w^j) - \alpha^j (g^{k+1}, w^{j-1})$$

et cette expression est nulle compte tenu de la relation (9) prise à l'ordre $k+1$. Ceci montre la relation (11).

La relation (12) est la conséquence de la relation (8) pour $j = k$ et du calcul suivant $j < k$:

$$\begin{aligned} (w^{k+1}, A w^j) &= (g^{k+1}, A w^j) \text{ compte tenu de (7) et de (12),} \\ &= (g^{k+1}, \frac{1}{\rho^j} (g^{j+1} - g^j)) \text{ en vertu de (16),} \\ &= 0 \text{ compte tenu de (11).} \end{aligned}$$

La propriété est donc démontrée par récurrence.

3.3) Compte tenu de la relation (11), la suite de gradients g^0, g^1, \dots, g^k est composée de vecteurs orthogonaux deux à deux jusqu'à un ordre m et ceci a lieu dans l'espace \mathbb{R}^n . La conclusion est alors claire.

4.1) Dans la relation (15), on exprime $A w^{k-1}$ au numérateur et au dénominateur à l'aide de la relation (16) et on utilise la relation (11) pour le numérateur. Il vient :

$$\alpha^k = \frac{\|g^k\|^2}{(g^{k-1}, w^{k-1})}$$

et la relation (13) est alors conséquence directe de la relation (17).

4.2) Si on écrit l'inéquation d'Euler qui caractérise le minimum de la fonction convexe dérivable J sur le convexe fermé $x^0 + \langle w^0, \dots, w^{k-1} \rangle$, atteint au point y , il vient $J'(y) \cdot w^j = 0$ pour tout $j = 1, 2, \dots, k-1$. Mais le choix $y = x^k$ vérifie ces relations puisque d'une part x^k appartient au convexe $x^0 + \langle w^0, \dots, w^{k-1} \rangle$ compte tenu de l'initialisation de l'algorithme et de la relation constitutive (3), et d'autre part $J'(x^k) \cdot w^j = (g^k, w^j)$ lequel est nul en vertu de la relation (9).

Cette propriété montre que le point x^k , conçu initialement à la relation (4) pour minimiser la fonctionnelle J le long de la droite affine passant par x^{k-1} et dirigée selon le vecteur w^{k-1} la minimise en fait sur tout un sous-espace de dimension k ! On touche là au génie de Hestenes et Stiefel qui ont inventé la méthode du gradient conjugué en 1952.

iii) Étude du schéma de Newmark

On se propose de définir une famille à deux paramètres pour approcher numériquement la solution du système différentiel.

$$(D) \quad M \frac{d^2 q}{dt^2} + C \frac{dq}{dt} + K q = p(t)$$

où $q(t)$ est un vecteur d'état appartenant à \mathbb{R}^m (modèle de structure à m degrés de liberté). On suppose connu à l'instant $t_n = n\Delta t$ le vecteur d'état $U = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}$ et on cherche à calculer ce même vecteur à l'instant $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$.

- 1) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour \dot{q}_{n+1} et q_{n+1} , en faisant apparaître la dérivée seconde $\ddot{q}(\theta)$ ($t_n < \theta < t_{n+1}$).
- 2) Quel schéma obtient-on si on suppose que dans la relation précédente, on remplace $\ddot{q}(\theta)$ par la moyenne, ie $\ddot{q}(\theta) \approx \frac{1}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1})$?
- 3) Même question, mais avec $\ddot{q}(\theta)$ remplacé par l'interpolé affine entre les valeurs \ddot{q}_n et \ddot{q}_{n+1} :

$$\ddot{q}(\theta) = \ddot{q}_n + \frac{1}{\Delta t} (\theta - t_n) (\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n).$$

Le schéma de Newmark consiste à écrire :

$$(N) \quad \begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \end{cases}$$

- 4) A quelles valeurs de (β, γ) correspondent les schémas calculés aux questions 2 et 3 ?

- 5) Montrer que si $\gamma \neq \frac{1}{2}$, le schéma est d'ordre 1 quelque soit β et pour $\gamma = \frac{1}{2}$, le schéma est d'ordre 2 si $\beta \neq \frac{1}{6}$ et d'ordre 3 si $\beta = \frac{1}{6}$.
- 6) Proposer un algorithme de résolution du schéma (N) qui prenne en compte la loi de la dynamique (D). (On pourra résoudre un système linéaire du type $S \ddot{q}_{n+1} = f$ avec $S = M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K$ et f un second membre qu'on précisera).
- 7) Pour étudier la stabilité du schéma, on se restreint dans la suite au cas où $M = 1$, $C = 0$, $K = \omega^2$, $p = 0$ dans le modèle (D). Montrer qu'alors le schéma de Newmark (N) s'écrit :

$$U_{n+1} = A U_n$$

où A est une matrice 2×2 qu'on précisera, on pourra introduire ξ tel que :

$$\xi^2 = \frac{\omega^2 \Delta t^2}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2}$$

- 8) Montrer, en étudiant le module des racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique relative à la matrice A que :

* le schéma est instable pour $\gamma < \frac{1}{2}$,

* le schéma est stable inconditionnellement pour $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2$,

* le schéma est stable sous la condition

$$(5) \quad \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 \Delta t^2}$$

$$\text{lorsque } \gamma \geq \frac{1}{2} \text{ et } \beta < \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2$$

On tracera dans le plan (γ, β) ces domaines de stabilité.

- 9) Quel schéma "optimum" proposez-vous de choisir ?

- 10) Montrer que l'erreur relative d'amplitude des ondes d'une part calculées par le schéma de Newmark et d'autre part exacte est donnée par le développement.

$$\rho - 1 = -\frac{1}{2} (\gamma - \frac{1}{2}) \omega^2 \Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

et que l'erreur de relative de périodicité, dans le cas $\gamma = \frac{1}{2}$, est donnée par :

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega \Delta t}{\phi} - 1 = \frac{1}{2} (\beta - \frac{1}{2}) \omega^2 \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

où $\lambda = \rho \exp(\pm i\phi)$ sont les racines (complexes) de l'équation caractéristique de la matrice A.

{plus difficile}.

Corrigé

1)
$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\theta) d\theta$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \theta) \ddot{q}(\theta) d\theta .$$

- 2) On remplace $\ddot{q}(\theta)$ par $\frac{1}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1})$ dans les relations précédentes. On obtient :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1})$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{4} \ddot{q}_n + \frac{1}{4} \ddot{q}_{n+1} \right)$$

- 3) Même méthode mais pour $\ddot{q}(\theta) = \ddot{q}_n + \frac{1}{\Delta t} (\theta - t_n) (\ddot{q}_{n+1} + \ddot{q}_n)$. On trouve :

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{q}_n + \ddot{q}_{n+1})$$

$$q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{3} \ddot{q}_n + \frac{1}{6} \ddot{q}_{n+1} \right)$$

4) Question 2 : $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$; question 3 : $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$.

5) On suppose que $q(t)$ vérifie l'équation différentielle (D), c'est-à-dire le système différentiel suivant pour $U(t)$:

$$\frac{dU}{dt} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ 1 & 0 \end{bmatrix} U + \begin{pmatrix} M^{-1} p(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

On commence donc par mettre le schéma (N) sous une forme analogue, en remplaçant la dérivée $\frac{dU}{dt}$ par le quotient des différences finies.

$$\frac{1}{\Delta t} (U_{n+1} - U_n) = \begin{pmatrix} (1-\gamma) \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_n + \Delta t \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{q}_n + \Delta t \beta \ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix}$$

Puis l'erreur de troncature est ici vectorielle :

$$\tau = \frac{1}{\Delta t} (U_{n+1} - U_n) - \begin{pmatrix} (1-\gamma) \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1} \\ \dot{q}_n + \Delta t \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{q}_n + \Delta t \beta \ddot{q}_{n+1} \end{pmatrix}$$

Compte tenu des formules de Taylor établies à la question 1, il suffit d'évaluer les restes dans les formules de quadrature.

$$(1) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\theta) d\theta \simeq (1-\gamma) \ddot{q}_n + \gamma \ddot{q}_{n+1}$$

$$(2) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \theta) \ddot{q}(\theta) d\theta \simeq \Delta t \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{q}_n + \beta \ddot{q}_{n+1} \right]$$

pour trouver l'ordre demandé.

* La formule (1) est a priori du premier ordre, sauf si $\gamma = \frac{1}{2}$ et elle est alors du 2^{ème} ordre (formule des trapèzes). L'ordre global du schéma est donc 1 si $\gamma \neq \frac{1}{2}$.

Si $\gamma = \frac{1}{2}$, la formule des trapèzes est d'ordre 2, et un surcroît de précision peut être donné par la formule de quadrature (2). Celle-ci est d'ordre deux si $\ddot{q}(\theta)$ est approchée par n'importe quelle constante compte tenu de l'infiniment petit $(t_{n+1} - \theta)$ à intégrer, et elle est d'ordre trois si $\ddot{q}(\theta)$ est approchée par l'interpolation affine proposée à la question 3, ie pour $\beta = \frac{1}{6}$ (cf question 4).

6) Algorithme

Dans les relations (N), les dérivées secondes sont calculées à l'aide de l'équation (D). Mais si $\beta \neq 0$, la présence de \ddot{q}_{n+1} au second membre de la seconde équation rend le schéma implicite. Il convient donc de calculer d'abord ce terme, en tenant compte du schéma (N) et de l'équation (D) écrite à l'instant t_{n+1} .

$$M \ddot{q}_{n+1} + C \dot{q}_{n+1} + K q_{n+1} = p_{n+1}$$

On introduit dans cette relation \dot{q}_{n+1} et q_{n+1} calculés par le schéma :

$$M \ddot{q}_{n+1} + C \left\{ \dot{q}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{q}_n + \gamma \Delta t \ddot{q}_{n+1} \right\} + K \left\{ q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \right\} = p_{n+1}$$

D'où le système à résoudre :

$$S \ddot{q}_{n+1} = f$$

$$\text{où } S = M + \gamma \Delta t C + K \beta \Delta t^2$$

$$f = p_{n+1} - C \left(\dot{q}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{q}_n \right) - K \left(q_n + \Delta t \dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{q}_n \right)$$

* Algorithme

- q_0, \dot{q}_0 connus.
Calculer \ddot{q}_0 par résolution du système (D).

• $q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n$ connus

$$(i) \quad \dot{q}^* = \dot{q}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{q}_n$$

$$q^* = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{q}_n \quad (\text{prédiction})$$

$$(ii) \quad S \ddot{q}_{n+1} = p_{n+1} - C \dot{q}^* - K q^* \quad (\text{résolution})$$

$$(iii) \quad \dot{q}_{n+1} = \dot{q}^* + \Delta t \gamma \ddot{q}_{n+1}$$

$$q_{n+1} = q^* + \Delta t^2 \beta \ddot{q}_{n+1} \quad (\text{incrémentation})$$

7) Dans le cas simplifié d'un seul oscillateur non amorti, l'algorithme précédent s'explique simplement :

$$\begin{cases} \dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + (1-\gamma) \Delta t (-\omega^2 q_n) + \gamma \Delta t (-\omega^2 q_{n+1}) \\ q_{n+1} = q_n + \Delta t \dot{q}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (-\omega^2 q_n) + \Delta t^2 \beta (-\omega^2 q_{n+1}) \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma \Delta t \omega^2 \\ 0 & 1 + \beta \Delta t^2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & -(1-\gamma) \Delta t \omega^2 \\ \Delta t & 1 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \end{pmatrix}_n$$

D'où le résultat, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \gamma \xi^2 & -\omega^2 \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2} \xi^2\right) \\ \frac{\xi^2}{\omega \Delta t} & 1 - \frac{1}{2} \xi^2 \end{pmatrix}$$

et
$$\xi^2 = \frac{\Delta t^2 \omega^2}{1 + \beta \omega^2 \Delta t^2}$$

8) On a $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \left(2 - \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \xi^2 \right) + 1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2$.

Les racines sont complexes si le discriminant réduit Δ' est négatif. Or :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \left(1 - \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \xi^2 \right)^2 - \left(1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2 \right) \\ &= \xi^2 \left(\frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 \xi^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

$\Delta' \leq 0$ équivaut à :

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 \omega^2 \Delta t^2 \leq 4 \left(1 + \beta \omega^2 \Delta t^2 \right)$$

c'est-à-dire :

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq \frac{4}{\omega^2 \Delta t^2} \quad (\text{S}).$$

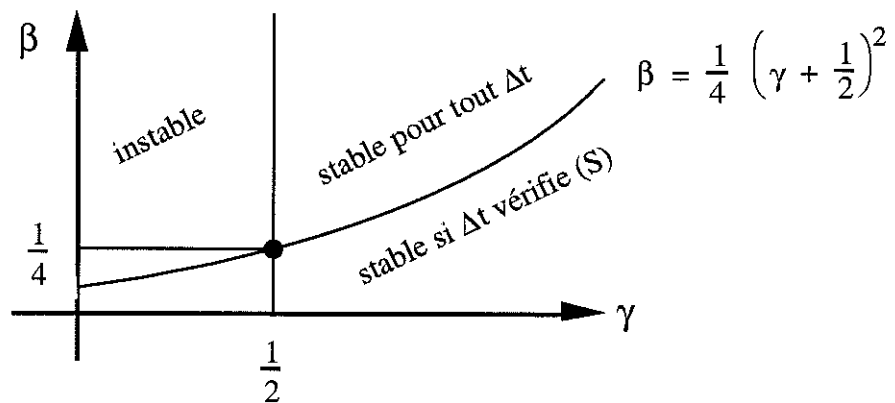
Cette condition limite le pas de temps, sauf si $\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta \leq 0$, auquel cas elle ne donne aucune condition. Par ailleurs, le produit des deux racines est égal au carré de leur module commun, c'est-à-dire $1 - \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2$. La condition $|\lambda|^2 \leq 1$ équivaut à $\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \xi^2 \geq 0$ ie $\gamma \geq \frac{1}{2}$.

Les deux racines sont réelles si $\Delta' \geq 0$. La condition :

$$\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 - 4\beta > \frac{4}{\omega^2 \Delta t^2}$$

donne une valeur minimale du pas de temps, ce qui indique que pour les valeurs toutes petites de Δt , le schéma est instable. Ce type de comportement est en général rejeté par les utilisateurs, et nous ne considérons pas ce cas dans la discussion qui suit.

- Si $\gamma \leq \frac{1}{2}$, le schéma est instable si $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 < 4\beta$, le schéma est stable lorsque le pas de temps Δt satisfait à la condition (S).



- 9) Le schéma optimal correspond à la limite de stabilité inconditionnelle, c'est-à-dire $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, qui donne un schéma d'ordre **deux**.
- 10) Dans le cas de deux valeurs propres complexes pour l'équation caractéristique, on a :

$$\lambda = \rho \exp(i\varphi)$$

$$\text{avec : } \rho^2 = 1 - (\gamma - \frac{1}{2}) \xi^2$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{\xi \sqrt{1 - \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{2})^2 \xi^2}}{1 - \frac{1}{2} (\gamma + \frac{1}{2}) \xi^2}$$

L'erreur relative de phase et d'amplitude s'obtient en comparant la solution exacte de l'équation $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ à la solution numérique calculée par le schéma, c'est-à-dire λ^n à une constante près. On doit donc comparer $\left(e^{i\omega \frac{\Delta t}{n}} \right)^n$ à λ^n , avec λ donné plus haut.

L'erreur d'amplitude s'obtient en comparant les modules, or :

$$\begin{aligned} \rho^{-1} &= \frac{1}{\rho+1} (\rho^2 - 1) = \frac{1}{2} \left(-(\gamma - \frac{1}{2}) \xi^2 \right) + o(\xi^2) \\ &= -\frac{1}{2} (\gamma - \frac{1}{2}) \Delta t^2 \omega^2 + o(\Delta t^4) \end{aligned}$$

ce qui montre que le choix $\gamma = \frac{1}{2}$ conduit à une erreur d'ordre 4 en Δt . Pour l'erreur de phase, on compare l'écart de périodes entre solution exacte et numérique, ramenée à la période exacte.

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega}{2\Pi} \left(\frac{2\Pi}{\frac{\varphi}{\Delta t}} - \frac{2\Pi}{\omega} \right)$$

ie $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\omega h}{\varphi} - 1$

or $\varphi = \text{Arctg}(\text{tg } \varphi)$

$$= (\text{tg } \varphi) - \frac{1}{3} (\text{tg } \varphi)^3 + 0 (\text{tg } \varphi^5)$$

$$= \xi \left(1 + \frac{1}{2} (\gamma + \frac{1}{2}) \xi^2 \right) \left(1 - \frac{1}{8} (\gamma + \frac{1}{2}) \xi^2 \right) - \frac{1}{3} \xi^2 + 0 (\xi^5)$$

$$= \xi \left(1 + \left[\frac{1}{2} (\gamma + \frac{1}{2}) - \frac{1}{8} (\gamma + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{3} \right] \xi^2 \right) + 0 (\xi^5)$$

$$= \omega \Delta t \left(1 - \frac{\beta}{2} \omega^2 \Delta t^2 \right) \left(1 + \frac{1}{24} \omega^2 \Delta t^2 \right) + 0 (\Delta t^4) \text{ si } \gamma = \frac{1}{2}$$

$$= \omega \Delta t \left(1 - \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{12} \right) \omega^2 \Delta t^2 \right) + 0 (\Delta t^4)$$

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\omega \Delta t} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{12} \right) \omega^2 \Delta t^2 \right) + 0 (\Delta t^3)$$

$$\frac{\omega \Delta t}{\varphi} = 1 + \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{1}{12} \right) \omega^2 \Delta t^2 + 0 (\Delta t^3)$$

ce qui montre le résultat proposé. ■

