

CHAPITRE 8

**Mise en œuvre informatique
de la méthode des éléments finis**

- 1) Introduction
- 2) Mise en œuvre d'un problème monodimensionnel
- 3) Mise en œuvre de l'élément triangulaire P_1 dans le plan \mathbb{R}^2
- 4) Condition de Dirichlet non homogène
- 5) Etude d'un exemple, dit "Hadhri"

VIII. MISE EN OEUVRE INFORMATIQUE DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

1) Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons comment les principes généraux de la méthode des éléments finis sont susceptibles d'un traitement algorithmique qui est ensuite programmable dans un langage évolué (Fortran, C) en vue d'un traitement automatique sur ordinateur. Dans le cas monodimensionnel, très élémentaire, nous introduisons les notions essentielles. Celles-ci sont ensuite utilisées sans modification pour le cas de deux dimensions d'espace, représentatif des problèmes que l'on rencontre dans les applications. Nous développons en détail la méthode d'élimination des noeuds bloqués qui permet de prendre en compte les conditions de Dirichlet non homogènes, et traitons en détail un cas bidimensionnel modèle mais prototype des vérifications à faire lors du développement de logiciels complexes.

2) Mise en oeuvre d'un problème monodimensionnel

Nous approchons, comme au paragraphe précédent, le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson sur l'ouvert $\Omega]0,1[$:

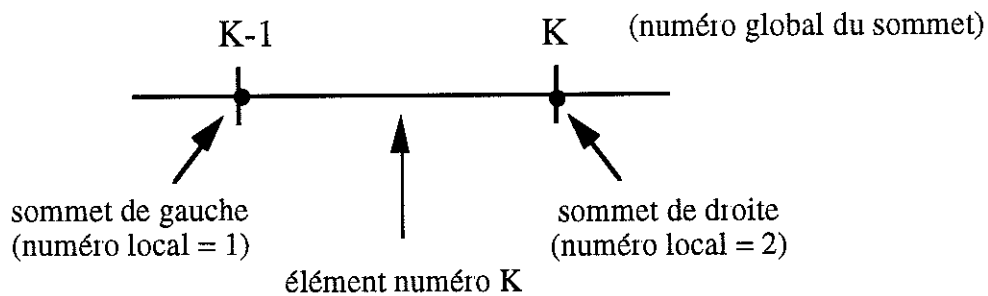
$$(1) \quad - \frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \text{sur }]0,1[$$

$$(2) \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Nous découpons Ω en $(N+1)$ intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ définis par les points x_j .

$$(3) \quad x_j = jh ; \quad h = \frac{1}{N+1}.$$

La grille $\{x_0, x_1, \dots, x_N, x_{N+1}\}$ s'appelle le **maillage** du domaine Ω ; les intervalles $]x_j, x_{j+1}[$ sont les **éléments** du maillage et les sommets x_j sont porteurs d'un **degré de liberté** (ou **noeud**). Nous avons, avec la relation (3), adopté une numérotation croissante avec l'abscisse, ce qui est un choix simple et naturel compte tenu du caractère monodimensionnel du problème (1) (2). Toutefois, nous allons dans ce qui suit faire abstraction de cette propriété pour laisser émerger les notions générales relatives à la mise en oeuvre.



Numérotations locale et globale

- Un élément "courant" K ($1 \leq K \leq N+1$) est un intervalle $]x_{K-1}, x_K[$ contenant deux noeuds aux extrémités : le noeud à la gauche de K et le noeud à la droite de K ; sans changer la numérotation (3), le noeud de gauche est x_{K-1} et le noeud de droite est x_K . Nous pouvons changer de vocabulaire de la façon suivante : un élément K est porteur de deux noeuds qu'on peut **numéroter localement**. Le noeud de numéro local égal à 1 est **par convention** celui de gauche et celui de numéro local égal à 2 est celui de droite. D'autre part, ces deux sommets ont un numéro relatif à l'ensemble du maillage. Avec le choix (3), on a clairement :

- * numéro du sommet de gauche = $K-1$
- * numéro du sommet de droite = K .

On appelle **numéro global** le numéro d'un noeud relativement à l'ensemble du maillage. Il convient donc de savoir effectuer la correspondance entre un sommet considéré comme appartenant à un élément K (repéré avec son numéro local relatif à l'élément) et ce même sommet associé à une fonction de base (globale) ; celle-ci s'effectue avec un tableau appelé traditionnellement NELT :

$$(4) \quad \hat{I}\hat{I} = \text{NELT}(K, \hat{I}).$$

La relation (4) signifie que le \hat{I} ème sommet de l'élément K (le sommet de numéro local \hat{I}) a pour numéro global $\hat{I}\hat{I}$. On a bien entendu $1 \leq \hat{I} \leq 2$ dans ce cas et pour suivre le choix (3) : $0 \leq \hat{I}\hat{I} \leq N+1$; $1 \leq K \leq N+1$.

Le tableau NELT est un tableau d'entiers paramétré par les entiers K et \hat{I} ; il rappelle les éléments liés à la **topologie** de chaque élément (le bord de K , qui porte les noeuds, est constitué de deux sommets).

- En complément du tableau NELT de topologie, il est nécessaire de connaître les coordonnées des sommets du maillage (cf relation (3)). On introduit le fichier de **géométrie** du maillage :

$$(5) \quad X = XX(\dot{I}\dot{I}),$$

qui, à tout numéro global de noeud $\dot{I}\dot{I}$, associe son abscisse X , grâce au tableau XX à valeurs réelles.

- Nous abordons maintenant le calcul de l'élément de matrice $A(\dot{I}\dot{I}, \dot{J}\dot{J})$. Compte tenu des choix faits au chapitre précédent, on a :

$$(6) \quad A(\dot{I}\dot{I}, \dot{J}\dot{J}) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{\dot{I}\dot{I}} \cdot \nabla \varphi_{\dot{J}\dot{J}} \, dx$$

où $\varphi_{\dot{I}\dot{I}}$ est la fonction de base (globale) relative au noeud $\dot{I}\dot{I}$, dont le support (l'ensemble des x où $\varphi_{\dot{I}\dot{I}}$ est non nulle) est constitué des deux éléments contenant le sommet $\dot{I}\dot{I}$ dans leur bord (on parle parfois pour cette raison du **cobord** du sommet $\dot{I}\dot{I}$). On calcule l'intégrale au membre de droite de (6) en la découpant sur les éléments du maillage :

$$(7) \quad A(\dot{I}\dot{I}, \dot{J}\dot{J}) = \sum_{k \in \tau} \int_K \nabla \varphi_{\dot{I}\dot{I}} \cdot \nabla \varphi_{\dot{J}\dot{J}} \, dx.$$

on a alors une remarque essentielle qui fonde la notion même de **matrice élémentaire** :

Proposition

L'intégrale $\int_K \nabla \varphi_{\dot{I}\dot{I}} \cdot \nabla \varphi_{\dot{J}\dot{J}} \, dx$ ne peut être non nulle que si les sommets $\dot{I}\dot{I}$ et $\dot{J}\dot{J}$ sont tous deux des sommets appartenant au bord de l'élément K .

Preuve

On montre que si l'un des sommets $\dot{I}\dot{I}$ ou $\dot{J}\dot{J}$ n'appartient pas au bord de K , alors l'intégrale :

$$(8) \quad AB(K, \dot{I}\dot{I}, \dot{J}\dot{J}) = \int_K \nabla \varphi_{\dot{I}\dot{I}} \cdot \nabla \varphi_{\dot{J}\dot{J}} \, dx$$

est nulle, ce qui montre la propriété. Si, pour fixer les idées, le noeud $\dot{I}\dot{I}$ n'appartient pas au bord de l'élément K , alors le support de $\varphi_{\dot{I}\dot{I}}$ est constitué par les deux éléments L et M contenant $\dot{I}\dot{I}$ comme sommet et aucun des deux n'est égal à K (sinon $\dot{I}\dot{I}$ appartiendrait au bord de K). Donc $\nabla \varphi_{\dot{I}\dot{I}}$ est non seulement sur les éléments L et M , donc $\nabla \varphi_{\dot{I}\dot{I}}$ est identiquement nul sur K , ce qui montre que $AB(K, \dot{I}\dot{I}, \dot{J}\dot{J})$ est nul. ■

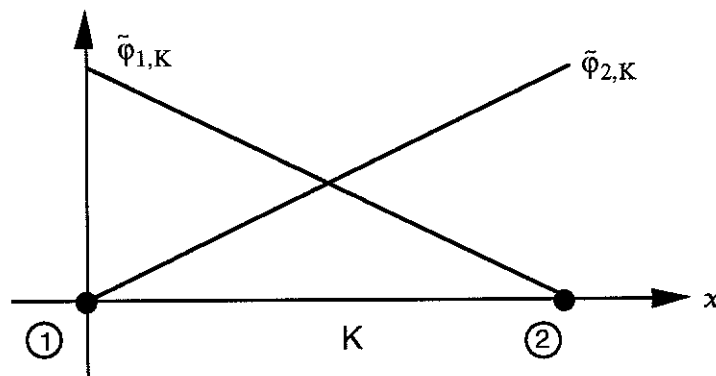
L'intégrale AB (K, \dot{I}, \dot{J}) n'étant non nulle que dans le cas où les sommets II et JJ sont eux-mêmes des sommets de l'élément K , on peut adopter une numérotation locale pour ces sommets. Nous introduisons d'abord la notion de **fonction de base locale**.

Pour I numéro local d'un noeud relativement à l'élément K , on appelle fonction de base locale et on note $\tilde{\varphi}_{I,K}$ la restriction à K de la fonction de base φ_{II} , où II est le numéro global du noeud II , c'est à dire $II = \text{NELT}(K, I)$

$$(9) \quad \tilde{\varphi}_{I,K} : K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(10) \quad \tilde{\varphi}_{I,K}(x) = \varphi_{\text{NELT}(K,I)}(x) \quad \forall x \in K.$$

Dans le cas de l'élément P1 à une dimension d'espace, les fonctions de base $\tilde{\varphi}_{1,K}$ et $\tilde{\varphi}_{2,K}$ ont un graphe très simple représenté ci-dessous :



Fonctions de base locales relatives à un élément K

- La notion de **matrice élémentaire** est alors naturelle : l'intégrale AB (K, \dot{I}, \dot{J}) est évaluée en utilisant les numéros locaux dans l'élément K , donc les fonctions de base locales puisque l'intégrale AB (K, \bullet, \bullet) est à prendre dans l'élément K .

Pour I, J numéros locaux dans l'élément K ($1 \leq I, J \leq 2$ dans le cas présent), on pose :

$$(11) \quad \text{AELT}(K, I, J) = \int_K \nabla \tilde{\varphi}_{I,K} \bullet \nabla \tilde{\varphi}_{J,K} \, dx$$

et on appelle matrice élémentaire relative à l'élément K la matrice obtenue en fixant K et en faisant varier les indices i et j du tableau $\text{AELT}(K, I, J)$. Compte tenu de la définition (9) (10) d'une fonction de base locale, on a bien évidemment :

$$(12) \quad \begin{cases} \text{AELT}(K, I, J) = \text{AB}(K, \text{II}, \text{JJ}) \\ \text{avec } \text{II} = \text{NELT}(K, I), \text{ JJ} = \text{NELT}(K, J). \end{cases}$$

Lorsque K est un segment de longueur h, un calcul élémentaire laissé au lecteur montre que, avec la numérotation locale choisie, on a :

$$(13) \quad \text{AELT}(K, \bullet, \bullet) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}$$

- Le calcul d'un élément de matrice A(II, JJ) (relation (6)), appelé parfois élément de la **matrice globale** pour la distinguer des matrices élémentaires, s'obtient par l'algorithme **d'assemblage**, qui constitue le point clef de la mise en oeuvre automatique de la méthode des éléments finis. La mauvaise méthode consiste à faire un double parcours (double boucle) sur tous les sommets du maillage :

$$(14) \quad \begin{cases} \text{boucle sur II} \\ \begin{cases} \text{boucle sur JJ} \\ \text{calcul de } A(\text{II}, \text{JJ}) \end{cases} \end{cases}$$

En effet, l'étape de calcul de A(II, JJ) s'effectue (si on a recours à un procédé automatisé) à l'aide des matrices élémentaires AELT(K, I, J), et on doit faire successivement les opérations suivantes :

- * parcourir les éléments K du maillage,
- * parcourir les numéros locaux I et J de K,
- * tester si l'on a II = NELT(K, I) et JJ = NELT(K, J).
- * Dans l'affirmative, incrémenter A(II, JJ) de la valeur AELT(K, I, J) :

$$(15) \quad A(\text{II}, \text{JJ}) \leftarrow A(\text{II}, \text{JJ}) + \text{AELT}(K, I, J).$$

On passe son temps à rechercher les deux numéros locaux I et J du couple de sommets II et JJ, dans le cas favorable où ceux-ci appartiennent au même élément K !

- L'idée de l'algorithme d'assemblage est de calculer **en même temps tous** les éléments de matrice $A(II, JJ)$, toujours à l'aide de la relation (15), mais en "éclatant" la matrice élémentaire $AELT(K, I, J)$ au sein de la matrice assemblée $A(\bullet, \bullet)$ au cours de l'étape de base.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 II\ 1 \\
 \vdots \\
 II\ 2 \\
 \vdots
 \end{array}
 \left(
 \begin{array}{ccc}
 \dots & II\ 1 & \dots & II\ 2 & \dots \\
 & AELT(K,1,1) & \dots & AELT(K,1,2) & \\
 & \vdots & & \vdots & \\
 & AELT(K,2,1) & \dots & AELT(K,2,2) & \\
 & & & &
 \end{array}
 \right)$$

"Éclatement" de la matrice élémentaire $AELT(K, \bullet, \bullet)$ au sein de la matrice assemblée $A(\bullet, \bullet)$.
 (On a $II1 = NELT(K, 1)$ et $II2 = NELT(K, 2)$).

L'algorithme d'assemblage prend alors la forme :

- * Initialiser $A(\bullet, \bullet)$ à zéro

$$(16) \quad \left[\begin{array}{l}
 \text{boucle sur les éléments } K \text{ du maillage} \\
 \left[\begin{array}{l}
 \text{boucle sur les degrés de libertés locaux } I \text{ et } J \\
 II = NELT(K, I), \quad JJ = NELT(K, J) \\
 \text{Incréméntation de } A(II, JJ) \text{ à l'aide de la relation (15)}.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.$$

- Pour le calcul du second membre du système linéaire à résoudre,

$$(17) \quad B(II) = \int_{\Omega} f(x) \varphi_{II}(x) dx,$$

on procède exactement de la même façon : on découpe l'intégrale (17) en autant d'intégrales sur chacun des éléments du maillage.

$$(18) \quad B(II) = \sum_{K \in \tau} \int_K f(x) \varphi_{II}(x) dx$$

et on remarque que chaque intégrale du membre de droite de (18) est non nulle seulement si II est un sommet de l'élément K , compte tenu de la forme particulière des fonctions de base $P1$, on introduit donc les **seconds membres élémentaires**.

$$(19) \quad \text{BELT}(\mathbf{K}, \mathbf{I}) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \tilde{\varphi}_{\mathbf{I}} d\mathbf{x}$$

qu'on évalue éventuellement avec une **formule de quadrature** approchée (voir le cours d'analyse numérique élémentaire). L'assemblage du second membre (17) est exactement analogue à l'algorithme (16) pour l'assemblage de la matrice :

* Initialiser $\mathbf{B}(\bullet)$ à zéro

$$(20) \quad \left[\begin{array}{l} \text{boucle sur les éléments du maillage} \\ \left[\begin{array}{l} \text{boucle sur les numéros } \mathbf{I} \text{ des degrés de liberté locaux} \\ \mathbf{II} = \text{NELT}(\mathbf{K}, \mathbf{I}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{II}) \leftarrow \mathbf{B}(\mathbf{II}) + \text{BELT}(\mathbf{K}, \mathbf{I}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

• Nous terminons ce paragraphe en reprenant l'ordre global des opérations à effectuer :

- Lecture du maillage (tableaux NELT et XX des relations (4) et (5)).
- Calcul des matrices élémentaires et du second membre élémentaire (relations (11) et (19)).
- Assemblage du second membre (algorithme (20) et de la matrice (algorithme (16))).
- Résolution du système linéaire (algorithme de Cholesky ou du gradient conjugué).

3) Mise en oeuvre de l'élément P1 dans \mathbb{R}^2

• Les méthodes introduites au paragraphe précédent s'étendent très naturellement au cas bidimensionnel. On sait que le domaine (polygonal) Ω est recouvert par une famille τ d'éléments triangulaires \mathbf{K} dont l'intersection deux à deux est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête commune, soit pleine. Les fonctions de base de l'espace V_h d'approximations sont les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, affines dans chaque triangle \mathbf{K} et nulles sur le bord $\partial\Omega$ puisque nous étudions le cas particulier du problème de Dirichlet homogène.

$$(21) \quad -\Delta u = f \quad \Omega$$

$$(22) \quad u = 0 \quad \partial\Omega$$

La dimension de V_h est égale au nombre de fonctions φ_{II} formant une base, c'est à dire le cardinal de τ_0 , ensemble des sommets du maillage n'appartenant pas au bord. Cette vision globale du maillage τ , développée au chapitre précédent est soulignée en appelant **fonctions de base globales** les fonctions φ_{II} , définies de $\bar{\Omega}$ à valeurs réelles. Rappelons enfin que la résolution numérique du problème (21) (22) par éléments finis P1 sur le maillage τ consiste à rechercher la valeur.

$$(23) \quad w_{II} = u(A_{II})$$

d'une fonction $u \in V_h$ sur le sommet A_{II} de numéro (global) II par résolution d'un système linéaire d'ordre N_h .

$$(24) \quad A W = B$$

où la matrice A a pour terme générique.

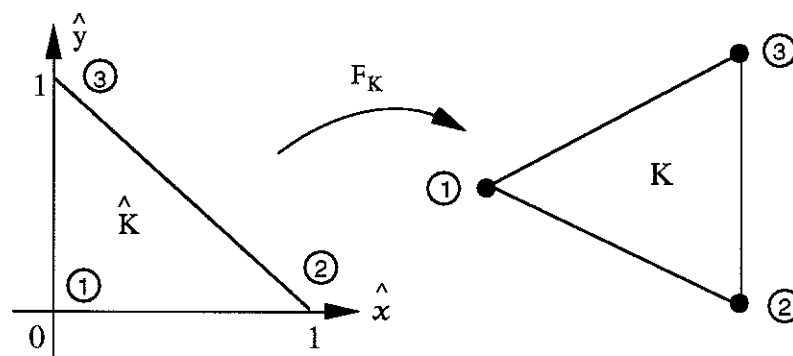
$$(25) \quad A(II, JJ) = \int_{\Omega} \nabla \varphi_{II} \cdot \nabla \varphi_{JJ} \, dx$$

et le second membre B a pour $II^{\text{ème}}$ coefficient :

$$(26) \quad B(II) = \int_{\Omega} f(x) \varphi_{II} \, dx.$$

- Un maillage triangulaire de \mathbb{R}^2 est une collection de triangles. En pratique, le "mailleur" (logiciel qui permet de générer le maillage, utilisé par l'ingénieur qui a à effectuer un calcul, ou conçu par cet ingénieur dans un cas simple) fournit deux fichiers informatiques : le tableau NELT des numéros globaux de sommets et le tableau XY des coordonnées des sommets.

Le tableau de topologie NELT associé à tout couple (K, I) formé d'un élément du maillage et d'un numéro I compris entre 1 et 3 (un triangle contient trois sommets) le numéro



global (c'est à dire du point de vue de l'ensemble \mathcal{T} du maillage) du sommet correspondant :

$$(27) \quad \Pi = \text{NELT}(\mathbf{K}, I) \quad 1 \leq I \leq 3.$$

La numérotation locale (27) permet de définir une transformation géométrique "usuelle" F entre le "triangle de référence" $\hat{\mathbf{K}}$

$$(28) \quad \hat{\mathbf{K}} = \{ (\hat{x}, \hat{y}), 0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1; \hat{x} + \hat{y} \leq 1 \}$$

et le triangle couvrant \mathbf{K} à l'aide des numéros locaux introduits à la relation (27). On pose :

$$(29) \quad \Pi 1 = \text{NELT}(\mathbf{K}, 1); \Pi 2 = \text{NELT}(\mathbf{K}, 2), \Pi 3 = \text{NELT}(\mathbf{K}, 3)$$

puis on introduit l'unique application affine $F_{\mathbf{K}}$ qui envoie $\hat{\mathbf{K}}$ sur le triangle \mathbf{K} de sorte que le sommet numéro I de $\hat{\mathbf{K}}$ s'envoie par $F_{\mathbf{K}}$ sur le sommet numéro I de \mathbf{K} . De façon précise (et ceci constitue en fait simplement une **convention** !), on a :

$$(30) \quad F_{\mathbf{K}}(0,0) = A_{\Pi 1}; F_{\mathbf{K}}(1,0) = A_{\Pi 2}; F_{\mathbf{K}}(0,1) = A_{\Pi 3}.$$

L'application $F(\bullet)$ s'explique facilement du point de vue algébrique ; on introduit les **coordonnées barycentriques** d'un point $\hat{\mathbf{M}} = (\hat{x}, \hat{y})$ de $\hat{\mathbf{K}}$ relativement aux sommets $\hat{\mathbf{A}}_1 = (0,0)$, $\hat{\mathbf{A}}_2 = (1,0)$, $\hat{\mathbf{A}}_3 = (0,1)$:

$$(31) \quad \hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) = (1 - \hat{x} - \hat{y})$$

$$(32) \quad \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}$$

$$(33) \quad \hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$$

on sait qu'on a alors dans l'élément de référence :

$$(34) \quad \hat{\mathbf{M}} = \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_j(\hat{\mathbf{M}}) \hat{\mathbf{A}}_j \quad \forall \hat{\mathbf{M}} \in \hat{\mathbf{K}}$$

$$(35) \quad \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_j(\hat{\mathbf{M}}) \equiv 1 \quad \forall \hat{\mathbf{M}} \in \hat{\mathbf{K}}$$

et le transport vers l'élément courant \mathbf{K} prend la forme suivante :

$$(36) \quad \mathbf{K} \ni \mathbf{M} = F_{\mathbf{K}}(\hat{\mathbf{M}}) = \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_j(\hat{\mathbf{M}}) A_{\Pi j}, \quad \hat{\mathbf{M}} \in \hat{\mathbf{K}}$$

qui exprime que dans une transformation affine, les barycentres se conservent.

- Nous introduisons alors le tableau XY des coordonnées des sommets du maillage :

$$(37) \quad X = XY (II, 1) \quad Y = XY (II, 2)$$

expriment que les coordonnées X,Y du sommet II ont pour adresses (II, 1) et (II, 2) dans le tableau XY. Notons que pour éviter de dupliquer l'information, on fait appel aux numéros globaux des sommets, mais on peut aussi introduire les coordonnées X(K,I) et Y(K,I) du noeud de numéro local I dans l'élément K, à travers la double dépendance suivante :

$$(38) \quad X(K,I) = XY (NELT (K,I), 1)$$

$$(39) \quad Y(K,I) = XY (NELT (K,I), 2).$$

L'explicitation, coordonnées par coordonnées, de la relation (36) prend alors la forme suivante : un point M = (X,Y) de K est paramétré par un point $\hat{M} = (\hat{x}, \hat{y})$ de \hat{K} , grâce aux coordonnées baricentriques (31) (32) (33) et aux relations :

$$(40) \quad X = \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_j (\hat{M}) X (K, j)$$

$$(41) \quad Y = \sum_{j=1}^3 \hat{\lambda}_j (\hat{M}) Y (K, j).$$

On le voit, tous les calculs avec des nombres réels se font "élément par élément" dans la méthode des éléments finis. C'est cette remarque qui motive la notion de **fonction de base locale** puis de **matrice élémentaire**.

- On se donne un élément K du maillage \mathcal{T} ainsi qu'un numéro local de sommet (ou de degré de liberté puisqu'on s'intéresse à l'élément P1 où les noeuds sont biunivoquement associés aux sommets du maillage) I. On appelle **fonction de base locale** et on note $\tilde{\varphi}_{I,K}$ la restriction à l'élément K de la fonction de base globale φ_{II} , où II = NELT (K,I) et le numéro global du degré de liberté associé. Les relations de définition (9) et (10) sont inchangées ; nous ne les réécrivons pas.

L'expression algébrique de $\tilde{\varphi}_{I,K}$, (fonction de base locale) est très simple ; nous avons la :

Proposition

La fonction de base locale $\tilde{\varphi}_{j,K}$, est identiquement égale à la j° coordonnée barycentrique λ_j relativement à l'élément K :

$$(42) \quad \tilde{\varphi}_{j,K}(M) = \lambda_j(M) \quad \forall M \in K.$$

Démonstration

Un point $M \in K$ admet un unique triplet de coordonnées barycentriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui par définition sont les poids qu'il faut donner aux sommets A_1, A_2, A_3 pour que le barycentre pondéré soit exactement égal à M . Par définition, la somme de ces poids vaut 1. Nous avons donc :

$$(43) \quad \sum_{j=1}^3 X(K,j) \lambda_j(M) = X$$

$$(44) \quad \sum_{j=1}^3 Y(K,j) \lambda_j(M) = Y$$

$$(45) \quad \sum_{j=1}^3 \lambda_j(M) = 1$$

La fonction $M \mapsto \lambda_j(M)$ est clairement fonction linéaire du triplet $(X,Y,1)$, c'est-à-dire fonction affine de (X,Y) . De plus, prenant dans le second membre la valeur particulière $X = X(K,i)$, $Y = Y(K,i)$ (coordonnées au sommet A_i), il est évident qu'alors λ_j (j° coordonnée barycentrique) vaut 1 pour $j = i$ et 0 si $j \neq i$ (le **vérifier** sur les relations (43)-(45) si vous n'êtes pas convaincus !):

$$(46) \quad \lambda_j(A_i) = \delta_{ij}$$

La fonction λ_j est donc affine, vaut 1 pour le sommet de numéro local j et 0 pour les deux autres sommets ; elle est donc identiquement égale à la restriction dans l'élément K , de la fonction de base associée à ce sommet. C'est exactement ce qu'exprime la relation (42) ! ■

L'expression algébrique de $\tilde{\varphi}_{j,K}$ s'obtient alors facilement en fonction de X,Y , par résolution du système (43) (45) de trois équations à trois inconnues. Nous explicitons ce calcul élémentaire, en adoptant une notation simplifiée le temps du calcul algébrique :

$$(47) \quad x_j \equiv X(K,j), \quad x \equiv X, \quad y \equiv Y.$$

On a :

$$(48) \quad x_1 \lambda_1 + x_2 \lambda_2 + x_3 \lambda_3 = x$$

$$(49) \quad y_1 \lambda_1 + y_2 \lambda_2 + y_3 \lambda_3 = y$$

$$(50) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

on retranche x_3 de (48), en l'écrivant $x_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ et on procède de façon analogue pour y_3 avec la relation (49). Il vient :

$$(51) \quad (x_1 - x_3) \lambda_1 + (x_2 - x_3) \lambda_2 = x - x_3$$

$$(52) \quad (y_1 - y_3) \lambda_1 + (y_2 - y_3) \lambda_2 = y - y_3$$

et, en remarquant que :

$$(53) \quad \begin{cases} (y_2 - y_3) (x_1 - x_3) - (x_2 - x_3) (y_1 - y_3) = \\ = (y_2 - y_1) (x_1 - x_3) - (x_2 - x_1) (y_1 - y_3) \\ = (x_2 - x_1) (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) (x_3 - x_1) \end{cases}$$

on trouve l'expression suivante pour λ_1 :

$$(54) \quad \lambda_1(x, y) = \frac{(y_2 - y_3) (x - x_3) - (x_2 - x_3) (y - y_3)}{(x_2 - x_1) (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) (x_3 - x_1)}$$

Les autres coordonnées barycentriques se déduisent de (54) par permutation circulaire des indices 1, 2, 3. On remarque que le dénominateur est le double de la surface du triangle K, puisque égal au produit mixte suivant :

$$(55) \quad S_K = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3}, k \right)$$

ceci dans l'hypothèse où l'**orientation des sommets A_1, A_2, A_3 est "directe"**, ce qui revient à dire que le déterminant de F_K est positif. Cette remarque constitue en fait une **règle de numérotation locale**. Il n'y a donc pas, même avec cette convention, une seule numérotation locale possible ; toute permutation paire de 1,2,3 permet de retrouver une nouvelle numérotation locale cohérente des noeuds de l'élément K.

- La notion de matrice élémentaire est fondée, comme dans le cas monodimensionnel, sur la propriété suivante :

Proposition :

L'intégrale $\int_K \nabla \varphi_{II} \cdot \nabla \varphi_{JJ} dx$ ne peut être non nulle que si les sommets II et JJ sont tous deux des sommets appartenant au bord de l'élément K.

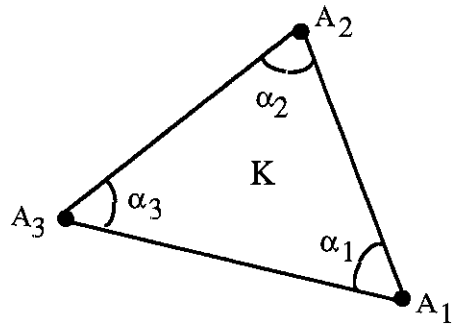
La preuve donnée pour le cas monodimensionnel est inchangée. La définition des matrices élémentaires AELT (K,I,J) est encore obtenue par la relation (11), mais I et J varient cette fois entre 1 et 3. Le calcul de cette matrice élémentaire est un exercice laissé au lecteur (compte tenu de l'explicitation de la relation (54) donnant les fonctions de base $\tilde{\varphi}_{j,K}$). Nous pouvons de plus en donner un résultat sous forme géométrique.

Proposition :

Avec les notations introduites à la figure ci-contre, on a :

$$(56) \quad \int_K \nabla \tilde{\varphi}_{1,K} \cdot \nabla \tilde{\varphi}_{2,K} dx = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha_3}$$

$$(57) \quad \int_K |\nabla \tilde{\varphi}_{1,K}|^2 dx = \frac{\sin \alpha_1}{2 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}$$



Proposition

Les matrices élémentaires sont assemblées pour former la matrice globale A(II,JJ). L'algorithme (16) qui consiste à "éclater" la matrice élémentaire AELT (K,•,•) au sein de la matrice assemblée est inchangé. De même, on peut définir un second membre élémentaire BELT (K,I) à l'aide de la relation (19). L'assemblage du second membre s'obtient encore à l'aide de la relation (20).

4) Condition de Dirichlet non homogène

• Nous avons jusqu'ici supposé que la condition de Dirichlet à prendre en compte est homogène : pour les relations (2) et (22), la donnée de $u(\bullet)$ sur le bord de Ω est la fonction nulle. Nous supposons dans ce paragraphe que ce n'est plus le cas, c'est-à-dire que u est donnée non nulle sur une partie Γ_1 du bord.

$$(58) \quad u = \bar{u}_0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

Sur la partie Γ_2 complémentaire de Γ_1 , nous adoptons une condition de Neumann.

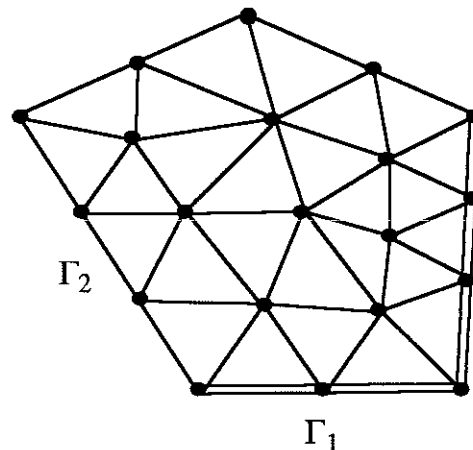
$$(59) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{sur } \Gamma_2$$

et nous continuons à résoudre un problème de Poisson dans le domaine d'étude.

$$(60) \quad -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega .$$

Les degrés de liberté du problème discrétisé sont les sommets A_j du maillage \mathcal{T} . On numérote en premier les sommets qui n'appartiennent pas à Γ_1 .

$$(61) \quad \text{sommets n'appartenant pas à } \Gamma_1 : A_1, A_2, \dots, A_N$$



Choix d'une numérotation pour les noeuds ; on numérote en dernier les sommets de Γ_1

puis ensuite ceux qui appartiennent à Γ_1 .

$$(62) \quad \text{sommets de } \mathcal{T} \text{ sur } \Gamma_1 : A_{N+1}, \dots, A_{N+M} .$$

On dispose de ce fait de deux espaces de dimension finie V_h et W_h : les fonctions de ces deux espaces sont continues sur $\bar{\Omega}$, affines dans chaque triangle K ; les fonctions de V_h sont

supposées nulles sur la partie Γ_1 du bord, alors que nous ne faisons pas cette hypothèse pour les fonctions de W_h . Avec les notations usuelles pour les fonctions de base, nous avons donc :

$$(63) \quad V_h = \text{Vect} \langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle$$

$$(64) \quad W_h = \text{Vect} \langle \varphi_1, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}, \dots, \varphi_{N+M} \rangle$$

et bien entendu, les dimensions de ces deux espaces s'en déduisent :

$$(65) \quad \dim V_h = N, \quad \dim W_h = N+M.$$

- Ces préliminaires étant posés, nous allons développer deux approches pour la prise en compte de la condition de Dirichlet non homogène (58) : l'une théorique qui consiste à se ramener au cas où \bar{u}_0 est nulle grâce à un relèvement de cette condition non homogène, l'autre pratique où l'on "**élimine les noeuds bloqués**" qui est mise en oeuvre au sein des algorithmes de calcul.'

Le **relèvement** dans l'espace W_h de la condition de Dirichlet non homogène \bar{u}_0 consiste à chercher une fonction \tilde{u}_0 telle que

$$(66) \quad \tilde{u}_0 \in W_h$$

$$(67) \quad \tilde{u}_0(A_k) = \bar{u}_0(A_k) \quad \forall k = N+1, \dots, N+M :$$

la fonction \tilde{u}_0 est définie par ses valeurs aux sommets du maillage, est donnée égale à \bar{u}_0 pour les sommets de Γ_1 (de numéros $N+1$ à $N+M$) et n'est pas déterminée a priori pour les autres sommets. Nous pouvons par exemple choisir :

$$(68) \quad \tilde{u}_0(A_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

mais tout autre choix est possible aussi. Nous faisons le choix (68) car il simplifie un peu les calculs. La fonction \tilde{u}_0 peut donc se calculer sans difficulté compte tenu des conditions (66) (67) (68) et la condition de Dirichlet (58) peut se réécrire de façon équivalente :

$$(69) \quad u = \tilde{u}_0 + z, \quad z \in V_h$$

ce qui ne fait qu'exprimer que u s'obtient à partir de \tilde{u}_0 grâce à une fonction z nulle sur Γ_1 . La formulation variationnelle s'obtient en multipliant la relation (60) par une fonction test v appartenant à V_h et en intégrant par parties, ce qui permet de prendre en compte la condition de Neumann (59). Il vient :

$$(70) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, d\gamma, \quad \forall v \in V_h.$$

En prenant en compte la relation (69), on obtient une formulation variationnelle discrète pour la fonction z .

$$(71) \quad z \in V_h$$

$$(72) \quad \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_2} g v \, d\gamma - \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_0 \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall v \in V_h$$

Le système linéaire décrit par (71) (72) prend la forme classique.

$$(73) \quad A_1 Z = F + G - B \tilde{u}_0$$

avec des notations naturelles rappelées ci-dessous :

$$(74) \quad (A_1)_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq N$$

$$(75) \quad F_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx$$

$$(76) \quad G_i = \int_{\Gamma_2} g \phi_i \, d\gamma$$

$$(77) \quad B_{ik} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_k \, dx, \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N \\ N+1 \leq k \leq N+M. \end{cases}$$

- Tout est bien établi du point de vue théorique ; du point de vue pratique, le calcul explicite de la fonction \tilde{u}_0 n'est jamais réalisé. On adopte une autre démarche, fondée sur l'écriture de la relation (70) non pas pour $v \in V_h$, mais pour $w \in W_h$. L'écriture des termes de bord est un peu différente et nous avons en toute rigueur

$$(78) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\Gamma_2} g w \, d\gamma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} w \, d\gamma, \quad \forall w \in W_h$$

expression qui est identique à (70) si nous particularisons le choix (70). La matrice de ce système (78), qui suppose $u \in W_h$ mais oublie (pour un moment) la relation (69), est donnée par :

$$(79) \quad A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \quad 1 \leq i, j \leq N+M$$

et l'on notera que la seule différence entre (79) et (74) est la borne supérieure de variation du double indice (i, j). De façon plus précise, la matrice A se décompose en blocs sous la forme :

$$(80) \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ {}^t B_1 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Quand on explicite la relation (78), en recherchant l'inconnue u sous la forme :

$$(81) \quad u = z + \sum_{k=N+1}^{N+M} \lambda_k \varphi_k$$

(sans savoir pour l'instant que $\lambda_k = \bar{u}_0(A_k)$!), on obtient un système qui s'écrit par blocs :

$$(82) \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ {}^t B_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F+G \\ * \end{pmatrix}.$$

On reconnaît la relation (70) pour les N premières lignes de (82) alors qu'on n'a pas explicité le second membre des M dernières.

- **L'élimination des noeuds bloqués** consiste à transformer le système (82) en écrivant brutalement la relation (69) à la place de la seconde ligne, c'est-à-dire ici

$$(83) \quad \Lambda = \bar{u}_0,$$

en éliminant d'une part les matrices blocs ${}^t B_1$ et A_2 et en les remplaçant par 0 et la matrice Id respectivement, en modifiant le second membre pour "forcer" la relation (83) d'autre part. Il vient :

$$(84) \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F+G \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix}$$

qui a l'inconvénient de faire apparaître une matrice non symétrique. Ce défaut peut être corrigé en éliminant Λ de la première équation et nous déduisons :

$$(85) \quad \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F + G - B_1 \bar{u}_0 \\ \bar{u}_0 \end{pmatrix}$$

qui est parfaitement équivalent à la relation (73).

L'intérêt de cette dernière approche est qu'elle est généralisable facilement au cas où l'on n'a pas adopté de numérotation particulière pour les degrés de liberté sur Γ_1 (cf. relations (61) et (62)). On assemble la matrice A et le second membre F+G grâce aux algorithmes (16) et (20). Puis on élimine les noeuds bloqués, opération qui consiste à passer de (82) à (85). En pratique, on a donc l'algorithme suivant :

```

┌
│   boucle sur les noeuds : 1 ≤ i ≤ N+M
│   i est-il un noeud sur Γ1 ?
│   non → passer à i+1
│   oui
│
│   ┌
│   │   boucle sur les noeuds : 1 ≤ j ≤ N+M
│   │   j est-il un noeud sur Γ1 ?
│   │   non :
│   │       Bj ← Bj - Aji  $\bar{u}_0$  (Ai)
│   │       Aji ← 0
│   │   └
│   │   oui → passer à j+1
│   │
│   ┌
│   │   boucle sur les noeuds : 1 ≤ j ≤ N+M
│   │   j = i ?
│   │   non :
│   │       Aij ← 0
│   │   oui :
│   │       Aij ← 1
│   └
└

```

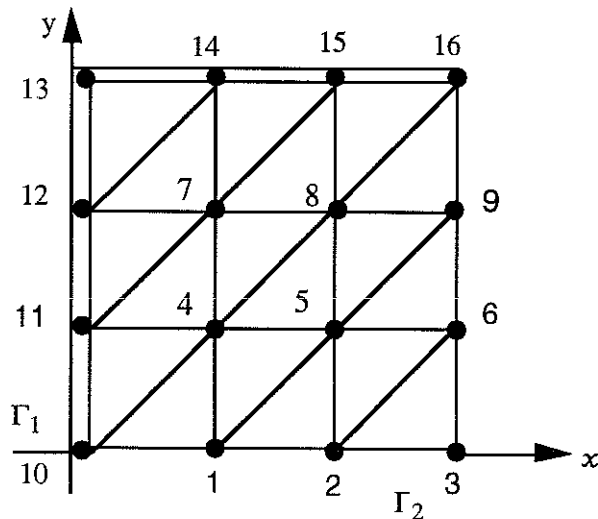
Notons enfin que l'adressage matriciel est rarement à double indice comme écrit à l'algorithme (86), ce qui en pratique en rend la lecture plus délicate

5) Étude d'un exemple, dit "Hadhri"

On considère le domaine $\Omega =]0,3[\times]0,3[$, sa frontière $\partial\Omega$ est décomposée en $\Gamma_1 = \{0\} \times]0,3[\cup]0,3[\times \{3\}$, et $\Gamma_2 =]0,3[\times \{0\} \cup \{3\} \times]0,3[$ (voir figure ci-dessous). On veut résoudre le problème.

$$(87) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \Gamma_2 \end{cases}$$

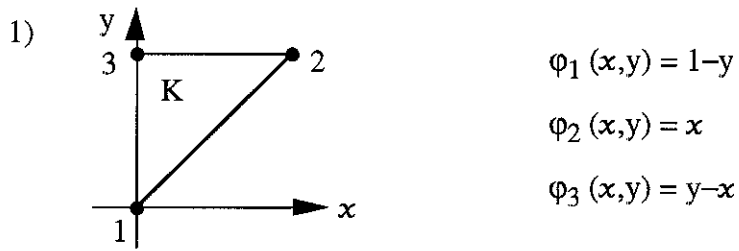
de façon approchée, à l'aide de la méthode des éléments finis, avec le maillage (de 18 éléments triangulaires) proposé à la figure ci-dessous. Les sommets de numéros 1 à 9 engendrent l'espace V_h alors que les sommets 10 à 16 sont situés sur Γ_1 .



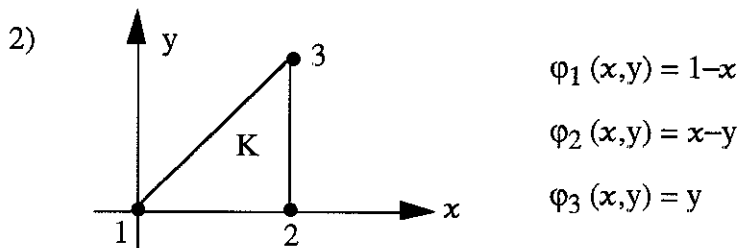
maillage en triangles de :

$$\Omega =]0,3[\times]0,3[$$

- Compte tenu de la simplicité du maillage, le calcul des matrices élémentaires se réduit aux deux cas de figure suivants :



matrice élémentaire $AELT = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$



matrice élémentaire $AELT = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Il est utile aussi de calculer la matrice élémentaire de masse, ie :

$$(88) \quad MELT(K, I, J) = \int_K \tilde{\varphi}_{I,K} \tilde{\varphi}_{J,K} dx$$

Dans les deux cas précédents, on obtient :

$$(89) \quad MELT = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si on interpole les fonctions f et g dans l'espace W_h (avec les notations précédentes), on doit calculer les seconds membres :

$$(90) \quad (\text{MF})_i = \sum_{j=1}^{16} \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx \right) f_j, \quad 1 \leq i \leq 9$$

et

$$(91) \quad (\Gamma G)_i = \sum_{j=1}^{16} \left(\int_{\Gamma_2} \varphi_i \varphi_j \, d\gamma \right) g_j, \quad 1 \leq i \leq 9.$$

Le calcul (89) de la matrice élémentaire et la relation (90) conduisent à une matrice de masse M d'ordre 9×16 (9 lignes et 16 colonnes) dont nous donnons ci-dessous les éléments non nuls.

$$(92) \quad M = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 12 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 24 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 24 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La relation (91) est non triviale pour $i = 1, 2, 3, 6, 9$ (ce sont les numéros des sommets sur le bord Γ_2) et nous avons finalement :

$$(93) \quad \begin{cases} (\Gamma G)_1 = \frac{2}{3} g_1 + \frac{1}{6} g_2 + \frac{1}{6} g_{10} \\ (\Gamma G)_2 = \frac{1}{6} g_1 + \frac{2}{3} g_2 + \frac{1}{6} g_3 \\ (\Gamma G)_3 = \frac{1}{6} g_2 + \frac{2}{3} g_3 + \frac{1}{6} g_6 \\ (\Gamma G)_6 = \frac{1}{6} g_3 + \frac{2}{3} g_6 + \frac{1}{6} g_9 \\ (\Gamma G)_9 = \frac{1}{6} g_6 + \frac{2}{3} g_9 + \frac{1}{6} g_{16} \end{cases}$$

puisque nous avons :

$$(94) \quad \int_{\text{côté}} \varphi_1^2 \, d\gamma = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \int_{\text{côté}} \varphi_1 \varphi_2 \, d\gamma = \frac{1}{6}.$$

- Le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$(95) \quad AU = MF + \Gamma G$$

avec A obtenu également par assemblage des matrices élémentaires de rigidité, ce qui conduit à :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous laissons au lecteur le soin d'explicitier la matrice B_1 (cf. relation (73)) pour transformer le système (95) lorsqu'une condition de Dirichlet non homogène est à prendre en compte sur Γ_1 .