CHAPITRE 6

Introduction à l'écriture variationnelle des problèmes elliptiques

François Dubois, 1995-96, édition juin 2009, 14 pages.

VI. INTRODUCTION À L'ÉCRITURE VARIATIONNELLE DES PROBLÈMES ELLIPTIQUES

1) Motivation

La méthode des éléments finis est une technique numérique de discrétisation qui est très naturelle si le problème mathématique posé peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation ou sous une forme variationnelle. La difficulté essentielle pour comprendre les fondements de la méthode des éléments finis consiste à savoir écrire les équations aux dérivées partielles de type elliptique (équation de Poisson, élasticité, problème de Stokes) sous forme fonctionnelle où les opérateurs différentiels sont cachés derrière les fonctions tests. C'est cette difficulté que nous abordons et détaillons dans ce chapitre.

2) Problème de Dirichlet homogène pour l'équation de Poisson

• Nous reprenons le problème aux limites posé au chapitre 5. Étant donné un domaine borné Ω dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on cherche $u(x)$, solution du problème de Poisson :

(1) $\quad -\Delta u = f \qquad \Omega$

avec condition limite homogène :

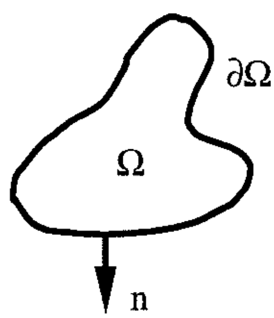
(2) $\quad u = 0 \qquad \partial\Omega$

où $\partial\Omega$ désigne le bord du domaine Ω. On appelle dans la suite "formulation EDP" (pour Équation aux Dérivées Partielles) le problème (1) (2).

Avant de poursuivre et d'introduire la "formulation variationnelle" FV du problème (1) (2), nous avons besoin d'un outil de calcul, la formule de Green d'intégration par parties.

Proposition

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n(x)$ est la normale extérieure au domaine Ω, x décrivant le bord $\partial\Omega$ de Ω, u et v sont des fonctions $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ prolongeables continuement sur l'adhérence $\overline{\Omega}$ (donc le bord $\partial\Omega$), dont la dérivée (le gradient) est une fonction (de carré) intégrable. On a la relation d'intégration par parties suivante :



(3) $$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\, dx + \int_{\partial\Omega} uv\, n_j\, d\gamma.$$

- La preuve de cette proposition est donnée en annexe dans un cas particulier.

- Si $\Omega =]a,b[$, la relation (3) prend la forme élémentaire suivante :

$$\int_a^b u \, \frac{dv}{dx} \, dx = -\int_a^b \frac{du}{dx} \, v \, dx + [uv]_a^b$$

qui est conséquence du fait que la normale extérieure en a (respectivement en b) est égale à -1 (respectivement $+1$).

On peut également dériver toute une série de formules plus ou moins savantes de la relation (3) qui est, seule, fondamentale à retenir. Nous en donnons une, utile dans ce chapitre.

(4) $$\int_\Omega (\Delta u) \, v \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, v \, d\gamma$$

où :

(5) $$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$

(6) ∇u est le vecteur de j° composante $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$

(7) $$\nabla u . \nabla v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u . n = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot n_j \qquad \text{(sur } \partial\Omega \text{ seulement).}$$

- **Formulation variationnelle**

L'écriture variationnelle d'un problème aux limites elliptiques prend toujours une forme du type :

(9) $u \in V$

(10) $a(u,v) = L(v) \qquad \forall \, v \in V$

Nous notons que la formulation variationnelle est composée **à la fois** de (9) et de (10). Écrire un problème EDP sous forme variationnelle FV, c'est suivre le **programme de travail** suivant :

(i) * Trouver l'espace V où l'on cherche la solution.

(ii) * Trouver une forme **bilinéaire** a (u,v)

(11) $V \times V \ni (u,v) \rightarrow a(u,v) \in \mathbb{R}$

(12) $$\begin{cases} a\left(\lambda u_1 + \mu u_2, v\right) = \lambda\, a\left(u_1, v\right) + \mu\, a\left(u_2, v\right) \\ a\left(u, \lambda v_1 + \mu v_2\right) = \lambda\, a\left(u, v_1\right) + \mu\, a\left(u, v_2\right). \end{cases}$$

(iii) * Trouver une forme linéaire L(v) :

(13) $V \ni v \rightarrow L(v) \in \mathbb{R}$

(14) $L(\lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, L(v) + \mu\, L(w).$

On notera aussi que c'est le **même** espace V qui figure aux relations (9) **et** (10) ; V est un **espace vectoriel** :

(15) $u, v \in V \Rightarrow \lambda u + \mu V \in V \qquad \forall (\lambda, \mu).$

Pour écrire le problème (1) (2) sous forme variationnelle, on choisit d'introduire la condition de Dirichlet homogène u **dans** l'espace V, c'est-à-dire de poser :

(16) $V = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R},\ u = 0 \ \text{ sur le bord } \partial\Omega \right\},$

la condition (9), jointe au choix (16), exprimant alors exactement la condition de Dirichlet (2). On trouve alors la forme bilinéaire a(•, •) et la forme linéaire L(•) à l'aide de manipulations algébriques fondées sur la formule de Green, et plus précisément dans le cas qui nous intéresse ici, la formule (4). On multiplie l'équation (1) par une fonction test v et on intègre sur le domaine d'étude Ω. Nous avons :

(17) $$\int_\Omega \left(-\Delta u\right) v\, dx = \int_\Omega f v\, dx \qquad \forall v \in V$$

Nous venons ainsi de trouver **une** formulation variationnelle pour le problème EDP, mais poser $a(u,v) = -\int_\Omega (\Delta u)\, v\, dx$ n'est pas mathématiquement satisfaisant. On cherche (pour des raisons théoriques qui assurent ensuite facilement que le problème a une solution unique) une forme bilinéaire **elliptique**, c'est-à-dire telle que il existe $\alpha > 0$ de sorte que :

(18) $a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \qquad \forall v \in V.$

En pratique, le nombre a (v,v) doit être **clairement** positif (cela doit sauter aux yeux : on intègre une fonction positive par exemple), ce qui n'est pas le cas si on reste à la relation (17). Nous transformons l'intégrale du membre de gauche de (17) à l'aide de la relation (4) :

$$(19) \qquad \int_{\Omega} (-\Delta u)\, v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, v \, d\gamma.$$

Le terme de bord dans le membre de droite de la relation (19) est toujours nul dès que v appartient à l'espace V proposé à la relation (16) [souvenez-vous que c'est le **même** espace V aux relations (9) et (10)]. On peut donc réécrire la relation (17) sous la forme :

$$(20) \qquad \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \qquad \forall\, v \in V$$

et cette fois, on a clairement :

$$(21) \qquad \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq 0$$

ce qui ne montre pas que la relation (18) est satisfaite (on n'a même pas défini de norme sur l'espace V, et la relation (16) ne définit même pas V de façon mathématiquement précise !) mais indique qu'elle peut l'être.

- La formulation FV du problème de Poisson (1) (2) est donc donnée par les deux relations (9) **et** (10), le choix de l'espace de fonctions proposé à la relation (16), la forme bilinéaire a :

$$(22) \qquad a\,(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx$$

et la forme linéaire L :

$$(23) \qquad L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Nous venons donc de démontrer la :

Proposition

Si u est solution du problème EDP (1) (2), il est aussi solution du problème sous forme variationnelle FV (9) (10) (16) (22) (23).

Nous avons aussi la proposition réciproque, qui montre que la formulation variationnelle et l'écriture sous forme d'équations aux dérivées partielles sont **équivalentes**.

Proposition

Si u est solution de la formulation variationnelle FV [(9) (10) (16) (22) (23)], alors u est solution de l'équation aux dérivées partielles (1) associée à la condition à la limite (2).

Preuve

Le choix (16) pour espace des fonctions tests V montre que la solution du problème variationnel FV est une fonction nulle sur le bord du domaine Ω, donc que la condition limite (2) de Dirichlet homogène est automatiquement satisfaite. La fonction u solution de FV vérifie (20). On intègre par parties le terme bilinéaire $\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx$ à l'aide de la relation (19), en tenant compte du fait que l'intégrale de bord est nulle puisque la fonction test v est nulle sur le bord $\partial\Omega$. Il vient alors :

$$(24) \qquad \int_\Omega \left(-\Delta u - f\right) v \, dx = 0 \qquad \forall\, v \in V.$$

Cette relation est vraie pour toute fonction v, donc le coefficient $-\Delta u - f$ est nécessairement nul.

- **Formulation énergie**

Au lieu d'adopter une écriture variationnelle (9) (10), on peut aussi chercher $u \in V$ comme **fonction minimisant une énergie**. On pose :

$$(25) \qquad J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$

pour $v \in V$. La formulation énergie revient à chercher u appartenant à V (relation (9)) tel que :

$$(26) \qquad J(u) \leq J(v) \qquad \forall\, v \in V$$

ce qu'on exprime aussi en disant que u est solution du problème d'optimisation

$$(27) \qquad \inf_{v \in V} \; J(v)$$

Nous avons la :

Proposition

Une fonction u est solution de la formulation variationnelle FV [(9) (10) (16) (22) (23)] si et seulement si u est solution de la formulation énergie ENE (9) (26).

Preuve

- On développe J (u + θv) où θ est un paramètre réel destiné à tendre vers zéro et v une fonction test appartenant à V ; on suppose que u est solution du problème ENE. On a :

(28) $$|\nabla (u + \theta v)|^2 = |\nabla u|^2 + 2\theta\, \nabla u.\nabla v + \theta^2 \,|\nabla v|^2$$

et par intégration sur le domaine Ω, il vient :

(29) $$J (u + \theta v) = J(u) + \frac{\theta^2}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \,dx + \theta \,\{a (u,v) - L(v)\} .$$

On écrit maintenant l'hypothèse sous la forme suivante :

(30) $$J(u) \leq J (u + \theta v) .$$

En tenant compte de la relation (29) il vient :

(31) $$[a (u,v) - L(v)]\, \theta + \frac{1}{2} \left[\int_\Omega |\nabla v|^2 \,dx\right] \theta^2 \geq 0$$

et cette relation est vraie quel que soit θ appartenant à $\mathbb{R}$. Le polynôme du second degré au membre de gauche de la relation (31) est nul en zéro et reste toujours positif, donc sa dérivée en zéro est nulle, ce qui exprime très exactement la relation (10). L'implication ENE PV est donc établie.

- Réciproquement, si u est solution de la formulation variationnelle, on a :

(32) $$J(v) - J(u) = \{a (u, v-u) - L (v-u)\} + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla (v-u)|^2 \,dx$$

Le terme entre accolades est nul car u est solution du problème FV (la fonction test s'appelle v−u au lieu de v à la relation (10)) et le terme complémentaire est l'intégrale d'un carré, donc est positif. La relation (26) est donc satisfaite, ce qui achève la démonstration.

3) Problème de Dirichlet non homogène pour l'équation de Poisson

Si on remplace la condition limite homogène (2) par une condition de Dirichlet **non homogène**.

(33) $$u = u_0 \qquad \text{sur } \partial\Omega,$$

la mise sous forme variationnelle n'est pas immédiate. On suppose d'abord que u_0 est la restriction au bord $\partial\Omega$ d'une fonction (encore notée u_0) définie sur le domaine Ω tout entier, ainsi que sur le bord $\partial\Omega$:

(34) $\qquad u_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \qquad$ donnée.

Bien entendu, seules les valeurs de u_0 sur le bord (que nous noterons parfois γu_0) sont utiles pour établir la condition limite (33), mais disposer de (34) permet d'écrire la relation (33) sous la forme :

(35) $\qquad u = u_0 + w \qquad w \in V$

avec V défini à la relation (16) : si u vaut u_0 au bord, la différence $(u-u_0)$ est une fonction nulle au bord du domaine Ω. L'écriture (35) permet de réintroduire l'espace **vectoriel** V, alors que l'écriture (35) montre que u appartient naturellement à l'espace **affine** passant par u_0 et dirigé par l'espace vectoriel V.

Pour établir la formulation variationnelle, on change de fonction inconnue, remplaçant u par w introduite à la relation (35). On a donc :

(36) $\qquad -\Delta w = f + \Delta u_0 \quad \Omega$

(37) $\qquad w \in V.$

Nous avons donc un problème de Dirichlet **homogène** pour la fonction inconnue w, et sommes de ce fait dans les conditons du paragraphe précédent. Une formulation variationnelle s'écrit donc sous la forme (9) (10), avec a $(\bullet, \bullet)$ toujours donné par la relation (23) mais L(v) prenant maintenant la forme :

(38) $\qquad L_0(v) = \int_\Omega fv\, dx + \int_\Omega \Delta u_0\, v\, dx.$

Une intégration par parties du type (19) et la prise en compte du fait que la fonction test v est nulle sur le bord permet une autre écriture de la forme linéaire $L(\bullet)$:

(39) $\qquad L_0(v) = \int_\Omega fv\, dx + \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v\, dx, \qquad v \in V.$

Nous avons donc établi la :

Proposition

Le problème de Dirichlet non homogène (1) (33) s'écrit sous forme variationnelle (37) jointe à la relation :

(40) $a(w,v) = L_0(v) \quad \forall\, v \in V$

où $a(\bullet, \bullet)$ est donné par (33) et $L(\bullet)$ par (39). La solution u s'obtient à partir de la solution variationnelle w à l'aide du changement de fonction inconnue (35).

Bien entendu, cette formulation est équivalente à la formulation EDP initiale. Nous laissons la preuve détaillée en exercice au lecteur.

- Il peut être utile aussi d'utiliser une formulation "énergie". Pour cela, on introduit explicitement l'espace affine V_0 :

(41) $V_0 = \{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ v = \gamma u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega \}$

et on utilise toujours la fonctionnelle (25). Nous posons la recherche d'un minimum d'énergie sous la forme :

(42) $u \in V_0$

(43) $J(u) \leq J(z) \qquad \forall_z \in V_0.$

Noter que l'espace de travail est maintenant l'espace affine V_0 qui prend explicitement en compte la condition limite non homogène, et non plus l'espace vectoriel V. Nous avons la :

Proposition

La formulation énergétique ENE (42) (43) du problème de Dirichlet non homogène est équivalente à la formulation variationnelle (37) (40).

Preuve

- Nous établissons d'abord que $u = u_0 + w$ est minimum d'énergie sur V_0, dès que w est solution de (37) (40). Nous écrivons $z \in V_0$ sous la forme générale :

(44) $z = u_0 + v, \qquad v \in V$

et nous avons alors :

(45) $z = u + (v-w).$

Nous prenons $\theta = 1$ dans la relation (29) et remplaçons v par (v−w). Nous obtenons :

(46) $$J(z) = J(u) + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla (v-w)|^2 \, dx + \left[a(u, v-w) - L(v-w) \right].$$

Nous remarquons que l'écriture (40) est équivalente à :

(47) $$a(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V$$

avec L(•) toujours donné à la relation (23) ; donc en changeant v en w dans la fonction test pour la relation (47), le terme entre crochets au membre de droite de l'égalité (46) est nul, ce qui prouve facilement que :

(48) $$J(z) \geq J(u) \qquad \forall_z \in V_0$$

et on établit l'écriture énergétique.

• Réciproquement, si u est minimum d'énergie sur V_0, nous écrivons $z \in V_0$ sous la forme :

(49) $$z = u + \theta v \qquad v \in V.$$

Le développement (29) est inchangé ainsi que la fin du raisonnement relatif à la relation (31). La fonction u est donc solution de :

(50) $$u \in V_0 = u_0 + V$$

(51) $$a(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V$$

qui, au changement de variable (35) près, est une réécriture de la formulation variationnelle (37) (40).

4) Problème mixte pour l'équation de Poisson

Nous progressons peu à peu vers la généralité. Nous supposons la frontière $\partial\Omega$ décomposée en deux parties disjointes Γ_1 et Γ_2 :

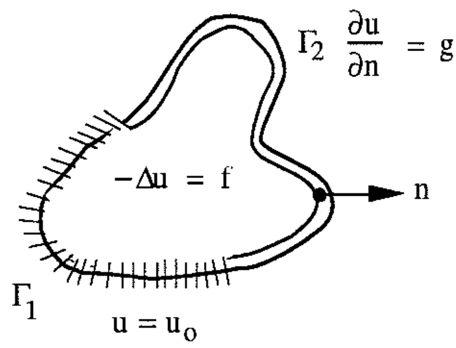
(52) $$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

et imposons une condition de Dirichlet sur Γ_1

(53) $$u = u_0 \qquad \Gamma_1$$

et une condition sur la dérivée normale, de Neumann, sur Γ_2 :

(54) $$\frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \Gamma_2$$



Problème mixte de Dirichlet Neumann

tout en supposant que u vérifie une équation de Poisson (1) dans le domaine Ω. Comme au paragraphe précédent, nous faisons l'hypothèse (34) que u_0 est définie sur $\overline{\Omega}$ tout entier, mais nous introduisons un **nouvel** espace de fonctions tests :

(55) $\quad W = \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$

de façon à écrire la condition de Dirichlet non homogène (52) sous la forme équivalente :

(56) $\quad u = u_0 + w \qquad w \in W.$

Pour établir la formulation variationnelle, nous multiplions (1) par $v \in W$ (attention : $v \in V$ dans les paragraphes précédents, v n'est maintenant nulle **que** sur Γ_1 et non plus sur le bord tout entier) et intégrons sur Ω. Compte tenu de la relation (19), il vient :

(57) $$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma .$$

Nous détaillons le terme de bord de la relation précédente :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma + \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma$$
$$= \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot 0 \, d\gamma + \int_{\Gamma_2} g v \, d\gamma$$

compte tenu de la condition de Neumann (53). Nous avons donc :

(58) $$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\gamma = \int_{\Gamma_2} g v \, d\gamma$$

et u est solution du problème suivant :

$$(59) \qquad \int_\Omega \nabla u . \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\Gamma_2} gv \, d\gamma \qquad \forall\, v \in W$$

ou, ce qui est équivalent, w est solution de :

$$(60) \qquad \int_\Omega \nabla w . \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx - \int_\Omega \nabla u_0 . \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_2} gv \, d\gamma \qquad \forall\, v \in W$$

Nous avons donc :

(i) changé d'espace de fonctions tests pour que celles-ci soient **nulles dans la portion** de la frontière **où u est donné** par une condition de Dirichlet,

(ii) choisi u sous la forme (56), ce qui revient à introduire la condition de Dirichlet dans l'espace (affine) de recherche de la solution,

(iii) changé le second membre dans la formulation variationnelle (relation (57)) ; on constate qu'il prend maintenant en compte à la fois le "chargement" f dans le domaine Ω et la condition de Neumann g sur la portion ad hoc de la frontière.

Proposition

Si u est solution de la formulation variationnelle (55) (56) (59), alors u est solution de l'équation aux dérivées partielles (1) (53) (54).

Preuve

Nous calculons le membre de gauche de la relation (59) par intégration par parties (relation (19)), en prenant en compte le fait que v est nulle sur Γ_1 dans le développement du terme de bord. Il vient :

$$(61) \qquad \int_\Omega \left(-\Delta u - f\right) v \, dx + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - g\right) v \, d\gamma = 0, \qquad \forall\, v \in W.$$

Nous prenons d'abord une fonction v nulle sur l'ensemble du bord ($v \in V$), ce qui annule automatiquement le terme de bord sur Γ_2 à la relation (61). Nous en déduisons (24), ce qui établit (1) car v est arbitraire dans le domaine Ω, même si elle est nulle sur tout le bord ! Regardons à nouveau la relation (61), compte tenu de ce que nous venons d'établir. Il ne reste que le terme de bord cette fois puisque (1) est vraie. Mais $v \in W$ n'est pas nulle sur Γ_2 où elle peut prendre des valeurs arbitraires (sauf peut être à l'interface entre Γ_1 et Γ_2), donc le coefficient multiplicateur de v est nécessairement partout nul sur Γ_2, ce qui établit la condition de Neumann (54). Comme la condition de Dirichlet est directement exprimée par la relation

(56), nous venons de vérifier que u satisfait à la fois l'équation aux dérivées partielles (1) et les deux conditions aux limites (53) et (54).

■

• La formulation énergie du problème de Dirichlet Neumann est, compte tenu de ce qui précède, simple à deviner. On pose $W_0 = u_0 + W$, c'est-à-dire :

(62) $$W_0 = \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \;\; v = u_0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}$$

et l'énergie J(v) prend la forme :

(63) $$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \; - \int_{\Omega} fv \, dx - \int_{\Gamma_2} gv \, d\gamma.$$

Une fonction u solution du problème énergétique ENE est par définition solution de :

(64) $$u \in W_0$$

(65) $$J(u) \leq J(v) \qquad \forall \, v \in W_0.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les problèmes ENE ((64) (65)) et FV ((55) (56) (57)) sont équivalents.

5) Problème de Neumann pour l'équation de Poisson

Nous particularisons le cas précédent en étudiant de façon détaillée ce qui se passe lorsque Γ_1 est vide, c'est-à-dire u solution du problème de Neumann pour (1), c'est-à-dire satisfaisant à la condition limite.

(66) $$\frac{\partial u}{\partial n} = g \qquad \partial\Omega.$$

On constate d'abord que le problème de Neumann (1) (66) **ne saurait avoir de solution unique**. En effet, si u est remplacé par u + c, où c est une fonction constante, u + c est solution du problème Neumann si u l'est, puisque $-\Delta c = 0$ dans Ω et $\nabla c_0 n = 0$ sur $\partial\Omega$. Il convient donc de chercher une (éventuelle) solution de (1) (66) "à une constante près", c'est-à-dire de se placer dans la classe (d'équivalence) de fonctions suivante :

(67) $$X = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{R} \right\} / \, \mathbb{R}$$

où deux fonctions sont dites égales si elles diffèrent d'une constante. De plus, nous supposons que Ω est **connexe** (d'un seul tenant), quitte à dupliquer le raisonnement autant de fois que nécessaire si Ω est fait de plusieurs morceaux.

Intégrons maintenant l'équation (1) dans le domaine Ω, ce qui revient à la multiplier par la constante "1" puis à intégrer. Compte tenu du fait que le gradient d'une constante est nulle, il ne reste que le terme de bord qui, compte tenu de la relation (66), vaut l'intégrale de g dans le domaine Ω. Nous venons d'établir la **relation de compatibilité** entre les données.

(68) $$\int_\Omega f\, dx + \int_{\partial\Omega} g\, dx = 0.$$

Si les données (f, g) ne satisfont pas la relation (68), il n'y a pas de solution pour le problème de Neumann (66) ! Nous supposons donc dans la suite cette condition satisfaite.

Quand on multiplie (1) par une fonction test v et qu'on intègre, on peut remplacer v par v + cste puisque le terme dû à la constante va donner zéro à cause de la relation de compatibilité. Nous pouvons donc considérer que v est défini à une constante additive près, c'est-à-dire supposer $v \in X$. Nous cherchons donc u "à une constante près".

(69) $$u \in X.$$

De plus, multipliant la relation (1) par $v \in X$ et intégrant par parties, il vient :

(70) $$\int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx + \int_{\partial\Omega} gv\, d\gamma, \qquad \forall\, v \in X$$

La formulation variationnelle du problème de Neumann est donnée par les relations (69) (70). La difficulté est que l'espace X introduit en (67) est un espace de "fonctions à une constante additive près", qui a un sens mathématique précis, mais d'emploi moins simple que les espaces V ou W introduits dans les relations précédentes. On notera en particulier que si g = 0 (problème de Neumann homogène), la **seule** différence entre les formulations variationnelles du problème de Dirichlet homogène ((9) (20)) et du problème de Neumann homogène ((69) (70)) est le choix de l'espace de travail ! C'est l'espace V des fonctions nulles au bord pour le problème de Dirichlet, c'est l'espace X des fonctions "à une constante près" pour le problème de Neumann. Dans le cas du problème de Dirichlet, l'espace V contient en son sein l'expression de la condition à la limite, alors que pour le problème de Neumann, cette dernière est exprimée grâce au second membre de la formulation variationnelle.

- La formulation en énergie du problème de Neumann est simple. On pose :

(71) $$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx - \int_{\partial\Omega} gv \, d\gamma$$

Cette fonctionnelle est définie pour toute fonction v et en particulier pour toute classe de fonctions de X dès que la relation de compatibilité (68) est satisfaite. Le problème d'optimisation :

(72) $$\inf_{v \in X} J(v)$$

a une unique solution $u \in X$, caractérisée par la nullité de la dérivée de J en u le long de toute direction v :

(73) $$dJ(u) \cdot v = 0 \qquad \forall\, v \in X$$

et comme :

(74) $$dJ(u) \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx - \int_{\Omega} fv \, dx - \int_{\partial\Omega} gv \, d\gamma$$

u est caractérisée par le fait d'être solution de la formulation variationnelle.