

CHAPITRE 3

Différences finies pour l'équation d'advection à une dimension d'espace

- 1) Equation d'advection à une dimension d'espace
- 2) Discrétisation en espace et en temps
- 3) Analyse de stabilité par la méthode de Fourier
- 4) Quelques propriétés de deux schémas classiques
- 5) Problème à valeur initiale et à la limite

III. DIFFÉRENCES FINIES POUR L'ÉQUATION D'ADVECTION À UNE DIMENSION D'ESPACE

1) Équation d'advection à une dimension d'espace

- L'équation d'advection à une dimension d'espace est un modèle mathématique ultérieurement simplifié qui représente une partie des phénomènes de transport présents par exemple pour la dynamique des gaz. Ainsi, considérons un instant le modèle des équations d'Euler des fluides parfaits compressibles (pas de viscosité ni de diffusion de la chaleur) que nous écrivons sous forme non conservative. La densité ρ , la vitesse \vec{v} et l'entropie spécifique s évoluent en temps selon les relations :

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$(2) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

$$(3) \quad \frac{ds}{dt} + \vec{v} \cdot \nabla s = 0$$

Supposons le champ de vitesses uniforme que nous notons a dans la suite et alignons l'axe des x le long de ce champ, ce qui annule du coup les termes en $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les équations (1) et (3). La densité ρ et l'entropie s vérifient la **même** équation d'advection, nous l'écrivons :

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

la lettre u désignant l'une quelconque des deux variables scalaires précédentes.

Nous nous intéressons dans la suite au **problème de Cauchy** pour l'équation d'advection (4), c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles, jointe à la **condition initiale**.

$$(5) \quad u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

- Le problème de Cauchy (4) (5) est mathématiquement trivial, puisque nous avons la proposition suivante

Proposition : La solution $u(t, x)$ du problème (4) (5) est donnée par l'expression suivante :

$$(6) \quad u(t, x) = u_0(x - at)$$

Preuve

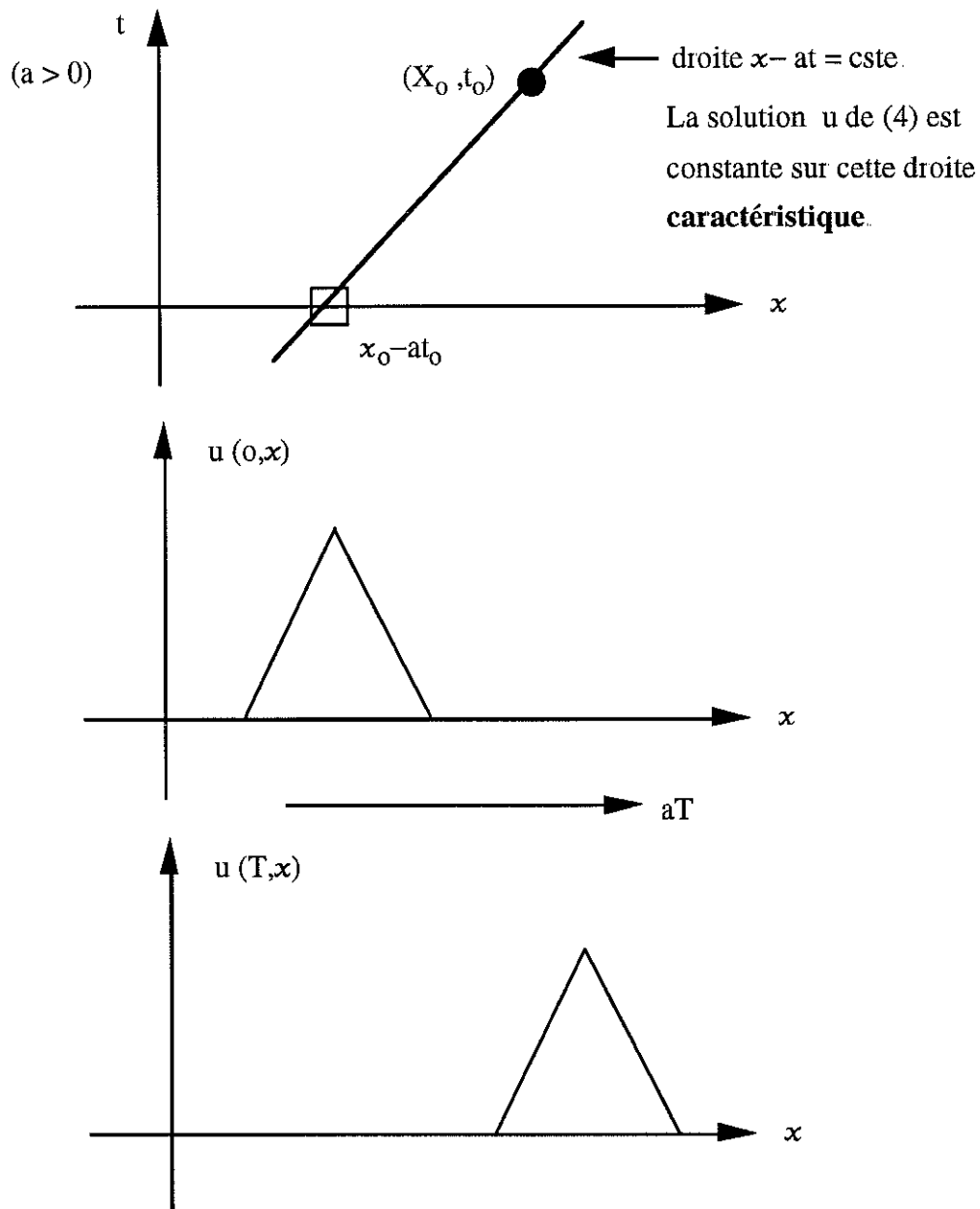
Prenant $t = 0$ dans la relation (6), la condition (5) est clairement vérifiée. On dérive ensuite en temps la relation (6) :

$$(7) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -a u'_0(x - at)$$

puis en espace :

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = u'_0(x - at)$$

ce qui montre la propriété ■



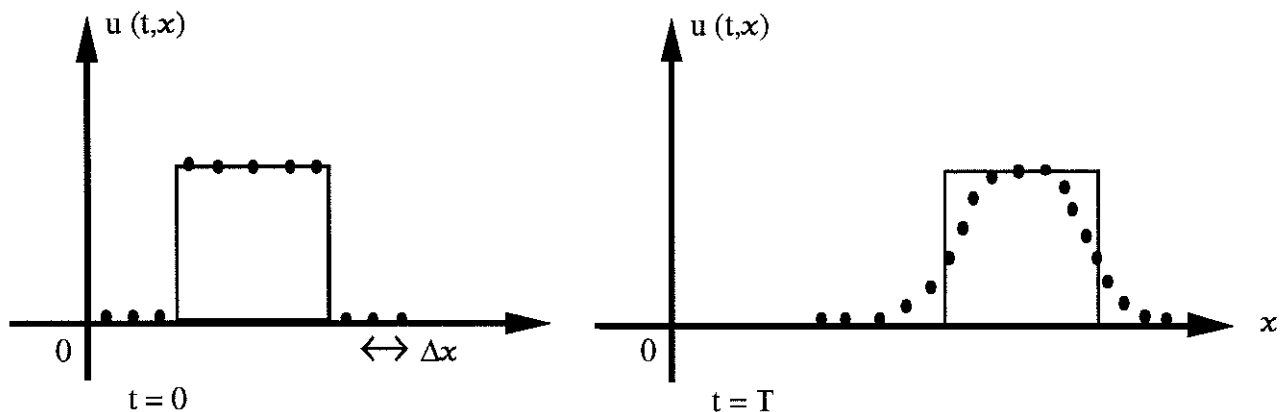
La solution du problème de Cauchy (4) (5) consiste à déplacer le profil u_0 (•) le long de l'axe des x à la vitesse a (advection à la vitesse a).

Il importe surtout de commenter la proposition précédente : l'argument de u_0 au membre de droite de la relation (6) est constant le long d'une droite de l'espace-temps d'équation.

$$(9) \quad x - at = \text{constante} \quad (\text{droite caractéristique})$$

qui est appelée **droite caractéristique**. L'interprétation "physique" de la relation (6) consiste à dire que pour résoudre le problème de Cauchy, c'est-à-dire calculer $u(t_0, x_0)$ en un point (t_0, x_0) bien défini, on "remonte" la droite caractéristique d'équation (9), c'est-à-dire ici $x - at = x_0 - at_0$, jusqu'à l'origine du temps ($t = 0$), donc au point $x = x_0 - at_0$ (voir la figure). Le point x_0 étant fixé, on lui retranche at_0 pour arriver à l'origine du temps donc si on raisonne avec un temps croissant, la valeur initiale $u_0(x)$ se retrouve à l'instant t_0 au point $x + at_0$, ce qui correspond à une translation at_0 du profil u_0 (voir les figures). Cette interprétation étant faite, la notion d'advection (ou de transport, ou de convection) à la vitesse a a justifié pleinement le nom donné à l'équation (4) :

- Le fait que le problème (4) (5) soit d'une part relié à des phénomènes présents dans les fluides (transport par le courant) et d'autre part soluble exactement en fait un bon modèle mathématique pour introduire, comprendre, tester, valider les schémas aux différences finies qui sont ensuite utilisés pour des modèles fluides plus complexes dont on ne connaît pas de "solution analytique".
- Notons que dès qu'une discontinuité est présente dans le profil u_0 , les solutions numériques approchées sont des approximations peu satisfaisantes puisqu'il faut en général au moins cinq à six mailles pour "capturer" la discontinuité, ce avec les meilleures méthodes numériques.



Étalement d'une discontinuité lors de la résolution numérique de l'équation d'advection.

- Nous terminons cette introduction par deux propriétés des solutions de l'équation d'advection.

Proposition : Stabilité L^2 et L^∞

– Pour tout instant $t > 0$, la norme L^2 de la solution $u(t, \bullet)$, c'est-à-dire :

$$(10) \quad \|u(t)\|_{L^2} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |u(t, x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une constante égale à sa valeur initiale :

$$(11) \quad \|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2} \quad \forall t > 0.$$

– Si u_0 vérifie une relation de minoration et majoration du type :

$$(12) \quad u_* \leq u_0(X) \leq u^* \quad \forall X \in \mathbb{R},$$

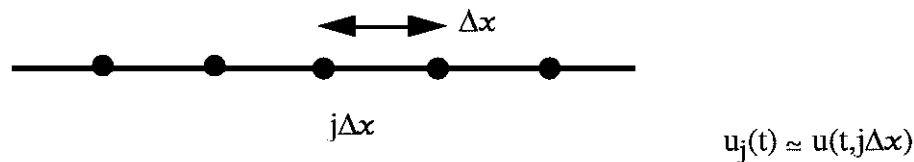
alors il en est de même à tout instant ultérieur

$$(13) \quad u_* \leq u(t, x) \leq u^* \quad \forall t > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}.$$

La preuve de cette propriété, fondée sur des calculs élémentaires à partir de la formule de représentation (6), est laissée au lecteur.

2) Discrétisation en espace et en temps

- Nous commençons dans ce paragraphe par décrire la **méthode des lignes**, qui consiste à discrétiser l'équation (4) en espace seulement, gardant une représentation continue en temps.



Semi-Discretisation en espace

On se contente de chercher des valeurs approchées de la solution u au point $x_j = j\Delta x$, ayant fixé au préalable un pas d'espace $\Delta x > 0$:

$$(14) \quad u_j(t) \approx u(t, j\Delta x) \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0.$$

Le problème est alors de **trouver l'équation différentielle ordinaire** qui permet de décrire l'évolution en temps de la variable discrète u_j :

$$(15) \quad \frac{d}{dt} u_j(t) = -a \frac{\partial}{\partial x} \{u\} (x_j) .$$

Le calcul du membre de droite de la relation (15) n'est pas naturel et résulte d'un **choix** du concepteur de la méthode. En effet, une dérivée en espace peut être définie à l'aide des trois limites suivantes :

$$(16) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (x_j) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{h} [u(x_j) - u(x_j - h)]$$

$$(17) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (x_j) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{h} [u(x_j + h) - u(x_j)]$$

$$(18) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (x_j) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{2h} [u(x_j + h) - u(x_j - h)] .$$

La relation (16) introduit une différence finie **décentrée à gauche**, la relation (17) une différence finie **décentrée à droite** et la relation (18) une différence finie **centrée** autour du point x_j . Lorsqu'on regarde l'axe des x à l'échelle $h = \Delta x$, les trois expressions dont on prend la limite aux relations (16) à (18) ont un sens et sont les "meilleures" approximations des limites considérées à l'échelle Δx du maillage. Elles conduisent aux trois schémas d'approximation suivants :

$$(19) \quad (D_- u)_j = \frac{1}{\Delta x} (u_j - u_{j-1}) \quad \text{décentré à gauche}$$

$$(20) \quad (D_+ u)_j = \frac{1}{\Delta x} (u_{j+1} - u_j) \quad \text{décentré à droite}$$

$$(21) \quad (D_0 u)_j = \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1} - u_{j-1}) \quad \text{centré.}$$

Quand, dans le second membre de la relation (15), on remplace la dérivée partielle par rapport à x par l'un des trois schémas (19), (20) ou (21), on obtient alors un système différentiel du type :

$$(22) \quad \frac{d}{dt} U(t) = f(U)$$

où $U = \{u_j, j \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des variables discrètes et $(f(U))_j = -a(Du)_j$ ($D = D_+, D_-$ ou D_0 selon le choix de discrétisation en espace). Bien que le système (22) soit posé avec un nombre infini de variables, il s'agit d'un artifice mathématique pour faciliter les analyses qui vont suivre et on doit le considérer comme une équation différentielle ordinaire à un nombre fini de paramètres.

- On est alors en mesure d'introduire une échelle de temps $\Delta t > 0$ et de discrétiser en temps le système (22) à l'aide des méthodes générales introduites au chapitre 2 de ce cours. Nous nous restreignons dans ce paragraphe au cas du schéma d'**Euler explicite en temps** ; on note avec un indice supérieur (qui n'est pas un exposant !) l'approximation de u_j au temps $n\Delta t$:

$$(23) \quad u_j^n \simeq u_j(n\Delta t) \simeq u(n\Delta t, j\Delta x)$$

et le schéma d'Euler explicite relatif à l'équation différentielle (22)

$$(24) \quad \frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) = f(U^n)$$

prend l'une des trois formes suivantes, selon qu'on discrétise en espace avec l'une des trois relations (19), (20) ou (21) :

$$(25) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad \text{décentré à gauche}$$

$$(26) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0 \quad \text{décentré à droite}$$

$$(27) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \quad \text{centré.}$$

- **L'ordre de précision** de ces schémas est défini de la façon suivante. On considère l'expression $\tau(\Delta t, \Delta x)$ obtenue en remplaçant dans l'une des écritures (25) à (27) u_k^m par la valeur de la solution **exacte** au point $(k\Delta t, m\Delta x)$, c'est-à-dire $u(k\Delta t, m\Delta x)$. Comme la solution **exacte** de l'équation aux dérivées partielles (4) n'a aucune raison de vérifier le schéma d'approximation, $\tau(\Delta t, \Delta x)$ est une expression non nulle dont on peut faire le développement limité pour Δt et Δx tendant vers zéro. Si $\tau(\Delta t, \Delta x)$ tend vers zéro dans ces conditions, on dit que le schéma est **consistant** avec l'équation (4). Si, de plus, on a le développement asymptotique du type :

$$(28) \quad \tau(\Delta t, \Delta x) = O(\Delta t^p) + O(\Delta x^q) \quad (p, q \text{ entiers})$$

on dit que le schéma est d'ordre p en temps et d'ordre q en espace. On a la propriété suivante, pour les schémas (25) à (27), dont la preuve est laissée au lecteur.

Proposition

- Les schémas décentrés à gauche (25) et décentré à droite (26) sont **d'ordre 1** en espace et en temps.
- Le schéma centré (27) est d'ordre 2 en espace et d'ordre 1 en temps.

Afin de pouvoir critiquer les choix conduisant aux trois schémas (25) à (27), nous effectuons au paragraphe suivant une **analyse de stabilité**.

3) Analyse de stabilité par Fourier

- Cette méthode, proposée par J. Von Neumann en 1950, consiste à envisager comme condition initiale une **onde sinusoïdale** et regarder son comportement quand on lui applique le schéma numérique et quand on regarde son évolution en temps exacte à l'aide de l'équation aux dérivées partielles (4).

On considère donc une onde sinusoïdale à l'instant t_n , de la forme :

$$(29) \quad u_j^n = \hat{u}(k) \exp(ikj\Delta x), \quad j \in \mathbb{Z}$$

où k est le vecteur d'onde de l'onde, $k\Delta x$ étant défini à un facteur 2π près, compte tenu de l'expression de l'exponentielle complexe au membre de droite de la relation (29)

$$(30) \quad 0 \leq k\Delta x < 2\pi.$$

- Lorsqu'on itère l'un des trois schémas en temps (25) (26) ou (27), avec la condition (29) au temps t_n , l'expression u_j^{n+1} est de la forme :

$$(31) \quad u_j^{n+1} = g(k\Delta x, \sigma) \hat{u}(k) \exp(ikj\Delta x)$$

et il est donc toujours possible, lorsque le schéma numérique est **linéaire**, d'écrire le schéma numérique sous la forme :

$$(32) \quad u_j^{n+1} = g(k\Delta x, \sigma) u_j^n, \quad \text{avec } \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$$

lorsque u_j^u est donné par la relation (29). Le coefficient $g(k\Delta x, \sigma)$ est appelé **coefficient d'amplification** du schéma numérique.

Définition. On dit qu'un schéma numérique est **stable** (au sens de Von Neumann) lorsque son coefficient d'amplification g , défini aux relations (29) et (32), est pour tout k vérifiant la relation (30), de module inférieur ou égal à 1 :

$$(33) \quad |g(k\Delta x, \sigma)| \leq 1 \quad \forall k, 0 \leq k\Delta x < 2\pi.$$

- La condition (33) exprime que l'onde (29) n'est pas amplifiée par le schéma. Si c'est le cas, la multiplication des itérations en temps conduit à la manipulation d'une onde dont l'amplitude croît exponentiellement, c'est-à-dire finalement à la manipulation dans l'ordinateur de nombres dont le module devient plus grand que le plus grand nombre représentable en machine (overflow) : c'est l'instabilité numérique, qu'il faut absolument prévenir.

La notion de stabilité numérique est purement mathématique : elle exprime que les manipulations algébriques caractéristiques du schéma ne contiennent pas de suite géométrique divergente. Cette notion est complètement indépendante de la précision du schéma, qui est plus intuitive et se ramène à des développements de Taylor. Nous pouvons donc énoncer la :

Proposition

- Le schéma décentré à gauche (25) est **stable** au sens de Von Neumann sous la condition (dite de Courant Friedrichs Lewy, ou CFL).

$$(34) \quad \sigma \equiv a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (a > 0)$$

- Les schémas décentré à droite (26) et centré (27) sont **instables** quel que soit le pas de temps Δt strictement positif.

Preuve de la proposition

- On calcule les coefficients d'amplification des trois schémas. Lorsqu'on change j en $j+1$ dans l'expression (29), on multiplie u_j^n par le coefficient $\exp(ik\Delta x)$; cette remarque permet de calculer très rapidement les coefficients d'amplification des schémas.

- Pour le schéma décentré à gauche, on a :

$$(35) \quad g(k\Delta x, \sigma) = 1 - \sigma \left(1 - e^{-ik\Delta x} \right)$$

$$\text{Alors} \quad |g|^2 = \left(1 - 2\sigma \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \right)^2 + \sigma^2 \sin^2 k\Delta x$$

$$= 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} + 4\sigma^2 \sin^4 \frac{k\Delta x}{2} + 4\sigma^2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \cos^2 \frac{k\Delta x}{2}$$

$$(36) \quad |g|^2 = 1 - 4\sigma(1-\sigma) \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$$

et l'expression au membre de droite de (36) n'est inférieure à 1 que si $\sigma(1-\sigma) \geq 0$, c'est-à-dire sous la condition (34) dès que $a > 0$ et $\Delta t > 0$. Ceci prouve le premier point de la proposition.

- Pour le schéma décentré à droite, on a :

$$g = 1 - \sigma \left(e^{ik\Delta x} - 1 \right)$$

et en prenant un nombre d'onde k tel que $k\Delta x = \Pi$, on a dans ce cas :

$$g(k\Delta x = \Pi) = 1 + 2\sigma > 1 \quad \text{dès que} \quad \sigma > 0$$

ce qui montre que ce schéma est instable.

- Pour le schéma centré en espace (27), le coefficient d'amplification prend la forme suivante :

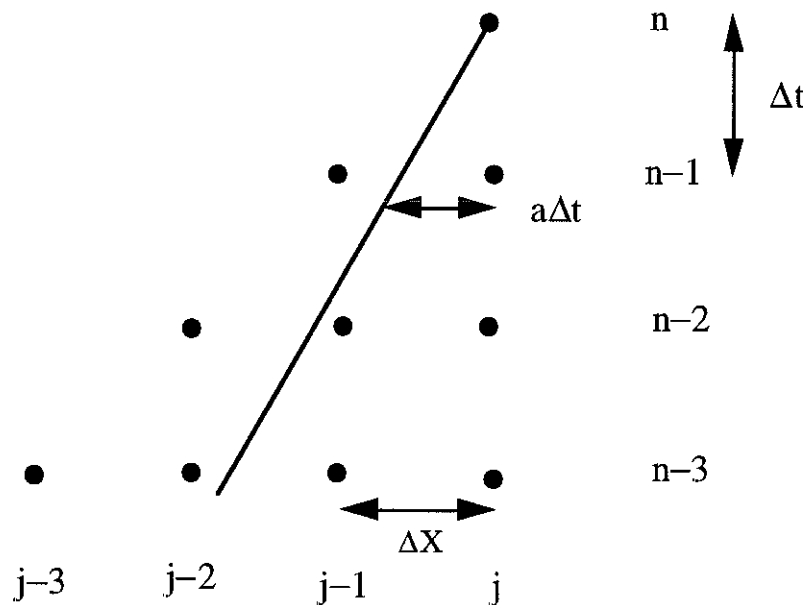
$$(37) \quad g(k\Delta x, \sigma) = 1 - i\sigma \sin(k\Delta x)$$

et pour tout k , cette expression est un nombre complexe de module strictement supérieur à 1 si σ n'est pas nul.

- **Cône de dépendance numérique**

Afin de se donner une idée intuitive de la condition de stabilité (34), on construit, pour le schéma décentré (25) le cône de dépendance numérique entre les instants n et $n-m$ (m entier ≥ 0), c'est-à-dire l'ensemble des noeuds $((j+\ell)\Delta x, (n-k)\Delta t)$ ($0 \leq k \leq m$) dont la valeur est nécessaire pour calculer u_j^n .

Lorsque $m = 3$ par exemple le cône de dépendance numérique du schéma (25) est donné par le graphe suivant :



Cône de dépendance numérique du schéma décentré à gauche (25).

On peut superposer à ce graphe la droite caractéristique (9) passant par le point $(j\Delta x, n\Delta t)$. La condition de stabilité (34) exprime alors que pour l'instant $(n-1)\Delta t$, cette droite passe "entre" les noeuds $(j-1)\Delta x$ et $j\Delta x$ du maillage en espace. De façon plus générale, la droite caractéristique est située à l'intérieur du cône de dépendance numérique relatif au schéma décentré à gauche lorsque la relation (34) est vérifiée.

Nous retiendrons la condition nécessaire (pratique) suivante.

Caractéristique et cône de dépendance numérique

Pour qu'un schéma soit stable, il est nécessaire que le cône de dépendance numérique contienne la droite caractéristique.

Cette condition permet très rapidement d'illustrer la non stabilité du schéma décentré à droite : le schéma a un cône de dépendance numérique formé d'états tous situés "à droite" du noeud $(j\Delta x, n\Delta t)$, c'est-à-dire de la forme $((j+k)\Delta x, (n-m)\Delta t)$ $k \geq 0$ alors que la droite caractéristique, qui porte l'information mathématiquement (physiquement ?) nécessaire pour connaître la valeur de la solution au point $(j\Delta x, n\Delta t)$, vient de la gauche ! Il n'est pas possible d'interpoler les données de la grille partielle de dépendance pour évaluer de façon approchée la valeur du champ inconnu sur la droite caractéristique.

- La condition précédente n'est que **nécessaire**. En effet, dans le cas du schéma centré instable (27) (voir son coefficient d'amplification en (37)), la condition de stabilité (34) permet de placer la droite caractéristique aboutissant au noeud $(j\Delta x, n\Delta t)$ à l'intérieur du cône de dépendance numérique de ce schéma (le dessin est laissé au lecteur), alors que le schéma demeure instable que que soit $\Delta t > 0$! On mesure bien sûr cet exemple, combien la notion de stabilité numérique est une notion purement mathématique dont une représentation intuitive comme la condition géométrique de cône de dépendance ne donne qu'une image imparfaite.

4) Quelques propriétés de deux schémas classiques

Dans la suite de ce chapitre, nous ne conservons que le schéma décentré à gauche (25), vu que les schémas (26) et (27) sont instables pour tout pas de temps $\Delta t > 0$. Nous remarquons toutefois que si $a < 0$, il convient de prendre le schéma décentré à droite et ne pas utiliser le schéma décentré à gauche (exercice laissé au lecteur !). Le choix d'un schéma décentré impose de connaître le sens de l'écoulement.

- Nous introduisons maintenant le schéma de Lax Wendroff (1960), qui s'obtient par un procédé dual de celui proposé au second paragraphe de ce chapitre : on discrétise d'abord le temps (l'espace restant continu) puis on forme les opérateurs aux différences centrées les plus simples pour calculer de façon approchée les dérivées partielles en espace.

On part du développement de Taylor suivant :

$$(37) \quad u^{n+1} = u^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^n + 0 (\Delta t^3)$$

que l'on va tronquer pour définir le schéma, et on remplace les dérivées en temps par des dérivées en espace à l'aide de l'équation (4) :

$$(38) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$(39) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$(40) \quad u^{n+1} = u^n - a\Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^n + \frac{1}{2} (a\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^n$$

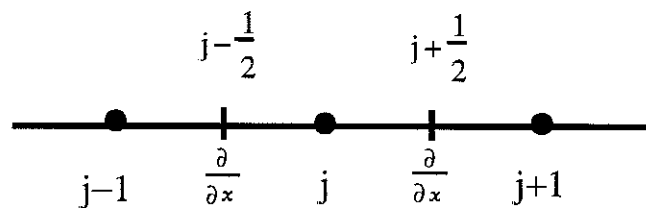
On remplace ensuite les dérivées partielles en espace où à la relation (40) par des différences finies **centrées**.

$$(41) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n \simeq \frac{1}{2\Delta x} (u_{j+1}^u - u_{j-1}^u)$$

$$(42) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n \simeq \frac{1}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^u - 2u_j^u + u_{j-1}^u)$$

On remarque que ces deux approximations sont précises au **second ordre en espace**, et l'expression (42) donnant la dérivée seconde au noeud $j\Delta x$ s'obtient en introduisant d'abord une approximation de la dérivée première entre les deux noeuds j et $(j+1)$:

$$(43) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j+\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{\Delta x} (u_{j+1} - u_j)$$



et en utilisant ensuite cette expression du gradient de part et d'autre du sommet j :

$$(44) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j \simeq \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{j-\frac{1}{2}} \right\}$$

Ceci correspond finalement à l'expression (42).

Le schéma de Lax-Wendroff est donc défini par la relation :

$$(45) \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

- L'intérêt essentiel du schéma de Lax-Wendroff réside en sa grande **précision** spatio temporelle :

Proposition. Le schéma (45) est précis au second ordre en temps et en espace.

De plus, il possède de bonnes propriétés de **stabilité**.

Proposition. Le schéma de Lax-Wendroff (45) est stable au sens de Von Neumann sous la condition CFL.

$$(46) \quad \sigma^2 \leq 1 ; \text{ où } \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}.$$

- Pour démontrer cette dernière proposition (la preuve de la proposition précédente est laissée au lecteur), on calcule le coefficient d'amplification, en adoptant la notation classique $\xi = k\Delta x$.

$$(47) \quad g(\xi, \sigma) = 1 - i \sigma \sin \xi + \sigma^2 (\cos \xi - 1).$$

Le calcul du carré du module de g est alors facile :

$$\begin{aligned} |g|^2 &= [1 - \sigma^2 (1 - \cos \xi)]^2 + \sigma^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - \sigma^2 (2 - 2 \cos \xi - \sin^2 \xi) + \sigma^4 (1 - \cos \xi)^2 \\ &= 1 - \sigma^2 (1 - 2 \cos \xi + \cos^2 \xi) + \sigma^4 (1 - \cos \xi)^2 \\ (48) \quad |g|^2 &= 1 - \sigma^2 (1 - \sigma^2) (1 - \cos \xi)^2 \end{aligned}$$

Lorsque ξ varie de 0 à 2Π , le coefficient $(1 - \cos \xi)^2$ varie de 0 à 4, et $|g|^2$ ne reste plus petit que 1 que si $(1 - \sigma^2)$ est positif, ce qu'exprime exactement la condition (46).

Proposition : Stabilité L^∞

Le schéma décentré (25) est, sous la condition CFL (34), stable L^∞ , alors que même sous la condition analogue (46), le schéma de Lax-Wendroff (45) ne l'est pas.

- La stabilité L^∞ , définie aux relations (12) et (13) est simple à établir pour le schéma décentré, qui peut s'écrire sous la forme :

$$(49) \quad u_j^{n+1} = (1-\sigma) u_j^n + \sigma u_{j-1}^n$$

c'est-à-dire comme **combinaison convexe** ($\sigma \leq 0, 1-\sigma \geq 0$) des points du cône de dépendance numérique. Si $u_* \leq u_k^n \leq u^*$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors u_j^{n+1} satisfait clairement cette propriété compte tenu de l'expression (49) qui met en jeu des coefficients positifs pour u_j^n et u_{j-1}^n , et ceci est vrai quel que soit j .

- Dans le cas du schéma de Lax-Wendroff, on a :

$$(50) \quad u_j^{n+1} = (1-\sigma^2) u_j^n - \frac{1}{2} \sigma (1-\sigma) u_{j+1}^n + \frac{\sigma}{2} (1+\sigma) u_{j-1}^n$$

Pour $0 \leq \sigma \leq 1$, le coefficient de u_{j+1}^n est négatif, et pour $-1 \leq \sigma \leq 1$, celui de u_{j-1}^n est négatif. Ceci ne constitue pas une preuve de la non stabilité du schéma de Lax Wendroff, qui résulte d'un résultat général de V. Thomée (non démontré ici) qu'un schéma stable L^∞ est d'ordre impair. ■

• Erreur de phase

Le coefficient d'amplification g mesure la façon dont le schéma modifie une onde sinusoïdale. Si on a une condition initiale du type :

$$(51) \quad u_0(x) = \exp(ikx)$$

la solution de l'équation d'advection après un temps Δt s'écrit :

$$(52) \quad u^{\text{ex}}(\Delta t) = e^{-ika\Delta t} u_0(x)$$

ce qui conduit à introduire le coefficient d'amplification exact relatif à l'équation (4) et non plus au schéma numérique. En introduisant le nombre de courant σ , on a donc :

$$(53) \quad g^{\text{ex}} = e^{-ik\sigma\Delta x}$$

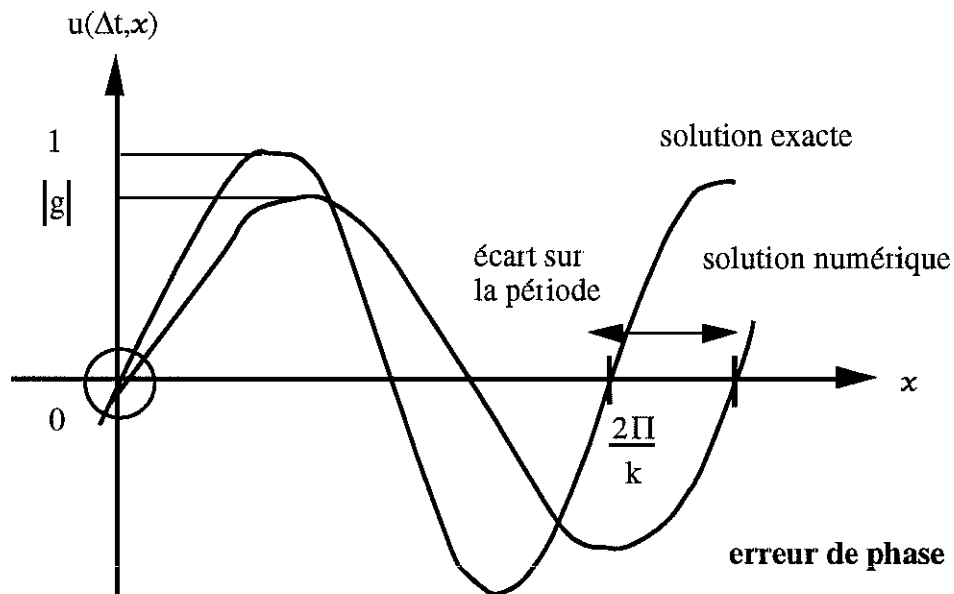
Nous écrivons par ailleurs le coefficient d'amplification du schéma numérique en le décomposant en module et argument.

$$(54) \quad g = |g| \exp -i\theta.$$

La condition de stabilité $|g| \leq 1$ est "automatiquement" satisfaite pour le coefficient exact introduit en (53) qui est de module toujours égal à 1.

Le rapport entre la solution approchée calculée par le schéma numérique et la solution exacte (52) est donc, pour une onde sinusoïdale, donnée par l'expression suivante :

$$(55) \quad \frac{u^{\text{sh}}(\Delta t)}{u^{\text{ex}}(\Delta t)} = |g| \exp -i (\theta - k\sigma\Delta x).$$



L'argument $(\theta - k\sigma\Delta x)$ de l'exponentielle complexe au second membre de (55) est appelé **erreur de phase** du schéma numérique. Il mesure l'écart entre la période du signal introduit comme condition initiale (51) et le signal reçu grâce au schéma numérique. Si $\theta - k\sigma\Delta x$ est positif, l'onde numérique "va plus vite" que l'onde physique et elle va moins vite si $\theta - k\sigma\Delta x < 0$, ce qui est par exemple le cas de la figure ci-dessus.

Proposition : Erreur de phase pour $k\Delta x$ petit

Pour le schéma décentré amont (25), l'erreur de phase admet le développement limité suivant :

$$(56) \quad \theta - k\sigma\Delta x = -\frac{1}{6}\sigma(1-\sigma)(1-2\sigma)(k\Delta x)^3 + O((k\Delta x)^5)$$

et pour le schéma de Lax-Wendroff (45), nous avons :

$$(57) \quad \theta - k\sigma\Delta x = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(k\Delta x)^3 + O((k\Delta x)^5).$$

Exercice. Le calcul de u_j^{n+1} avec le schéma décentré (respectivement de Lax-Wendroff) revient à interpoler la valeur au pied de la caractéristique :

$$(58) \quad x = x_j - a\Delta t \quad (a\Delta t \leq \Delta x)$$

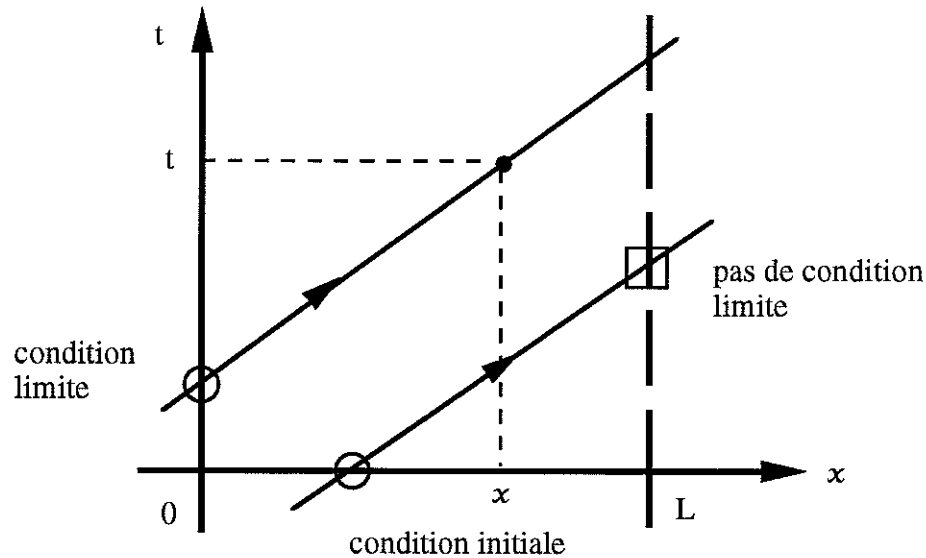
à l'aide d'une interpolation affine entre les valeurs u_{j-1}^n et u_{j+1}^n (respectivement une interpolation parabolique à partir des trois valeurs $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$).

5) Problème à valeur initiale et à la limite

• Nous avons étudié dans ce chapitre le problème de Cauchy pour l'équation d'advection, c'est-à-dire l'équation (4) avec une variable d'espace x décrivant \mathbb{R} pour entier. Dans la pratique, la variable d'espace est bornée, et nous devons donc nous intéresser au problème dit "IBVP" (Initial Boundary Value Problem) c'est-à-dire avec valeur à la **limite** et valeur **initiale** :

$$(59) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0 \quad 0 < x < L \\ u(0, x) = u_0(x) & 0 < x < L \\ \text{condition limite en } x = 0 \text{ et/ou } x = L \end{cases}$$

Le jeu de condition limite à imposer en $x = 0$ et $x = L$ se devine facilement à partir de la connaissance des caractéristiques : la solution u est constante le long d'une droite caractéristique du type $x - at = \text{cste}$.



"IBVP" pour l'équation d'advection

Partant de $(t > 0, x \in]0, L[)$, on "remonte" vers le passé la droite caractéristique passant par ce point et on finit par rencontrer l'axe des x ($t=0$) ou l'axe des temps ($x=0$). Dans le premier cas, $u(t, x)$ est égal à la valeur initiale u_0 (relation (6)) et dans le second cas, $u(t, x)$ est égal à la valeur limite v_0 en $x=0$ pour le temps $t - \frac{x}{a}$:

$$(60) \quad u(t, x) = v_0 \left(t - \frac{x}{a} \right) \quad 0 < at < x < L.$$

- Le problème IBVP (59) doit donc être mathématiquement (nous ne l'avons pas démontré ici !) et physiquement (nous venons de l'illustrer) posé sous la forme suivante :

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t > 0, \quad 0 < x < L \\ u(0, x) = u_0(x) & 0 < x < L \quad \text{condition initiale (t=0)} \\ u(t, 0) = v_0(t) & t > 0 \quad \text{condition limite en } x = 0. \end{cases}$$

Nous remarquons qu'**aucune condition limite** n'est nécessaire en $x = L$, partie de la frontière où la droite caractéristique $x = at = \text{cste}$ "sort" du domaine de calcul (si on la suit en l'orientant vers les temps croissants !).

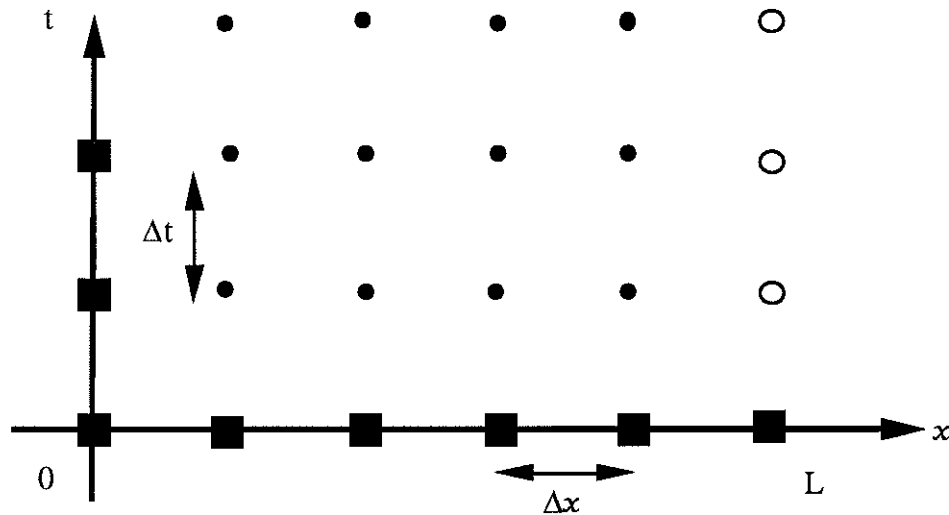
Nous nous attendons à ce que tout schéma numérique doive prendre en compte cette particularité de l'équation d'advection.

- Nous discrétisons l'espace temps $0 < x < L, t > 0$ à l'aide d'un pas d'espace compatible avec la géométrie :

$$(62) \quad \Delta x = \frac{L}{J} \quad J \text{ entier}$$

et un pas de temps compatible avec la condition de Courant-Friedrichs-Lewy :

$$(63) \quad a\Delta t \leq \Delta x.$$



En $t = 0$, la valeur aux points de grille est donnée à l'aide de la condition initiale :

$$(64) \quad u_j^0 = u_0(j\Delta x) \quad 0 \leq j \leq J$$

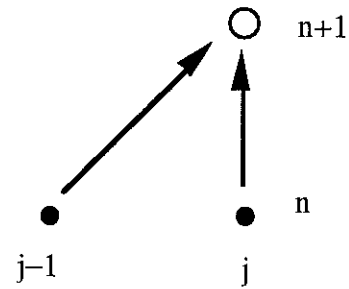
et en $x = 0$, on utilise la condition limite entrante :

$$(65) \quad u_0^n = v_0(n\Delta t) \quad n \geq 0$$

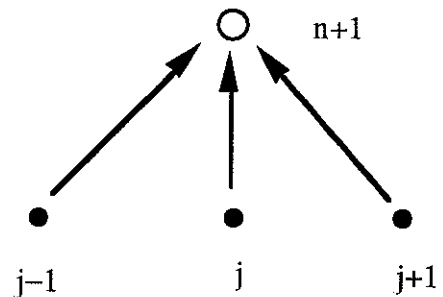
[on remarque que la condition de continuité $u_0(0) = v_0(0)$ est nécessaire pour donner un sens non ambigu aux relations (64) et (65) pour $j = 0$ et $n = 0$ respectivement].

Pour les points de grille "intérieurs" au domaine de calcul (avec un point noir sur le graphe précédent), le schéma numérique permet de calculer un pas de temps dès que toutes les valeurs sont calculées au pas de temps antérieur. Par contre, en $x = L$ (ou $j = J$), l'absence de point de grille "à droite" de ces points limites impose d'analyser avec soin ce qui peut arriver.

- Dans le cas du schéma décentré (25), seuls les points j et $j-1$ sont nécessaires à l'instant n pour itérer le schéma. Donc en $j = J$ (au bord du domaine), il n'y **a pas de problème** particulier. Le schéma décentré "suit" la physique en allant chercher l'information numérique dans la bonne direction.



- Dans le cas du schéma de Lax Wendroff (45), les trois points $j-1, j, j+1$ sont utilisés pour itérer le schéma. **On ne peut pas l'utiliser sans modification à la limite.**



On peut ajouter une "condition limite numérique" en $x=L$, qui enrichit la physique sans raison particulière, en "prétraitant" une valeur en $j = J+1$, pour calculer ensuite avec le schéma de Lax Wendroff entre les instants n et $n+1$. On peut aussi **changer de schéma** pour le calcul du seul point limite $j = J$; le "schéma à la limite" (par exemple le schéma décentré à gauche vu ce qui a été dit plus haut) doit être compatible avec le "schéma intérieur" (ici Lax Wendroff). L'analyse de la **stabilité** pour le problème à condition limite et initiale est **délicate** et récente (Gustafsson-Kreiss-Sundström, 1972) ; les critères de stabilité du schéma global sont encore du domaine des spécialistes !

