le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Examen de septembre 2017, durée 45 minutes

Les notes de cours personnelles et transmises lors des cours sont autorisées, sous forme papier et à l'exclusion de tout autre document. Les calculatrices sont interdites et inutiles. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Ce sujet comporte une page.

Factorisation de Cholesky

a) On se donne la matrice A_2 à deux lignes et deux colonnes suivante : $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On cherche des matrices $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ de sorte que la factorisation de Gauss $A_2 = G\,U$ soit satisfaite. Calculer les valeurs des nombres α, β, γ et δ.

b) On se propose maintenant de réaliser la factorisation de Cholesky de la matrice symétrique A_2. Soit $L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix}$ une matrice telle que $a > 0$ et $b > 0$. On rappelle que la transposée L^{t} de la matrice L s'obtient en échangeant les lignes et les colonnes. Calculer les nombres réels $a > 0$, $b > 0$ et c de sorte que $A_2 = L\,L^{\mathrm{t}}$.

c) Vérifier que la matrice L trouvée à la question b) satisfait effectivement à la relation $L\,L^{\mathrm{t}} = A_2$.

d) On reprend la question b) en passant à une matrice à trois lignes et trois colonnes :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 13 & -10 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix}$. On pose maintenant $L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & e & d \end{pmatrix}$. Déterminer les coefficients a, b, c, d et e avec $a > 0$, $b > 0$ et $d > 0$ de sorte que $A = L\,L^{\mathrm{t}}$.

e) On cherche à résoudre le système linéaire $A\,X = B$ avec la matrice A introduite à la question d) et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$. Calculer la solution Y du système linéaire $LY = B$.

f) Avec les données et les notations des questions d) et e), calculer la solution Z du système linéaire $L^{\mathrm{t}}\,Z = Y$.

g) Avec les données et les notations des questions d), e) et f), en déduire la solution X du système linéaire $A\,X = B$.

François Dubois, septembre 2017.