le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 05 Schéma implicite pour l'équation de la chaleur

- Introduction.

Pour approcher numériquement l'équation de la chaleur dans le cas d'une dimension d'espace

(1) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < L\,, \quad t > 0\,,$

nous avons utilisé dans la leçon précédente un schéma d'Euler explicite en temps. Avec une notation qui ignore la dépendance spatiale de la fonction u, nous avons mis en place des itérations temporelles discrètes de la forme

(2) $\quad \dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \kappa \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big)^n = 0\,.$

Pour cette leçon, nous adoptons un schéma d'Euler implicite pour le terme de flux de chaleur de l'équation (1) ; la relation (2) se transforme en

(3) $\quad \dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \kappa \Big(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big)^{n+1} = 0\,.$

On explicite également la dépendance spatiale et si u_j^n désigne une approximation de la solution $u(x,t)$ de l'équation (1) au point d'espace-temps $(j\,\Delta x,\, n\,\Delta t)$, nous pouvons réécrire la relation (3) sous une forme qui détaille le schéma en espace :

(4) $\quad \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \kappa\, \dfrac{u_{j-1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = 0\,.$

- Ecriture matricielle

On précise le lien entre la longueur L de l'intervalle et la valeur du pas d'espace Δx. On se donne un entier $J \geq 0$ et on choisit ici [attention ; nous n'avions pas fait la même convention dans la leçon précédente] de discrétiser l'intervalle $[0, L]$ avec $(J+1)$ points de grille :

(5) $\quad \Delta x = \dfrac{L}{J+1}\,.$

Nous mettons en place des conditions de Dirichlet non homogènes en $x = 0$ et $x = L$. Après discrétisation en espace, ces points ont pour numéros 0 et $(J+1)$. Après discrétisation en temps, nous supposons donnée une valeur g^n pour tout instant discret $n\,\Delta t$ "à gauche" de l'intervalle $[0, L]$ et une valeur d^n pour tout instant discret "à droite" de l'intervalle :

(6) $\quad u_0^n = g^n\,, \quad u_{J+1}^n = d^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$

Le schéma numérique (4) a alors un sens pour $0 \leq j \leq J$ et pour les valeurs au bord, il suffit d'écrire la relation (6) avec l'instant discret n remplacé par $(n+1)$. A l'aide de la notation $\zeta \equiv \dfrac{\kappa\,\Delta t}{\Delta x}$, nous pouvons réécrire le schéma numérique (4) sous la forme

(7) $\quad -\zeta\, u_{j-1}^{n+1} + (1 + 2\,\zeta)\, u_j^{n+1} - \zeta\, u_{j+1}^{n+1} = u_j^n\,, \quad 2 \leq j \leq J-1\,.$

François Dubois, 26 avril 2017.

Pour $j = 1$, il faut prendre en compte la condition limite en $x = 0$ et le schéma (4) admet l'écriture suivante :

(8) $\quad (1+2\,\zeta)\,u_1^{n+1} - \zeta\,u_2^{n+1} = u_1^n + \zeta\,g^{n+1}\,, \quad j = 1\,;$

Pour $j = J$, il faut prendre en compte la condition limite à droite et on obtient

(9) $\quad -\zeta\,u_{J-1}^{n+1} + (1+2\,\zeta)\,u_J^{n+1} = u_J^n + \zeta\,d^{n+1}\,, \quad j = J\,.$

Le système (8)(7)(9) est un ensemble de $1+(J-2)+1 = J$ équations. Les inconnues sont u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, … u_j^{n+1}, … u_{J-1}^{n+1} et u_J^{n+1}. On introduit un vecteur U qui regroupe ces J inconnues à l'instant $(n+1)\,\Delta t$ et un vecteur B qui représente le second membre des équations (8)(7)(9) ; il est supposé connu :

(10) $$U = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_j^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-1}^{n+1} \\ u_J^{n+1} \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} u_1^n + \zeta\,g^{n+1} \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_j^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \\ u_J^n + \zeta\,d^{n+1} \end{pmatrix}\,.$$

Alors le système de J équations (8)(7)(9) peut s'écrire sous forme d'un système linéaire d'ordre J :

(11) $\quad A\,U = B\,.$

L'explicitation de la matrice A demande un certain soin et l'on a :

(12) $$A = \begin{pmatrix} 1+2\zeta & -\zeta & 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 \\ -\zeta & 1+2\zeta & -\zeta & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & -\zeta & 1+2\zeta & -\zeta & 0 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\zeta & 1+2\zeta & -\zeta & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \cdots & 0 & -\zeta & 1+2\zeta & -\zeta & 0 \\ 0 & & & & \cdots & 0 & -\zeta & 1+2\zeta & -\zeta \\ 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 & -\zeta & 1+2\zeta \end{pmatrix}\,.$$

- Propriétés du système linéaire

La matrice A est une matrice carrée d'ordre J. Elle est symétrique, c'est à dire égale à sa transposée : si on note a_{ij} l'élément de la matrice A situé sur la $i^{\rm o}$ ligne et la $j^{\rm o}$ colonne, on a $a_{ji} = a_{ij}$.

La matrice A est "tri-diagonale". Ses seuls éléments non nuls sont d'une part sur la diagonale principale : $a_{ii} = 1+2\,\zeta$, d'autre part sur la diagonale qui est juste au dessus : $a_{i,i+1} = -\zeta$ pour $1 \leq i \leq J-1$ et enfin sur la diagonale juste au dessous de la diagonale principale : $a_{i,i-1} = -\zeta$ pour $2 \leq i \leq J$.

La matrice A est inversible, donc le système (11) a une solution unique. En effet, on sait qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit à zéro, c'est à dire si on a la propriété suivante : si le second membre B est nul, alors la solution est nulle. En termes d'équations mathématiques, cette dernière relation s'écrit

(13) $\quad \big(A\,V = 0\big) \Longrightarrow \big(V = 0\big)\,.$

Elle est effectivement vérifiée par la matrice A définie à la relation (12).
Compte tenu de la structure très particulière de la matrice A (struture tridiagonale et des éléments diagonaux "assez grands" devant les éléments sur les deux diagonales non pricipales), on peut réoudre le système linéaire par une factorisation de Gauss "$A = LU$" très économique en place mémoire. Cette factorisation est introduite sur deux exemples au cours de la séance d'exercices.

- Stabilité au sens de von Neumann

On considère le schéma implicite (4) pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et on introduit une onde de vecteur d'onde K: $u_j^n = \widehat{u}_K \, \exp(i K\, j \Delta x)$. On suppose qu'alors le schéma définit une unique famille u_j^{n+1} pour $j \in \mathbb{Z}$ qui satisfait à $u_j^{n+1} = g(\sigma,\, \xi)\, u_j^n$. On introduit le nombre d'onde $\xi \equiv K\,\Delta x$ et on a alors le calcul suivant. D'une part, on a (exercice laissé au lecteur !) $u_{j+1}^{n+1} = \exp(i\,\xi)\, u_j^{n+1}$ et $u_{j-1}^{n+1} = \exp(-i\,\xi)\, u_j^{n+1}$. D'autre part, quand on injecte ces relations dans la relation (7), il vient $\big(- \zeta\, g(\sigma,\, \xi) \exp(-i\,\xi) + (1 + 2\,\zeta)\, g(\sigma,\, \xi) - \zeta\, g(\sigma,\, \xi) \exp(i\,\xi) \big)\, u_j^n = u_j^n$. Cette relation est vraie pour tout u_j^n qui n'est pas toujours nul. Donc on en déduit (après un calcul de trigonométrie que le lecteur détaillera) l'expression du coefficient d'amplification :

(14) $$g(\sigma,\, \xi) = \frac{1}{1 + 4\, \sin^2\!\Big(\dfrac{\xi}{2}\Big)}\,.$$

La condition de stabilité de von Neumann $\quad |g(\zeta,\, \xi)| \leq 1$ pour tout nombre d'onde $\xi \in \mathbb{R}$ est alors satisfaite pour tout $\sigma > 0$; pour l'équation de la chaleur (1), le schéma d'Euler implicite en temps et centré en espace (4) est inconditionnellement stable.

- Convergence

Elle est illustrée dans le document compagnon. Si le paramètre $\zeta \equiv \dfrac{\kappa\, \Delta t}{\Delta x}$ reste fixé, la solution calculée à l'aide du schéma (7) converge vers la solution de l'équation aux dérivées partielles (1) si le pas de maillage Δx tend vers zéro. On note que le pas de temps Δt est proportionnel au carré du pas d'espace. Si on multiple ar deux le nombre de mailles, on doit multiplier par quatre le nombre de pas de temps afin d'atteindre la même valeur du temps physique.