le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 03 — Advection

- Introduction

Le mot advection signifie "transport par le mouvement". On cherche dans cette leçon une fonction du temps où l'inconnue $u(t)$ n'est plus un nombre (comme dans la première leçon) ou un vecteur de $\mathbb{R}^2$ (comme pour l'oscillateur harmonique). A t fixé, l'inconnue $u(t)$ est elle-même une fonction de l'espace x. En d'autres termes, l'inconnue est une fonction $u(x,t)$ de deux variables. L'équation d'advection n'est plus à proprement parler une équation différentielle, mais une équation dite "aux dérivées partielles".

On se donne un nombre réel a qui, du point de vue de la physique est homogène au rapport d'une grandeur spatiale divisée par une grandeur temporelle : a est une vitesse. La fonction inconnue $u(x,t)$ satisfait à l'équation d'advection, qui s'écrit

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0\,.$$

- Une première tentative numérique

On réalise une première expérience numérique pour approcher la dynamique advective (1) avec une condition initiale

$$(2) \qquad u(x,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

On se donne un pas d'espace $\Delta x > 0$ et un pas de temps $\Delta t > 0$. On approche la solution exacte $u(j\,\Delta x, n\,\Delta t)$ par le nombre u_j^n, avec un indice en position inférieure pour décrire la variation en espace et un indice en position supérieure pour l'évolution temporelle :

$$(3) \qquad u_j^n \approx u(j\,\Delta x, n\,\Delta t)\,.$$

On approche la dérivée en espace par un schéma centré : $\dfrac{\partial u}{\partial x}(j\,\Delta x, n\,\Delta t) \approx \dfrac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,\Delta x}$ et la dérivée en temps par un schéma explicite : $\dfrac{\partial u}{\partial t}(j\,\Delta x, n\,\Delta t) \approx \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$. On obtient de cette façon le schéma "centré en espace et explicite en temps" pour l'équation d'advection :

$$(4) \qquad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,\Delta x} = 0\,.$$

Si le champ discret u_j^n est donné à l'instant discret n pour toutes les valeurs de l'espace discret j, le calcul de la solution approchée au nouvel instant ne pose aucune difficulté : $u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{a\,\Delta t}{2\,\Delta x}\,\big(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\big)$.

Le calcul réel s'effectue avec une grille de taille finie : $0 \le j \le J$. On peut adjoindre à la relation (4) une condition limite périodique $u_J^n = u_0^n$.

François Dubois, 06 avril 2017, 19 janvier 2018.

Le schéma centré en espace et explicite en temps (4), est très sain du point de vue de sa conception en termes d'approximation des diverses dérivées partielles du problème ; on dit qu'il est consistant avec l'équation aux dérivées partielle (1). Mais l'expérience numérique (voir le document compagnon) montre qu'après quelques itérations, l'approximation numérique u_j^n explose ; elle prend des valeurs qui n'ont rien à voir avec des valeurs numériques attendues. L'ordinateur s'emballe, introduit des nombres de plus en plus grands ; on constate que le schéma est instable. Et ceci se produit quelle que soit la valeur (strictement positive) du nombre de Courant - Friedrichs - Lewy σ défini par

(5) $\quad \sigma = \dfrac{a\,\Delta t}{\Delta x}\,.$

• Méthode des caractéristiques

On peut construire une solution analytique du problème continu (1)(2). On se donne $y \in \mathbb{R}$ et on pose $v(t) = u(at+y, t)$. Alors par dérivation des fonctions composées pour des fonctions de deux variables, on a $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et cette expression est nulle si la fonction $u(x, t)$ est solution de l'équation (1). La fonction $v(t)$ est donc constante et est égale à sa valeur initiale losque $t = 0$. On a donc la suite d'égalités $u(at+y, t) = v(t) = v(0) = u(y, 0) = u_0(y)$. Comme y est arbitraire, on peut aussi l'écrire $y = x - at$, avec x quelconque. La relation précédente entraîne donc

(6) $\quad u(x, t) = u_0(x - at)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\; t > 0\,.$

On peut vérifier par un calcul élémentaire que la relation (6) est bien solution d'une part de l'équation d'évolution (1), d'autre part de la condition initiale (2).

• Schéma décentré

On se donne $a > 0$. L'adaptation au cas $a < 0$ est un exercice (pas si facile !) qui est laissé au lecteur. Si on se donne la fonction u à l'instant $t = n\Delta t$, on peut calculer la solution de l'équation d'advection (1) à l'instant $(n+1)\,\Delta t$ avec la méthode des caractéristiques en adaptant la relation (6) :

(7) $\quad u(x, (n+1)\,\Delta t) = u(x - a\,\Delta t, n\,\Delta t)\,.$

On utilise (7) pour calculer $u_j^{n+1} \approx u(j\,\Delta x, (n+1)\,\Delta t) = u(j\,\Delta x - a\,\Delta t, n\,\Delta t)$. Le schéma décentré consiste à interpoler de manière linéaire $u(j\,\Delta x - a\,\Delta t, n\,\Delta t)$ à partir des valeurs connues aux points de grille (les seules connues pour une méthode numérique discrète !), à savoir $u_j^n \approx u(j\,\Delta x, n\,\Delta t)$ et $u_{j-1}^n \approx u((j-1)\,\Delta x, n\,\Delta t)$:

$$u(j\,\Delta x, (n+1)\,\Delta t) \approx u(j\,\Delta x - a\,\Delta t, n\,\Delta t) \approx u(j\,\Delta x, n\,\Delta t) - a\,\Delta t\,\frac{u(j\,\Delta x, n\,\Delta t) - u((j-1)\,\Delta x, n\,\Delta t)}{\Delta x}\,.$$

En remplaçant les valeurs exactes par les valeurs approchées et et le symbole $\approx$ par une égalité, on en déduit l'expression du schéma décentré pour l'équation d'advection :

(8) $\quad u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{a\,\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right).$

On peut aussi écrire la relation (8) sous la forme

(9) $\quad \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\,\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0\,.$

On a remplacé la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par le schéma explicite en temps $\dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ et la dérivée partielle $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par le schéma décentré à gauche $\dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$: on va chercher l'information dans la direction amont relativement à la vitesse a, ainsi que le suggère la méthode des caractéristiques (6).

Dans le cas $a < 0$, on doit simplement remplacer la dérivée partielle en espace $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ par le schéma décentré à droite $\dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$.

- Analyse de stabilité de von Neumann du schéma décentré

La relation (8) est explicite. Supposons qu'à l'instant $n\,\Delta t$, la fonction discrète u_j^n est une onde de vecteur d'onde K : $u_j^n = \widehat{u}_K \, \exp(i K\, j\, \Delta x)$. Alors après un calcul élémentaire, compte tenu de (8) et (5), on a

(11) $\quad u_j^{n+1} = g(\sigma, \xi)\, u_j^n\,, \quad g(\sigma, \xi) = 1 - \sigma \big(1 - \exp(-i\,\xi)\big)\,, \quad \xi = K \Delta x\,.$

Le schéma décentré se réduit dans ce cas à une simple suite gémétrique, de raison égale au coefficient d'amplification $g(\sigma, \xi)$. Le schéma est stable si cette suite géométrique ne tend pas vers l'infini en module si l'entier n tend vers l'infini, c'est à dire si pour tout nombre d'onde ξ, le module de $g(\sigma, \xi)$ est inférieur ou égal à 1 :

(12) $\quad |g(\sigma, \xi)| \leq 1\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\,.$

Expliciter la condition de stabilité (12) par rapport à la seule variable σ, en éliminant la variable muette ξ de la relation (12), est un exercice sur les nombres complexes laissé au lecteur. La condition (12) est équivalente à

(13) $\quad 0 \leq \sigma \equiv \dfrac{a\,\Delta t}{\Delta x} \leq 1\,.$

Si le pas de temps Δt ne satisfait pas la condition (13), le schéma est instable. Nous l'avons expérimenté et les résultats sont présentés dans le document compagnon. Si le pas de temps Δt n'est pas trop grand, c'est à dire s'il satisfait (3) : $\Delta t \leq \dfrac{\Delta x}{a}$, le schéma décentré converge. L'écart entre la solution approchée (9) et la solution exacte (6) tend vers zéro proportionnellement à Δx.

Nous retenons de cet exemple que le fait de bien approcher les dérivées partielles (c'est à dire utiliser une approche consistante) ne suffit pas pour garantir la convergence. Il faut également que le schéma soit stable. Ce résultat est connu sous le nom de "théorème de Lax", en hommage au mathématicien Peter Lax (né en 1926) qui a établi ce réseulat au milieu des années 1950.