le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 02 — Oscillateur harmonique

- Modélisation mathématique

Un premier exemple concerne un ressort de raideur k qui oscille autour de sa position d'équilibre quand on lui attache une masse m. On suppose de plus qu'il subit une dissipation fluide de constante C et qu'il est soumis à une perturbation extérieure $F(t)$. Si on note $x(t)$ l'écart par rapport à la position d'équilibre, ce système masse-ressort satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre deux :

(1) $$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + C \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\, x(t) = F(t)$$

Le circuit "RLC" est le second exemple fondamental d'oscillateur harmonique. Une résistance R, une self L et un condensateur de capacité C sont montés en série. Le circuit est alimenté par une tension $V(t)$. Alors l'intensité du courant $I(t)$ dans le circuit satisfait aussi à une équation différentielle linéaire d'ordre deux :

(2) $$L \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\,.$$

Toutes les constantes physiques introduites dans ces deux exemples sont des nombres strictement positifs.

- Ecriture générique

Dans le cas du système masse-ressort, on introduit la pulsation ω *via* la relation $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et le coefficient de dissipation ξ en posant $C = 2\, m\, \omega\, \xi$. Si on note $f(t) = \frac{F(t)}{m}$, l'équation (1) se réecrit après division par m sous une forme adimensionnelle :

(3) $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\, \omega\, \xi \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x(t) = f(t)\,.$$

On observe que la pulsation ω est homogène à l'inverse d'un temps alors que le paramètre ξ est un nombre sans dimension. On laisse au lecteur le souin de montrer qu'après une définition appropriée des paramètres ω, ξ et du second membre $f(t)$, l'équation (2) peut elle aussi s'écrire sous la forme générique (3).

On associe à l'équation d'évolution (3) une condition initiale qui porte sur la fonction $x(t)$ et sa dérivée en temps $v(t) \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ à l'instant initial :

(4) $$x(0) = x_0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = v_0\,.$$

- Solution générale

On donne dans ce paragraphe l'expression analytique de la solution du système (3)(4) lorsque $\xi = 0$ et $f(t) = 0$ pour tout instant t :

François Dubois, 05 avril 2017, 19 janvier 2018.

(5) $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0\,.$$

On remarque d'abord que l'équation (5) est linéaire. Si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont deux solutions de l'équation (5), alors la somme $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ est encore une solution de (5). De plus, si λ est un nombre réel (ou complexe !) arbitraire, la fonction $x(t) = \lambda\, x_1(t)$ est encore une solution de (5) si $x_1(t)$ est une solution de l'équation (5).
On dispose de deux fonctions classiques solutions de (5) : $x_1(t) = \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = \sin(\omega t)$.
On construit une solution du système (4)(5) sous la forme d'une combinaison linéaire de x_1 et de x_2 : $x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.
On fixe ensuite les paramètres a et b pour satisfaire la condition initiale (4). On obtient alors

(6) $$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\,.$$

- Plan de phase

Au lieu de représenter les fonctions $x(t)$ et $v(t)$ comme des fonctions sinusoïdales du temps, il est classique de regrouper ces deux grandeurs dans un vecteur $U(t)$: on pose par exemple

(6) $$U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $U(t)$ appartient à $\mathbb{R}^2$ et définit complètement l'oscillateur harmonique. On appelle “plan de phase” l'espace de dimension deux où évolue le point $U(t)$ au cours du temps.
On peut montrer (et c'est d'ailleurs un exercice facile si $v_0 = 0$) que le point du plan de phase $U(t)$ décrit une ellipse si $x(t)$ est solution de l'équation (5).

- Equation de l'oscillateur harmonique dans le plan de phase

le plan de phase permet de transformer l'équation scalaire (5) du second ordre en un système de deux équations différentielles couplées du premier ordre. Dérivons par rapport au temps le vecteur $U(t)$ défini à la relation (6). On a d'abord pour la première composante $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v(t)$: la dérivée en temps de la première composante de $U(t)$ est égale à sa deuxième composante.
Pour la dérivée en temps de la seconde composante, on a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x(t)$ compte tenu de l'équation (5). La dérivée de la seconde composante, compte tenu de l'équation d'évolution du second ordre, est proportionnelle à la première composante du vecteur $U(t)$. On peut résumer le calcul précédent :

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} v(t) \\ -\omega^2 x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} U(t)$$

et transformer cette écriture pour aboutir à une expression formellement analogue au modèle fondamental décrit lors de la première leçon :

(7) $$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + A\,U(t) = 0\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a simplement remplacé la fonction scalaire $u(t)$ par une fonction vectorielle $U(t)$ et le coefficient réel a par une matrice A à deux lignes et deux colonnes.

• Schéma d'Euler explicite pour l'oscillateur harmonique

On se propose ici d'adapter un premier schéma numérique pour l'équation vectorielle (7). On se donne un pas de temps Δt et on note U^n une approximation de $U(n\Delta t)$. Avec le schéma d'Euler explicite, la dérivée $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ à l'instant $n\Delta t$ est approchée par le quotient aux différences finies $\frac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t}$. Le terme $A\,U(t)$ est simplement considéré au n^{o} pas de temps : $A\,U(n\Delta t) \approx A\,U^n$. On obtient le schéma numérique en remplaçant les valeurs exactes par leurs approximations et le symbole d'approximation $\approx$ par une égalité :

(8) $\quad \dfrac{U^{n+1}-U^n}{\Delta t} + A\,U^n = 0\,.$

Si on détaille les deux composantes du vecteur U (*c.f.* (6)) et l'expression de la matrice A (voir la relation (7)), on obtient les expressions suivantes pour la nouvelle position x^{n+1} et la nouvelle vitesse v^{n+1} en fonction de l'ancienne position x^n et de l'ancienne vitesse v^n :

(8) $\quad x^{n+1} = x^n + \Delta t\, v^n\,, \quad v^{n+1} = v^n - \omega^2\, \Delta t\, x^n.$

C'est le schéma d'Euler explicite pour l'oscillateur harmonique décrit par la relation (5).

• Un programme de travail pour continuer l'étude numérique de l'oscillateur harmonique

On peut généraliser la démarche précédente aux autres schémas vus au cours de la première leçon : schéma d'Euler implicite, schéma de Crank-Nicolson et schéma de Heun. On peut aussi revenir à l'oscillateur harmonique avec amortissement et présence d'un second membre (équation (3)), ce qui complexifie encore un peu plus les expressions des différents schémas. Autant d'exercices possibles auquel le lecteur peut s'atteler et qui permettent ensuite de produire les simulations numériques proposées en regard de ces notes de cours.