le cnam

Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles

Cours 01 — Equations différentielles

- Introduction générale : quatre niveaux de langage

(i) la langue des diverses spécialités : aérodynamique, thermique, mécanique des structures, contrôle du vol, électromagnétisme, *etc.*

(ii) la langue des mathématiques : équations différentielles (retour à l'équilibre, oscillateur harmonique, *etc.*) et équations aux dérivées partielles (advection, diffusion, transport, équation de Poisson pour fixer les idées).

(iii) la langue des schémas numériques, ou mathématiques discrètes : différences finies, algorithmes de résolution de systèmes linéaires, éléments finis, méthodes spectrales, *etc.*

(iv) la langue de l'informatique, de la mise en œuvre sur ordinateur. Avec la programmation des méthodes dans des langages informatiques appropriés comme Matlab-Simulink, Octave, Scilab, Python, Fortran, C ou C++, leur adaptation aux architectures parallèles (message passing interface, graphics processor unit) et l'utilisation de logiciels commerciaux comme Fluent, elsA, ProLB, Flusepa, Nastran, Abaqus, Ansys, Systus avec traitement de la géométrie comme Catia, Autocad ou GHS3D.

- Un modèle mathématique fondamental : le retour à l'équilibre

On se donne $a > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Le système dynamique composé d'une part de l'équation d'évolution

(1) $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = 0 \qquad \text{pour } t > 0$$

et d'autre part de la condition initiale

(2) $$u(0) = u_0$$

a pour solution unique la fonction $u(t)$ donnée par la relation $u(t) = \exp(-at)\,u_0$ lorsque t est positif ou nul.

- Schéma d'Euler explicite

Dans le cas d'une évolution dynamique très générale de la forme

(3) $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f\big(u(t)\big)$$

où f est une fonction régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on ne dispose en général pas de formule algébrique pour exprimer la solution de l'équation dynamique (3) jointe à la condition initiale (2). On se contente d'un calcul approché. On introduit un pas de temps $\Delta t > 0$ et pour tout entier naturel n, on cherche une approximation u^n (avec un indice en position haute, qui n'est pas un exposant) de la valeur exacte $u(n\Delta t)$: $u^n \approx u(n\Delta t)$.

Pour construire le schéma d'Euler, on écrit le système (2)(3) sous forme intégrale entre les instants 0 et Δt :

François Dubois, 04 avril 2017.

(4) $\quad u(\Delta t) = u_0 + \int_0^{\Delta t} f\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}t\,.$

Puis on calcule l'intégrale au membre de droite de (4) de façon approchée avec la formule des rectangles à gauche : $\int_0^{\Delta t} f\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}t \,\approx\, \Delta t\, f(u_0)$.
On a donc le calcul approché

(5) $\quad u(\Delta t) \,\approx\, u_0 + \Delta t\, f(u_0).$

Le schéma d'Euler explicite entre l'instant initial et le premier pas de temps Δt est obtenu à partir de la relation (5) en remplaçant la valeur exacte $u(\Delta t)$ par l'approximation u^1 et le symbole d'approximation $\approx$ par une égalité : $u^1 = u_0 + \Delta t\, f(u_0)$.
Une fois connues les valeurs approchées u^1, $u^2, \dots\, u^n$, on calcule la nouvelle valeur u^{n+1} en suivant la même méthodologie. On obtient alors (exercice laissé au lecteur !) l'expression du schéma d'Euler explicite entre les instants $n\,\Delta t$ et $(n+1)\,\Delta t$:

(6) $\quad u^{n+1} = u^n + \Delta t\, f(u^n).$

- Test du schéma d'Euler explicite pour le retour à l'équilibre

Si on choisit $f(u) = -a\,u$, l'équation d'évolution (3) est identique à (1). Le schéma d'Euler explicite (6) s'écrit alors $u^{n+1} = (1 - a\,\Delta t)\,u^n$: c'est une suite géométrique de raison
$q = 1 - a\,\Delta t$. La suite $\big(u^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée (on dit qussi que le schéma numérique est **stable**) si la raison q est de module inférieur ou égal à 1. Cette condition de stabilité impose une majoration du pas de temps : $\Delta t \leq \dfrac{2}{a}$.

- Schéma d'Euler implicite

L'ensemble de la démarche pour construire ce schéma et analogue à l'approche précédente jusqu'à la relation (4). Mais on choisit maintenant d'approcher l'intégrale au membre de droite de (4) avec la formule des rectangles à droite : $\int_0^{\Delta t} f\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}t \,\approx\, \Delta t\, f\big(u(\Delta t)\big)$. Le schéma d'Euler implicite s'écrit finalement entre les instants n et $n+1$:

(7) $\quad \dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f(u^{n+1}).$

Le nombre u^n est connu alors que le nombre u^{n+1} doit être déterminé pour poursuivre l'algorithme. La relation (7) n'est pas une simple formule de calcul, ce qui est le cas avec le schéma d'Euler explicite (voir la relation (6)). Elle définit seulement une équation qui doit ensuite être résolue : $u^{n+1} - \Delta t\, f(u^{n+1}) = u^n$.

- Schéma de Crank-Nicolson

Pour résoudre de façon approchée le système (2)(3) entre les instants 0 et Δt, on écrit comme plus haut la relation (4). Puis, au lieu de faire une intégration numérique avec une formule des rectangles comme pour les schémas d'Euler explicite et implicite, on utilise une formule des trapèzes : $\int_0^{\Delta t} f\big(u(t)\big)\,\mathrm{d}t \,\approx\, \dfrac{\Delta t}{2}\,\big(f(u_0) + f(u(\Delta t)\big)$.
Ce calcul est beaucoup plus précis que les formules des rectangles et le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre deux de précision, alors que les schémas d'Euler explicite et implicite sont seulement précis à l'ordre un.

Le nombre u^1 s'obtient à partir de u^0 en résolvant l'équation $\dfrac{u^1 - u^0}{\Delta t} = \dfrac{1}{2}\big(f(u^0) + f(u^1)\big)$.
Entre les instants $n\,\Delta t$ et $(n+1)\,\Delta t$, on doit résoudre l'équation

(8) $$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(f(u^n) + f(u^{n+1})\right)$$

que l'on peut aussi écrire en regoupant dans le membre de gauche tout ce qui dépend de l'inconnue u^{n+1} et dans le membre de droite tout ce qui dépend de u^n qui est connu à cette étape de l'algorithme : $u^{n+1} - \dfrac{\Delta t}{2}\, f(u^{n+1}) = u^n + \dfrac{\Delta t}{2}\, f(u^n)$.

- Schéma de Heun (Runge-Kutta d'ordre deux)

L'emploi d'un schéma implicite (on doit résoudre une équation pour terminer la résolution complète) n'est pas toujours apprécié des utilisateurs. Le schéma de Heun consiste à modifier le schéma de Crank-Nicolson pour le rendre explicite, tout en conservant la précision d'ordre deux.

On calcule d'abord un prédicteur $\widetilde{u}^{n+1}$ avec le schéma d'Euler explicite :

(9) $$\widetilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t\, f(u^n).$$

Puis on utilise cette valeur au second membre de (8) à la place de u^{n+1} :

(10) $$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(f(u^n) + f(\widetilde{u}^{n+1})\right).$$

On displose alors d'une formule explicite pour calculer le nouvel état au nouvel instant :

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2}\left(f(u^n) + f(\widetilde{u}^{n+1})\right).$$