CSC013

Conservatoire National des Arts et Métiers
Centre d'enseignement de Paris
Spécialité Mathématiques

Informatique Appliquée au Calcul Scientifique
Licence seconde année

Présentation

Ce cours-travaux pratiques se compose de 15 séances de 4 heures chacune afin de constituer un ensemble homogène de 60 heures d'enseignement, soit 6 ECTS. Chaque séance est consacrée à la transmission du cours et aux exercices d'application et/ou aux travaux pratiques. Nous indiquons dans ce qui suit de façon approximative l'emploi du temps qui a été effectivement réalisé pour cet enseignement "IACS-L2" depuis le second semestre 2006-2007.

Séance 1

Cours : Interpolation linéaire et parabolique.

Travaux pratiques : Connexion au système, présentation de l'essentiel de ce qu'il faut savoir sur le système d'exploitation "unix", l'éditeur de textes "emacs', le logiciel graphique "gnuplot" et le progiciel de calcul "octave".

Séance 2

Cours : Interpolation linéaire et parabolique. Algorithme de Hörner.

Travaux pratiques : Enoncé du TP1 et travail individuel.

TP1. Soient trois abscisses réelles $x_1 < x_2 < x_3$ et trois ordonnées y_1, y_2, y_3. Soit f l'interpolé parabolique en ces trois points : la fonction f est polynomiale de degré inférieur ou égal à deux et $f(x_j) = y_j$ pour j égal à 1, 2 ou 3. Ecrire et exécuter un programme "octave" qui dessine le graphe de la fonction f.

Séance 3

Cours : Droite des moindres carrés.

Travaux pratiques : Enoncé du TP2 et travail individuel.

TP2. Choisir N (de l'ordre de 10 typiquement), un intervalle $[x_1, x_N\,]$ et des points intermédiaires $x_2, \ldots\, x_{N-1}$ dans cet intervalle. Calculer $y_j = f(x_j)$ à l'aide d'une interpolation parabolique comme celle mise en place au TP numéro 1.

Calculer et tracer la droite de régression relative aux N points du plan ainsi obtenus.

Séance 4

Cours : Solution exacte et schéma d'Euler explicite pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u(t)}{\tau} = 0$ associée à la condition initiale $u(t=0) = u_0$.

Travaux pratiques : Enoncé du TP3 et travail individuel.

TP3. On choisit $\tau = 1$ et $u_0 = 1$ dans le modèle vu en cours. Tracer le graphe de la solution exacte pour $0 \leq t \leq 1$. Calculer une solution approchée pour $0 \leq t \leq 1$. On remarque que cette solution dépend du choix du pas de temps Δt. Soit $v(\Delta t, t=1)$ la valeur approchée de $u(t=1)$ à l'instant $t=1$ pour le pas de temps Δt. Tracer la courbe de l'erreur $\log \mid v(\Delta t, t=1) - u(t=1) \mid$ en fonction du paramètre $\log\,(\frac{1}{\Delta t})$ pour des valeurs de Δt qu'on choisira de la manière la plus simple possible.

Séance 5

Cours : Erreur de troncature pour le schéma d'Euler explicite. Schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson.

Travaux pratiques : Travail individuel. Complément au TP3 pour les auditeurs n'ayant pas de retard. Reprendre le TP3 en remplaçant le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite et celui de Crank-Nicolson.

Séance 6

Cours : Schéma de Heun et schéma "RK4" de Runge et Kutta.

Travaux pratiques : Enoncé du TP4 et travail individuel.

TP4. Enoncé analogue au TP3, mais en utilisant les schémas de Heun puis de Runge et Kutta.

Séance 7

Cours : Solution exacte et approchée pour le système différentiel $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y = 0$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - x = 0$ avec la condition initiale $x(t=0) = 1$, $y(t=0) = 0$.

Travaux pratiques : Fin du TP4.

Séance 8

Cours : Schémas numériques classiques pour le système dynamique étudié au cours précédent.

Travaux pratiques : Enoncé du TP5 et travail individuel.

TP5. Tracer sur un même graphique la solution exacte, puis la solution approchée du modèle introduit à la séance numéro 7 avec tous les schémas numériques disponibles.

Séance 9

Travaux pratiques : Fin du TP5.

Séance 10

Cours : Interpolation de Hermite sur l'intervalle $[0, 1]$. Base de l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à trois adaptée à l'interpolation de Hermite. Cas d'un intervalle quelconque $[a, b]$ divisé en N morceaux : $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_N = b$.

Travaux pratiques : Enoncé du TP6 et travail individuel.

TP6. Concevoir et mettre en œuvre un programme "uniligne" dans le langage "octave" qui appelle les quatre fonctions de base de l'interpolé de Hermite sur l'intervalle $[0, 1]$. Elaborer et exécuter un programme qui, étant donné un intervalle $[a, b]$, N entier supérieur ou égal à deux, $u_0 \, \ldots \, , u_N$ et $v_0 \, \ldots \, , v_N$ deux familles de nombres réels, dessine le graphe de l'unique fonction f polynomiale de degré inférieur ou égal à trois sur chaque intervalle de la forme $[x_j, x_{j+1}]$ telle que $f(x_j) = u_j$, $f'(x_j) = v_j$ pour j entier variant de 0 à N.

Séance 11

Cours : Résolution d'un système linéaire tridiagonal avec une factorisation de Gauss. Rappels sur l'interpolation de Hermite.

Travaux pratiques : Résolution du TP numéro 6.

Séance 12

Cours : Introduction aux splines cubiques.

Travaux pratiques : Enoncé du TP7 et travail individuel.

TP7. On se donne un entier n et trois familles de réels $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$, $(b_j)_{2 \leq j \leq n}$ et $(c_j)_{2 \leq j \leq n}$ pour former une matrice tridiagonale A telle que $A(j, j) = a_j$, $A(j-1, j) = b_j$ (b_j est sur la diagonale supérieure) et $A(j, j-1) = c_j$ (c_j est sur la diagonale inférieure). Concevoir et mettre en place un programme "octave" qui résolve le système linéaire $A\,x = g$ pour un second membre g arbitraire comportant n composantes. On cherche d'abord deux matrices bidiagonales L et U, avec L inférieure à diagonale unité et U supérieure, de sorte que $L\,U = A$. Puis on effectue une "descente-remontée" en cherchant successivement y solution du système $L\,y = g$ puis x tel que $U\,x = y$.

Séance 13

Travaux pratiques : Résolution du TP numéro 7.

Séance 14

Cours : Rappel sur la résolution numérique des systèmes linéaires tridiagonaux.

Travaux pratiques : Enoncé du TP8 et travail individuel.

TP8. On se donne un entier N supérieur ou égal à 2, on pose $\Delta x = \frac{1}{N}$ et on introduit un maillage régulier $x_j = j\,\Delta x$ de l'intervalle $[0,\,1]$. On se donne $N+1$ nombres y_j arbitraires. Calculer et dessiner la fonction f, interpolé par spline des points $(x_j,\,y_j)$ c'est à dire polynomiale de degré inférieur ou égal à trois dans chaque intervalle $[x_j,\,x_{j+1}]$, deux fois continuement dérivable sur l'intervalle $[0,\,1]$ et telle que $f(x_j) = y_j$ pour j entier compris entre 0 et N.

Séance 15

Travaux pratiques : Résolution du TP numéro 8.

édition juin 2009.