Informatique Appliquée au Calcul Scientifique

Cours 10-bis

Base de splines cubiques

1) Rappel sur les polynomes de degré inférieur ou égal à trois
2) Première spline cubique
3) Base de splines cubiques à deux dimensions d'espace

François Dubois, 05 avril 2000, édition 03 août 2006, 12 pages.

Base de splines cubiques.

① Rappel sur les polynomes de degré ≤ 3.

- on construit rapidement dans ce paragraphe une base de l'ensemble P_3 des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3 :

(1.1) $$P_3 = \{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R},\ u(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \}.$$

au lieu d'utiliser la base "canonique" $1, x, x^2, x^3$, on utilise une interpolation due à Hermite. On définit le polynome non par ses coefficients a, b, c, d, mais par ses valeurs en $x=0$ et $x=1$ et par les valeurs de sa dérivée en $x=0$ et $x=1$:

(1.2) $u \in P_3$ défini par $u(0), u(1), u'(0), u'(1)$.

On a quatre nombres a, b, c, d et quatre autres nombres $u(0)$, $u(1)$, $u'(0)$, $u'(1)$ qui définissent quatre fonctions de base de P_3 de la manière suivante.

- La fonction $\varphi_1 \in P_3$ vérifie les relations suivantes :

(1.3) $$\varphi_1(0) = 1,\ \varphi_1(1) = 0,\ \varphi_1'(0) = 0,\ \varphi_1'(1) = 0.$$

son graphe est représenté figure 1. Son expression algébrique demande de rechercher φ_1 sous la forme proposée en (1.1), d'écrire les quatre relations de (1.3), et de résoudre le système linéaire 4x4 d'inconnues (a, b, c, d). On trouve après un calcul facile laissé au lecteur :

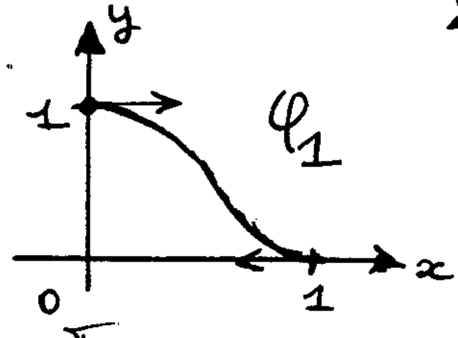


Figure 1

$$(1.4) \qquad \varphi_1(x) = (1+2x)(x-1)^2 .$$

- De même, la fonction φ_2 est obtenue à partir de φ_1 en échangeant les rôles de 0 et 1. On a par définition :

$$(1.5) \quad \varphi_2 \in P_3, \ \varphi_2(0) = 0, \ \varphi_2(1) = 1, \ \varphi_2'(0) = 0, \ \varphi_2'(1) = 0 .$$

La fonction φ_2, représentée à la figure 2, s'obtient en échangeant x en $(1-x)$ dans la relation (1.4). On a donc

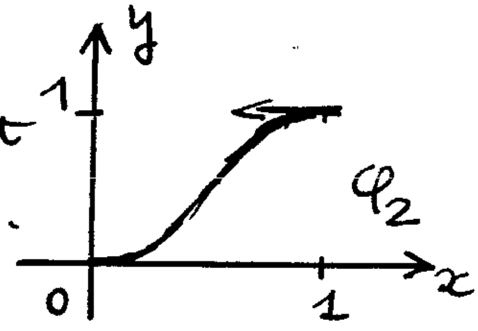


Figure 2

$$(1.6) \quad \varphi_2(x) = x^2(3-2x) .$$

- On construit $\varphi_3 \in P_3$ en décidant que c'est la dérivée en 0 qui est non nulle, et vaut 1 par convention :

$$(1.7) \quad \varphi_3 \in P_3, \ \varphi_3(0) = \varphi_3(1) = 0, \ \varphi_3'(0) = 1, \ \varphi_3'(1) = 0 .$$

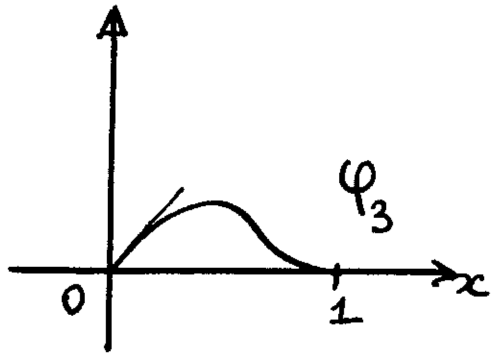
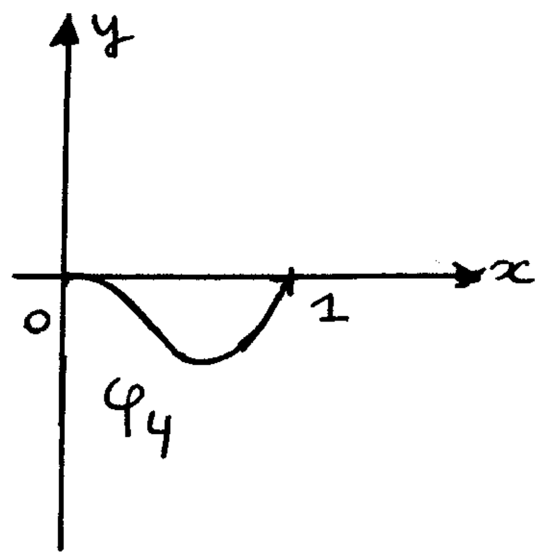


Figure 3

Figure 4



---

on trouve facilement (cf aussi Figure 3) :

(1.8) $\qquad \varphi_3(x) = x(x-1)^2$.

- La fonction $\varphi_4 \in P_3$ s'obtient de la même manière en échangeant les rôles de 0 et 1, ie

(1.9) $\qquad \varphi_4 \in P_3, \ \varphi_4(0) = \varphi_4(1) = 0, \ \varphi_4'(0) = 0, \ \varphi_4'(1) = 1$;

puis de x en $(1-x)$ à la relation (1.8) (cf Figure 4) :

(1.10) $\qquad \varphi_4(x) = x^2(x-1)$.

- Une fonction $u \in P_3$ arbitraire s'écrit donc comme combinaison linéaire des fonctions de base (de Hermite) $(\varphi_j(x))_{1 \leq j \leq 4}$ à l'aide des "degrés de liberté" $u(0)$, $u(1)$, $u'(0)$ et $u'(1)$:

(1.11) $\quad u(x) = u(0)\varphi_1(x) + u(1)\varphi_2(x) + u'(0)\varphi_3(x) + u'(1)\varphi_4(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

L'expression (1.11) permet de recoller sans difficulté les degrés de liberté $(u(0), u'(0))$ et $(u(1), u'(1))$ pour passer ensuite à $1 \leq x \leq 2$, puis $2 \leq x \leq 3$, etc...

La relation (1-11) est un cadre naturel pour travailler avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est la base des calculs de résistance des matériaux.

② Première spline cubique.

- On cherche dans ce paragraphe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, polynomiale de degré ≤ 3 dans chaque intervalle $[j, j+1]$ $(j \in \mathbb{Z})$, et telle que $\Phi(0) = 1$ (pour fixer les idées) et de support le plus petit possible :

$$(2\text{-}1) \quad \phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}),\ \phi(0) = 1,\ \phi\big|_{[j,j+1]} \in P_3,\ \operatorname{Supp}\phi \text{ minimal}$$

- Au vu des figures 1 et 2, une candidate possible est la fonction f définie ainsi :

$$(2.2) \quad f(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \varphi_1(-x) & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Elle vérifie bien les trois dernières conditions de (2.1), mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$. On a en effet

$$(2.3) \quad \varphi_1''(x) = 6(2x-1) \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

et si on a bien f'' continue en 0 $(f''(0) = \varphi_1''(0) = -6)$

f'' n'est pas continue en $x=1$ puisque $f''(1^-)=6$ et $f''(1^+)=0$. Cette première tentative échoue.

- On cherche toujours ϕ sous la forme d'une fonction paire

(2.4) $$\phi(-x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

et on la suppose non nulle sur $[0,2]$. Compte tenu de la dérivabilité en 0 et de la condition $\phi(0)=1$, on a nécessairement

(2.5) $$\phi(x) = \varphi_1(x) + \alpha\,\varphi_2(x) + \beta\,\varphi_4(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

et pour $1 \leq x \leq 2$, les conditions de raccord

(2.6) $$\phi(2) = \phi'(2) = 0$$

imposent facilement

(2.7) $$\phi(x) = \gamma\,\varphi_1(x-1) + \delta\,\varphi_3(x-1), \quad 1 \leq x \leq 2.$$

Il faut exprimer le raccord de $\phi''(2)$ à 0 ainsi que la continuité de ϕ et ses deux premières dérivées en $x=1$. On a donc quatre conditions et quatre paramètres à déterminer, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ce qui, cette fois, semble nous laisser une petite chance.

• De manière analogue à la relation (2.3), on a :

(2.8) $\varphi_2''(x) = 6(1-2x)$, $0 \leq x \leq 1$

(2.9) $\varphi_3''(x) = 2(3x-2)$, $0 \leq x \leq 1$

(2.10) $\varphi_4''(x) = 2(3x-1)$, $0 \leq x \leq 1$.

Le raccord à 0 de $\phi''(2)$ s'écrit :

$$\phi''(2) = \gamma \varphi_1''(1) + \delta \varphi_3''(1) = 6\gamma + 2\delta = 0$$

(2.11) $3\gamma + \delta = 0$

et l'égalité de $\phi''(1^-)$ et $\phi''(1^+)$ impose :

$$\varphi''(1) + \alpha \varphi_2''(1) + \beta \varphi_4''(1) = \gamma \varphi_1''(0) + \delta \varphi_3''(0)$$

ie : $6 - 6\alpha + 4\beta = -6\gamma - 4\delta$, soit

(2.12) $3\alpha - 2\beta - 3\gamma - 2\delta = 3$.

• Par ailleurs, le rapprochement de (2.5), (2.7) et (1.11) entraîne facilement

$$\phi(1) = \alpha = \gamma \; ; \; \phi'(1) = \beta = \delta .$$

(2.13) $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

on obtient alors sans difficulté :

(2.14) $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = -\frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\delta = -\frac{3}{4}$.

et la fonction ϕ est représentée Figure 5.

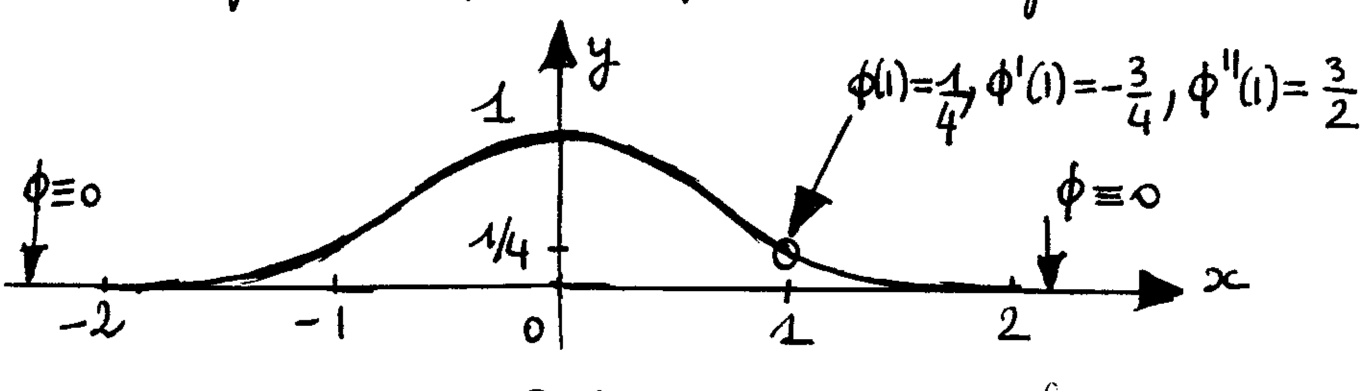


Figure 5 Spline cubique de base

- on peut fabriquer à partir de la fonction ϕ une base de fonctions (splines) associées à une discrétisation uniforme de la droite réelle. on pose

(2.15) $\qquad h > 0$

(2.16) $\qquad B_{j,h}(x) = \frac{2}{3}\,\phi\left(\frac{x}{h} - j\right),\ j \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}.$

La fonction $B_{j,h}$ est polynomiale de degré ≤ 3 sur tout intervalle de la forme $[kh, (k+1)h]$ $(k \in \mathbb{Z})$. Son support est l'intervalle $[(j-2)h, (j+2)h]$. on a

(2.17) $\qquad B_{j,h}(jh) = \frac{2}{3},\quad B_{j,h}((j \pm 1)h) = \frac{1}{6},\ j \in \mathbb{Z}$

(2.18) $\qquad B_{j,h}((j+k)h) = 0,\quad |k| \geq 2,\ j, k \in \mathbb{Z}$

Par ailleurs,

(2.19) $\qquad B'_{j,h}((j+1)h) = -\frac{1}{2h},\ B'_{j,h}((j-1)h) = \frac{1}{2h}.$

et on remarque aussi que l'on a.

(2.20) $\qquad B_{j,h}(x) \geq 0,\quad j \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}.$

- La propriété suivante exprime une "partition de l'unité":

(2.21) $\qquad \sum_{j \in \mathbb{Z}} B_{j,h}(x) \equiv 1 \quad, \forall x \in \mathbb{R}.$

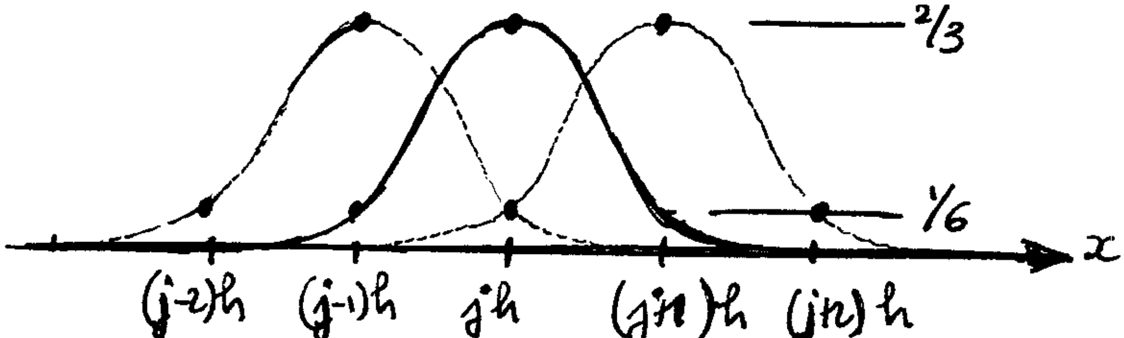


Figure 6 Base de splines cubiques sur la droite réelle.

La preuve consiste d'abord à remarquer que sur un intervalle donné $[jh, (j+1)h]$, la somme de (2-21) ne contient qu'un nombre fini de termes : $B_{j-1,h} + B_{j,h} + B_{j+1,h} + B_{j+2,h}$ (cf Figure 6). Il s'agit d'une fonction cubique qui vaut 1 en $x = jh$ et $x = (j+1)h$ (car $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1$, cf (2.17)) et dont la dérivée est nulle en $x = jh$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} B'_{k,h}(jh) = -\frac{1}{2h} + 0 + \frac{1}{2h} + 0 = 0 \quad (\text{cf } (2.19)).$$

Donc elle est identique à 1 (il suffit par exemple de la décomposer sur la base $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ étudiée au premier point).

- Calcul des coefficients d'une fonction spline.

On se donne des valeurs u_j aux points $x_j = jh$:

$$u(jh) = u_j \tag{2.22}$$

et on souhaite interpoler ces valeurs nodales par une spline cubique $u(\bullet)$. On la cherche sous la forme d'une combinaison des fonctions $B_{j,h}$:

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k \, B_{k,h}(x) \,, \quad x \in \mathbb{R} . \tag{2.23}$$

Comment calculer les coefficients $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en fonction des coefficients $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$?

On écrit simplement l'égalité (2.22) au point $x = x_j$, en prenant en compte la représentation (2.23) et les valeurs nodales (2.17). On a donc simplement

$$\frac{1}{6} v_{j-1} + \frac{2}{3} v_j + \frac{1}{6} v_{j+1} = u_j \tag{2.24}$$

On doit donc résoudre un <u>système linéaire tridiagonal</u> pour passer des valeurs nodales u_j aux coefficients v_j sur la base des fonctions $B_{j,h}$.

(3) Base de splines cubiques à deux dimensions d'espace.

• On veut maintenant savoir interpoler une surface définie de la manière explicite classique

(3.1) $$z = f(x, y).$$

On se donne une grille rectangulaire $(jh, k\eta)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ de pas $h > 0$ en x et $\eta > 0$ en y (cf Figure 7)

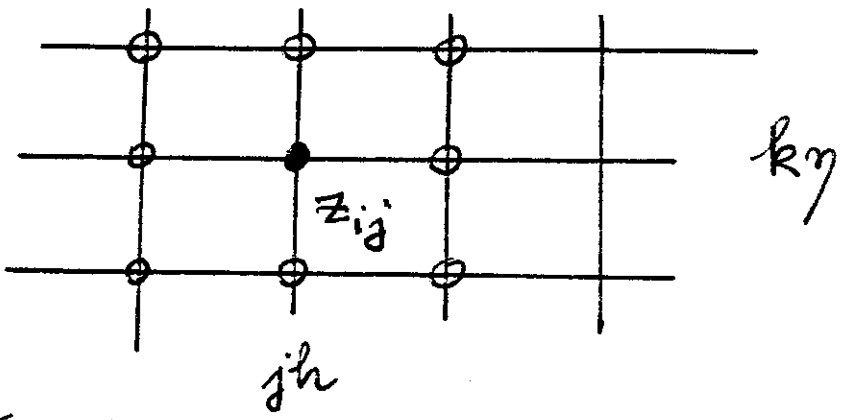


Figure 7

grille rectangulaire bidimensionnelle.

On se donne aussi la valeur de la cote z_{ij} au point de grille $(jh, k\eta)$:

(3.2) $$f(jh, k\eta) = z_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

On cherche à interpoler la fonction f, ie la surface définie par l'équation (3.1), entre les points de grille.

• on effectue un <u>produit cartésien</u> des fonctions splines $B_{j,h}$ vue dans la partie précédente et on pose

$$(3.3) \qquad f(x,y) = \sum_{j,k} v_{j,k} \, B_{j,h}(x) \, B_{k,\eta}(y) .$$

La fonction produit $B_{j,h}(x)\, B_{k,\eta}(y)$ est non nulle seulement pour

$$(3.4) \qquad (j-2)h \leq x \leq (j+2)h \, ; \quad (k-2)\eta \leq y \leq (k+2)\eta$$

et au point z_{ij} (i,j entiers fixés), on compte <u>neuf</u> fonctions de la base (3.3) qui ont une valeur non nulle, à savoir $B_{(j\pm 0,1),h}(x) \; B_{(k\pm 0,1),\eta}$

Pour calculer les coefficients $v_{j,k}$ de la fonction $f(\cdot,\cdot)$, qui permet d'interpoler entre les valeurs nodales z_{ij}, on écrit (3.3) au point (x_j, y_k), en tenant compte de la demande (3.2). Compte tenu des valeurs nodales vues à la relation (2.17), on a:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{9} v_{ij} + \frac{1}{9}\left(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} \right) \\ + \frac{1}{36}\left(v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1} \right) = Z_{ij} \end{array} \right.$$

• La relation (3.5) définit un système linéaire à résoudre pour calculer les coefficients v_{ij}. Sa structure est <u>pentadiagonale</u>; les coefficients non nuls de la matrice du système sont situés sur cinq diagonales lorsqu'on numérote le couple (j,k) par un décompte régulier.

Notez que les coefficients de (3.5) sont également les valeurs de la spline $B_{j,h}(x)\,B_{j,\eta}(y)$ aux points "entiers" (cf Figure 8).

	0	0	0	0	0
	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	0
$k\eta$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	0
	0	0	0	0	0
			jh		

η h

<u>Figure 8</u> Valeurs nodales de la spline $B_{j,h}(x)\;B_{k,\eta}(y)$.